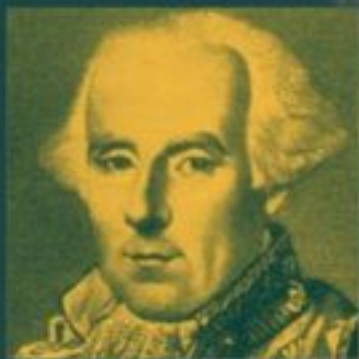


Prosper Schroeder

La loi de la gravitation universelle

Newton, Euler et Laplace

Le cheminement
d'une révolution
scientifique vers
une science normale



La loi de la gravitation universelle
Newton, Euler et Laplace

Springer

Paris

Berlin

Heidelberg

New York

Hong Kong

Londres

Milan

Tokyo

Prosper Schroeder

La loi de la gravitation universelle *Newton, Euler et Laplace*

Le cheminement d'une révolution
scientifique vers une science normale

Cet ouvrage a bénéficié du soutien
du Fonds national de la recherche du Luxembourg



ISBN 13: 978-2-287-72082-6 Springer Paris Berlin Heidelberg New York

© Springer-Verlag France 2007

Imprimé en France

Springer-Verlag France est membre du groupe Springer Science + Business Media

Cet ouvrage est soumis au copyright. Tous droits réservés, notamment la reproduction et la représentation, la traduction, la réimpression, l'exposé, la reproduction des illustrations et des tableaux, la transmission par voie d'enregistrement sonore ou visuel, la reproduction par microfilm ou tout autre moyen ainsi que la conservation des banques données. La loi française sur le copyright du 9 septembre 1965 dans la version en vigueur n'autorise une reproduction intégrale ou partielle que dans certains cas, et en principe moyennant les paiements des droits. Toute représentation, reproduction, contrefaçon ou conservation dans une banque de données par quelque procédé que ce soit est sanctionnée par la loi pénale sur le copyright.

L'utilisation dans cet ouvrage de désignations, dénominations commerciales, marques de fabrique, etc., même sans spécification ne signifie pas que ces termes soient libres de la législation sur les marques de fabrique et la protection des marques et qu'ils puissent être utilisés par chacun.

La maison d'édition décline toute responsabilité quant à l'exactitude des indications de dosage et des modes d'emploi. Dans chaque cas il incombe à l'utilisateur de vérifier les informations données par comparaison à la littérature existante.

Maquette de couverture : Jean-François MONTMARCHÉ



Avant-Propos

Ce livre doit son origine à un épisode qui marquait profondément la science encore nouvelle de la mécanique céleste au milieu du XVIII^e siècle. Ce fut la mise en doute quasi simultanée de la loi de la gravitation newtonienne par trois des plus célèbres mathématiciens de cette époque : CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER. Or au cours de la rédaction, le sujet ne pouvant intéresser initialement que quelques spécialistes de l'histoire des sciences a débordé les limites étroites initialement tracées pour devenir une analyse de l'ensemble de cette période qui vit l'introduction du paradigme newtonien mais aussi l'acheminement de celui-ci vers la "science normale" au sens de KUHN.

Notre volonté pendant l'écriture du présent texte était de saisir dans toute son originalité l'enrichissement décisif apporté à la science de la mécanique, tout comme les nouvelles perspectives qui s'ouvraient pour celle-ci à travers l'adoption du calcul leibnizien pour remplacer les méthodes purement géométriques utilisées par NEWTON. En même temps il s'agissait de décrire la position épistémologique qui se refusait d'abord à prendre en considération le phénomène de la force comme action à distance, pour admettre après maintes considérations philosophiques cette même force en tant que nouvelle entité régissant la science de la physique depuis le retour à la "science normale" sous LAPLACE.

Un texte plus volumineux avec le même sujet était une thèse de doctorat présentée et acceptée par la "Otto Friedrich Universität" de Bamberg. Je tiens à remercier tout particulièrement les deux directeurs de thèse, MM les Professeurs Roland Simon-Schaeffer et K.H. Glassmeier pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mes travaux. Leurs remarques, leurs suggestions m'ont guidé sur le chemin que ma curiosité m'avait tracé et j'ai toujours été très sensible à la bienveillance qu'ils m'ont témoignée. Je remercie également mon ami H.E. Pesch qui m'a grandement aidé à vaincre les multiples difficultés qui posait la mise en page informatique avec les formules indispensables à sa compréhension. M. Marc Kunzer a pris en charge l'écriture des formules et je le remercie très fortement. Enfin je remercie Mme N. Mazzarini qui, à partir de mon écriture quelque fois difficile à lire, est parvenue à distiller un texte (je l'espère au moins) lisible.

Prosper Schroeder

Table des matières

1	Les connaissances astronomiques au début des temps modernes	1
2	Les «PRINCIPIA» et la loi de la gravitation universelle	29
2.1	NEWTON — génie isolé et solitaire	29
2.2	La genèse de la loi de la gravitation chez NEWTON	45
2.3	Les «PRINCIPIA», œuvre maîtresse de NEWTON	58
2.4	Les « Principia »	97
2.5	La théorie newtonienne de la Lune	125
3	L'introduction de la loi de la gravitation sur le continent	177
4	Alexis Claude CLAIRAUT et sa détermination de l'orbite de la Lune	193
4.1	CLAIRAUT — mathématicien et physicien newtonien	193
4.2	La première théorie de la Lune de Clairaut	199
4.3	Modification de la loi de la gravitation universelle	212
4.4	La solution modifiée du problème de l'orbite de la Lune par CLAIRAUT	220
4.5	Les autres travaux en astronomie théorique de CLAIRAUT	232
5	D'Alembert et la mécanique céleste	241
5.1	D'Alembert, philosophe et mathématicien	241
5.2	L'engagement de D'ALEMBERT pour la mécanique céleste	261
5.3	La conception de la loi de la gravitation chez D'ALEMBERT	279
5.4	La théorie de la Lune de D'ALEMBERT	288
6	Léonard EULER	311
6.1	EULER — le plus prolifique mathématicien et mécanicien du XVIII ^e siècle	311
6.1.1	La transcription des «PRINCIPIA» dans l'analyse leibnizienne et le rôle joué par les écoles de Bâle et de Paris ainsi que par Emilie du CHÂTELET	311
6.1.2	Leonard EULER — Éléments d'une biographie	339
6.1.3	Mechanica	345

6.2	EULER et la loi de la gravitation universelle	348
6.2.1	Le rappel des doutes sur la validité de la loi de l'attraction au début du XVIII ^e siècle	348
6.2.2	L'échange épistolaire entre CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER	363
6.2.3	Les réflexions successives d'EULER sur le concept de la gravitation	368
6.3	EULER — mécanicien du Cosmos	380
6.3.1	La mécanique céleste au milieu du XVIII ^e siècle, une science presque achevée	380
6.3.2	Recherches sur le mouvement des corps célestes en géné- ral [1]	387
6.3.3	Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter [1]	400
6.3.4	La première théorie de la Lune d'EULER	415
6.3.5	La confirmation de la théorie de la Lune eulerienne par Tobias MAYER et ses tables	428
6.3.6	La deuxième théorie de la Lune d'EULER	441
7	La théorie des perturbations après EULER et le passage à la mécanique céleste classique avec LAGRANGE et LAPLACE	447
	Bibliographie	533

Chapitre 1

Les connaissances astronomiques au début des temps modernes

—I—

DANS le contexte qui nous préoccupe, il n'est pas dans notre intention de retracer l'histoire de l'astronomie. Nous nous bornerons donc, dans ce qui suit, à décrire les travaux essentiels de trois personnages COPERNIC, Tycho BRAHE et GALILEI, qui ont posé, ensemble avec d'autres savants moins connus, les bases de l'astronomie moderne, lesquelles serviront à bâtir la mécanique céleste newtonienne, complétée et élargie au XVIII^e siècle par les CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE et LAPLACE. Nous nous pencherons ainsi dans ce chapitre sur la découverte des lois cinématiques qui portent le nom de KEPLER, mais que nous discuterons à fond dans les chapitres qui traitent des «PRINCIPIA» [1], respectivement de la théorie de la Lune de NEWTON.

En effet la révolution astronomique des XVI^e et XVII^e siècles n'est que le reflet d'une «*crise de la conscience européenne*» [2], qui modifia profondément les fondements et les cadres mêmes de la pensée humaine. Et le développement de la cosmologie nouvelle, lié aux noms cités au début de ce chapitre, remplaça non seulement le monde géométrique des Grecs et le monde anthropocentrique du Moyen Âge par un univers purement humain. Dorénavant d'autres priorités sont imposées : les sciences contemplatives cèdent le pas aux sciences actives et l'homme, de contemplateur de la nature, devient : «*son décentré de l'astronomie moderne, mais provoqua une conversion complète de l'esprit possesseur et maître*» [3]. Ce changement de point de vue est accompagné d'une sécularisation de la conscience et d'une concentration de celle-ci à des buts exclusivement

concrets, substituant au schéma téléologique et organismique de la pensée et de l'explication un schéma purement causal et mécaniste, conduisant finalement à la «*mécanisation de la conception du monde*» [4]. Celle-ci devient complètement prépondérante dans la mécanique céleste du XVIII^e siècle.

A. KOYRÉ voit dans cette transformation «*les expressions et les concomitants d'un processus plus profond et plus grave, en vertu duquel l'homme a perdu sa place dans le monde ou, plus exactement peut-être, a perdu le monde même, qui formait le cadre de son existence et l'objet de son savoir. Il a dû transformer et remplacer non seulement ses conceptions fondamentales, mais jusqu'aux structures mêmes de sa pensée.*» [5] KOYRÉ entreprend dans ses «*Études galiléennes*» [6] de définir les schémas structurels de l'ancienne et de la nouvelle construction du monde et de décrire les changements produits par la «*crise de conscience*» qui allait de pair avec la révolution astronomique que nous allons décrire. Il les ramena à deux éléments principaux, d'ailleurs étroitement liés, à savoir : la destruction du cosmos et la géométrisation de l'espace. Le cosmos était ce «*tout*», à la fois fini et bien ordonné, possédant une hiérarchie de valeurs allant de la région sublunaire, soumise aux changements et à la corruption, pour s'élever aux sphères célestes incorruptibles et lumineuses. Il est remplacé dorénavant par un Univers indéfini, voire même infini, ne comportant plus aucune hiérarchie naturelle, qui est uni seulement par l'identité des lois qui le régissent dans toutes ses parties. Le concept de géométrisation de l'espace remplaçait l'idée aristotélicienne comme ensemble différencié de lieux intramondains par celle de l'espace abstrait de la géométrie euclidienne qui forme une extension homogène et infinie. Ces deux nouvelles conceptions impliquaient le rejet par la pensée scientifique de toutes considérations basées sur les notions de valeur, de perfection, d'harmonie, de sens ou de fin pour mener au divorce total entre le monde des valeurs et le monde des faits.

Si la destruction du cosmos grec et la géométrisation de l'espace sont généralement liées à la révolution copernicienne, qui est censée avoir sapé toutes les fondations de l'ordre du monde traditionnel, il y avait bien des prédécesseurs à COPERNIC, dont le plus connu est sans doute Nicolas DE CUES, le dernier grand philosophe du Moyen Âge déclinant. Ce fut lui, qui le premier rejeta la conception médiévale du cosmos et à qui, bien souvent, est attribuée l'idée de l'infinité de l'Univers.

Mais en fait, il évite soigneusement le qualificatif d'«*infini*» qu'il réserve à Dieu seulement. Pour Nicolas DE CUES, l'Univers est plutôt «*interminé*», ce qui veut dire pour lui qu'il n'a pas de limites et n'est donc pas contenu dans la carapace extérieure des «*sphères célestes*». Et le caractère foncièrement «*ouvert*» de l'Univers rend impossible l'avènement d'une science précise et totale de lui. Seulement une connaissance partielle et conjecturale du monde extérieur est possible.

La conception du monde de Nicolas DE CUES n'est pas fondée sur une critique des théories astronomiques ou cosmologiques contemporaines, et il ne voulait pas provoquer une révolution scientifique mais il se limitait à la métaphysique et la théologie. Dans ce sens, son Univers est une représentation,

forcément imparfaite, de Dieu qu'il transpose dans le royaume de la multiplicité et de la séparation, tout en étant intimement convaincu que Dieu embrasse toutes les qualités et les déterminations, non seulement différentes, mais même opposées de la réalité.

Néanmoins, Nicolas DE CUES revient, à maintes reprises, à ses considérations sur l'Univers et la réalité physique, et ceci surtout dans son œuvre *«De la docte Ignorance»* [7] qui traite de la dissolution des concepts opposés et de leur coïncidence dans l'infini. Ainsi, pour lui, le centre du monde coïncide avec la circonférence. Celui-ci est d'ailleurs un centre métaphysique donc nullement physique et, de ce fait, n'appartient pas au monde. Et ce *«centre du monde»* qui est identique à la *«circonférence»* de l'Univers qui est commencement et fin, fondement et limite, n'est rien d'autre pour Nicolas DE CUES que l'Être Absolu : *«Le monde n'a pas de circonférence. Car s'il avait un centre, il aurait aussi une circonférence, et ainsi il aurait en lui-même son commencement et sa fin, et le monde serait limité par rapport à quelque chose d'autre ... »* [7] Et Nicolas DE CUES de continuer : *«... bien que le monde ne soit pas infini, il ne peut cependant pas être conçu comme fini, puisqu'il lui manque les termes entre lesquels il serait enclos. Par conséquent, la Terre qui ne peut pas être le centre, ne peut pas être privée de tout mouvement. En effet, il est nécessaire qu'elle soit mue de façon telle qu'elle puisse être mue infiniment moins ... La Terre, donc n'est pas le centre ni de la huitième, ni d'aucune autre sphère, et l'apparition au-dessus de l'horizon des six signes (du zodiaque) n'implique pas qu'elle soit au centre de la huitième sphère ... »* [7] Nicolas DE CUES conclut en ramenant sa réflexion dans le giron théologique : *«Celui donc qui est le centre du monde, à savoir Dieu très saint, est le centre de la Terre et de toutes les sphères, ainsi que de tout ce qui est au monde ; et en même temps, il est de toutes choses la circonférence infinie.»* [7]

Que veut dire Nicolas DE CUES au juste ? Il est certain qu'il n'entendait pas écrire un traité de cosmologie. A. KOYRÉ voit probablement juste, quand il regarde ces textes comme *«un essai d'exprimer et de souligner le manque de précision et de stabilité dans le monde créé.»* [5] Celui-ci n'est pas représentable d'une façon mathématique exacte et les orbes et sphères célestes ne sont pas qu'approximatives. Il y a donc nécessairement un manque de concordance entre les observations astronomiques des Anciens et des Modernes qui peut être expliqué par un changement des axes et des pôles, voire par un déplacement des étoiles elles-mêmes. Il n'y a rien qui soit au repos dans le monde, et Nicolas DE CUES tire la conclusion suivante : *«Il résulte de tout cela, que la Terre se meut. Et puisque du mouvement des comètes, de l'air et du feu, nous savons que les éléments se meuvent, et que la Lune se meut de l'Orient à l'Occident, moins vite que Mercure ou Vénus ou le Soleil et ainsi de suite, il s'ensuit que la Terre se meut moins que tout le reste, et cependant elle ne décrit pas, comme une étoile, un cercle minimum autour du centre ou du pôle, pas plus que la huitième sphère ne décrit un cercle maximum comme on vient de le démontrer.»* [7]

Il est encore une fois difficile de préciser quel genre de mouvement Nicolas DE CUES attribue à la Terre. De toute évidence, il ne pense pas à celui que

COPERNIC lui assignera et qui est le mouvement de rotation quotidien, respectivement le mouvement annuel autour du Soleil, mais il opte plutôt pour une sorte de giration orbitale autour d'un centre vaguement déterminé, et de même nature que celui des autres corps célestes. Manifestement Nicolas DE CUES a abandonné la référence à l'astronomie grecque, qui par la réduction des mouvements célestes à un système de mouvements circulaires uniformes, voulait «sauver les apparences» en révélant la stabilité permanente du réel derrière l'irrégularité des phénomènes. Pourtant Nicolas DE CUES n'est nullement un penseur moderne. En opposition profonde aux inspirations fondamentales de cette science moderne, qui était persuadée que «*le Livre de la Nature est écrit en langage géométrique*» [8], il nie la possibilité même du traitement mathématique de la nature.

Cette vue pessimiste n'a pas empêché Nicolas DE CUES d'avoir des conceptions étrangement modernes concernant la hiérarchisation de l'Univers qu'il rejette pleinement, et il exprime tout particulièrement sa négation de la position basse et méprisable assignée à la Terre par la cosmologie traditionnelle : «*La forme de la Terre est noble et sphérique et son mouvement est circulaire ; mais pourrait être plus parfait ...* » [7] et Nicolas DE CUES de poursuivre : «*il n'est pas vrai que cette Terre est le plus vil et le plus bas des corps du monde ... La couleur sombre de la Terre n'est pas non plus, un argument en faveur de sa bassesse ; car si quelqu'un était dans le Soleil, son éclat ne lui apparaîtrait pas comme à nous.*» [7]

Ayant détruit ainsi la base même de l'opposition entre la Terre «sombre» et le Soleil «lumineux» par la démonstration de l'égalité de leurs structures, il proclame : «*La Terre est donc une étoile noble, qui a une lumière, une chaleur et une influence propres et distinctes de celles de toutes les autres étoiles ...* » [7]

Cette courte excursion à travers l'une des œuvres maîtresses du cardinal montre que cet homme génial avait quitté le Moyen Âge. Son monde n'était plus désormais le cosmos médiéval, même s'il était encore loin de l'Univers des Modernes.



L'ANNÉE 1543, année de la parution du «*De revolutionibus orbium cælestium*» [9] et de la mort de son génial auteur, Nicolas COPERNIC, marque une grande date dans l'histoire de l'humanité. On pourrait la proposer comme celle «*de la fin du Moyen Âge et du début des temps modernes*» puisque, bien plus profondément que la prise de Constantinople par les Turcs ou la découverte de l'Amérique par Christophe COLOMB, elle marque la fin d'un monde et la naissance d'un monde nouveau. Mais peut-être serait-ce en méconnaître encore l'importance : la coupure effectuée par COPERNIC ne marque pas seulement la fin du Moyen Âge. Elle marque la fin d'une période qui embrasse à

la fois et le Moyen Âge et l'Antiquité. Depuis COPERNIC, et seulement depuis COPERNIC, l'homme n'est plus au centre du monde. L'Univers ne tourne plus pour lui [9]. C'est avec cet éloge que A. KOYRÉ commence son introduction au LIVRE PREMIER «*Des Révolutions des orbes célestes*» de COPERNIC.

Et dans la suite de son texte, il essaie de convaincre ses lecteurs de l'effort libérateur de cet ouvrage. En effet, celui-ci provoquait l'écroulement d'un monde qui avait centré tous les acquis intellectuels, les sciences, la philosophie, la théologie, autour de l'homme. Mais il évoquait également la hiérarchie qui, opposant aux cieux le monde sublunaire, unissait les deux, dans et par cette séparation même. COPERNIC remplaça un système astronomique qui avait régné plus de treize cents ans en maître absolu : le système de PTOLÉMÉE. Ce savant alexandrin, codifiant les résultats acquis par ses devanciers, en particulier par HIPPARQUE, avait mis sur pied cette célèbre hypothèse où, tout en admettant a priori, comme le bon sens semblait le commander, l'immobilité de la Terre, mais en même temps aussi sa position dans le centre du monde. Il était parvenu à représenter de façon mathématique assez exacte la marche apparente du Soleil et des planètes sur la sphère céleste et à expliquer le mouvement des astres. Son modèle cinématique sauvait, suivant la formulation platonicienne, les apparences. Son œuvre principale est «*L'Almageste*» [10].

Il suffit de parcourir le début de cet ouvrage pour s'apercevoir que PTOLÉMÉE a voulu rédiger un exposé complet du système géocentrique. Dans les deux premiers livres, il traite de la structure de l'Univers avec les différentes sortes de mouvements célestes et de la situation de la Terre. Les LIVRES III à VI ont comme sujet la théorie du Soleil et de la Lune, tandis que la description de la sphère céleste et le catalogue des étoiles fixes sont traités dans les deux livres suivants. PTOLÉMÉE achève son ouvrage avec la théorie des planètes qu'il expose dans les LIVRES IX à XIII. PTOLÉMÉE ne prétend nullement faire œuvre originale d'un bout à l'autre de son livre, mais il se réfère souvent aux travaux de ses prédécesseurs, surtout à HIPPARQUE. Celui-ci s'était penché sur les différences existant entre la position moyenne d'un corps se déplaçant uniformément sur le quadrillage des étoiles fixes et sa position vraie à un instant donné. L'écart entre les deux lieux est mesuré par l'équation du centre. Ainsi le Soleil possède une inégalité : l'inégalité zodiacale, ainsi nommée parce que le Soleil paraît se déplacer plus ou moins vite selon les signes du zodiaque qu'il parcourt. HIPPARQUE tirait la conclusion que les différences de longueur des saisons sont le signe tangible de ces inégalités de vitesses du Soleil qu'il croyait se mouvoir sur un cercle excentrique par rapport à la Terre.

La théorie de la Lune s'avérait beaucoup plus compliquée que celle du Soleil. Si l'on doit à PTOLÉMÉE la découverte de l'évection, cette importante inégalité du mouvement de la Lune dont la période est de 32 jours et son amplitude maximale de $1^{\circ}16'$, il y a d'autres inégalités qui n'ont pu être saisies que beaucoup plus tard, sur la base de la théorie de la gravitation. Il en est de même des variations de la latitude. Et il y a une incroyable inexactitude dans la théorie lunaire de PTOLÉMÉE qui porte sur les variations de la distance entre la Terre et son satellite. De sa théorie résulte en effet que, lorsque la Lune

est dans ses quadratures, et qu'en même temps elle se trouve dans la partie inférieure de l'épicycle que PTOLÉMÉE avait ajouté au cercle déferent, elle devrait apparaître presque quatre fois plus grande en surface que lorsqu'elle se trouve à ses conjonctions et ses oppositions. Ce désaccord important subsistait, et pour y pallier, les astronomes arabes du XIV^e siècle adoptèrent un autre modèle cinématique avec deux épicycles qui se conformait mieux aux données de l'observation.

Mais le triomphe de PTOLÉMÉE réside dans sa théorie des planètes qui sera la base de toutes les tables astronomiques du Moyen Âge, que ce soient les tables alphonsines ou celles de Toulouse ou celles de Tolède. Jusqu'aux temps de COPERNIC sa théorie épicyclique des planètes sera unanimement acceptée. Cette théorie tient compte, outre de l'inégalité zodiacale, d'une autre inégalité qui produit le phénomène des stations et des rétrogradations des planètes qui leur a valu, du temps des Babyloniens déjà, le nom d'astres errants. Or les rétrogradations n'ont pas toujours lieu au même point du zodiaque, cette inégalité est dépendante de la position de la planète par rapport au Soleil. Ainsi les Anciens avaient déjà remarqué que les planètes supérieures arrivent au centre de leur arc de rétrogradation lorsqu'elles sont en opposition avec le Soleil. Afin d'expliquer cette inégalité, l'épicycle fut inventé dans l'astronomie ancienne. Cet épicycle est centré autour d'un point O quelconque et porte un point P qui se meut d'un mouvement uniforme sur le petit cercle, et représente la planète, tandis que le grand cercle, ou déferent, tourne uniformément autour de son centre C . Il est dorénavant possible d'ajuster les deux rayons ainsi que les vitesses angulaires constantes et les sens de rotation, de manière à reproduire les variations apparentes de distance et de vitesse ainsi que les stations et rétrogradations. Enfin, pour obtenir un accord encore meilleur entre les positions observées et celles calculées, le cercle homocentrique comme déferent fut quelquefois remplacé par un cercle excentrique. Une autre méthode fut l'introduction d'un second épicycle ou d'un excentrique à centre uniformément mobile. Plus intéressante encore, cette pratique finit par s'accompagner de l'utilisation de l'équant, découvert par PTOLÉMÉE. Il fait la construction suivante : un point P est placé sur un cercle excentrique de centre fixe C et dont l'excentricité est CT , où T est la place de la Terre. Il porte alors sur la ligne des apsides, mais dans l'autre sens, la même longueur que CT , soit CQ . Et il postule que l'angle entre la ligne des apsides et la droite QP , avec P représentant la planète, croît uniformément. P demeure donc toujours à la même distance du centre C , le point par rapport auquel le mouvement est uniforme étant le point Q , dit point équant. On peut donc parler de mouvement circulaire par rapport à C , et de mouvement uniforme par rapport à Q , sans que pour autant il y ait un mouvement circulaire uniforme. La description donnée amène à une constatation importante que Pierre DUHEM a déjà relevée : «*En donnant à un point mobile autour d'un cercle une vitesse variable par rapport au centre de ce cercle, PTOLÉMÉE a contrevenu, ou du moins donné une grave entorse à la loi du mouvement circulaire et uniforme.*» [11] Mais PTOLÉMÉE avait, à côté de la préservation des phénomènes, encore une autre préoccupation : c'était celle

de la simplicité des méthodes de représentation et l'adaptation de celles-ci à l'exigence des faits. Et en véritable savant avec presque une tournure moderne, il écrit dans *«L'Almageste»*, LIVRE XIII : *«L'Astronome doit s'efforcer dans toute la mesure du possible de faire concorder les hypothèses les plus simples avec les mouvements célestes ; mais si cela ne réussit pas, il doit prendre celles des hypothèses qui peuvent convenir.»* [10]

Si la théorie des longitudes des planètes manifeste le triomphe de l'astronomie ptoléméenne, il n'en est pas de même de celle des latitudes. PTOLÉMÉE se trouvait d'abord devant un problème observationnel : les inclinaisons des orbites des planètes par rapport à l'écliptique sont faibles et donc plus difficilement mesurables. De plus, vu leur petitesse, l'on peut les négliger dans la détermination des longitudes dans un premier temps. Mais en s'attaquant expressément à la théorie des latitudes, PTOLÉMÉE s'est heurté à un problème de principe : la ligne des nœuds formant la droite de l'intersection du plan de l'orbite d'une planète avec le plan de l'écliptique passe en réalité par le Soleil, tandis que PTOLÉMÉE supposait évidemment qu'elle passe par la Terre. Les complications en résultant sont bien plus grandes que l'erreur de référentiel pour la théorie des longitudes. Les erreurs sont particulièrement grandes dans le cas des planètes intérieures, puisqu'elles s'ajoutent à l'erreur de la situation de la ligne des nœuds, celle de croire que leurs orbites entourent la Terre alors que c'est celle de la Terre qui les enveloppe.

Avec PTOLÉMÉE s'achève le développement de l'astronomie antique, dont l'histoire n'est plus désormais que celle de son déclin. La plupart de ceux qui s'intéressent aux phénomènes célestes sont les astrologues ou des polygraphes imprégnés de néo-platonisme, qui interprètent de façon tendancieuse les acquis des plus grands astronomes de l'antiquité, chez qui l'on trouve à la fois une fidélité fondamentale aux postulats de la physique aristotélicienne, mais aussi un aveu de la fragilité et de l'incertitude, voir à la limite de l'inadéquation de tout modèle humain prétendant simuler les choses célestes [12].

Il y eut le calme plat pendant treize siècles durant lesquels la cosmologie d'ARISTOTE et l'astronomie de PTOLÉMÉE ont dominé la pensée de l'Occident. Et COPERNIC, une fois encore, va faire usage des techniques mathématiques élaborées par PTOLÉMÉE tout en cherchant à retourner en arrière avant celui-ci, vers l'âge de PYTHAGORE et de PLATON. COPERNIC cite HÉRACLIDE DU PONT, ECPHANTUS et HICÉTAS, PHILOLAÛS et ARISTARQUE DE SAMOS. Et selon la *«Narratio prima»* de RHETICUS [13] : *«C'est en suivant PLATON et les pythagoriciens, les plus grands mathématiciens de cet âge divin, qu'il pensa que, pour déterminer la cause des phénomènes, un mouvement circulaire devait être attribué à la Terre sphérique.»*

Nicolas COPERNIC est né à Toruń en Poméranie le 19 février 1473. Fin 1496, peu après son arrivée à l'Université de Bologne où il voulait se consacrer au droit canon, il devint l'assistant de Domenico Maria NOVARA, astronome relativement connu. En juillet 1501, COPERNIC se présenta devant le chapitre de Frombork où son oncle Lucas WATZENRODE, alors évêque de Warmie, lui avait obtenu une charge de chanoine. Il demanda à ce chapitre deux années

supplémentaires pour aller étudier la médecine à Padoue. Au printemps 1503, COPERNIC, désireux de ne pas rentrer sans diplôme d'Italie, sollicita de l'Université de Ferrare le titre de docteur en droit canon. Il l'obtint le 31 mai 1503. Puis COPERNIC retourna à Frombork. Il accompagna pendant quelques années son oncle en tant que médecin personnel et secrétaire de celui-ci dans ses pérégrinations ecclésiastiques et diplomatiques, puis retourna définitivement dans l'isolement de la petite ville de Frombork. Il y participera à la gestion du chapitre, continuera d'exercer un peu la médecine et se consacrera à l'œuvre de sa vie : le «*De revolutionibus*» qui paraîtra l'année même de sa mort en 1543.

Mais c'est longtemps avant, vers 1530, que COPERNIC avait achevé la rédaction de son ouvrage et le fait qu'il avait élaboré un nouveau système du monde ne resta pas caché aux astronomes ; COPERNIC non plus n'en faisait un mystère. Il mit en circulation parmi ses amis un petit exposé : «*Commentariolus*» [13] qui exposa sa théorie dans les grandes lignes et qui fut rédigé avant 1514. Le manuscrit était composé de six feuillets. COPERNIC y explique d'abord que l'astronomie d'EUDOXE n'avait pas réussi à expliquer les variations dans les distances des planètes ; que PTOLÉMÉE a dû se résoudre à introduire dans son système astronomique des équants, ce qu'il n'accepte pas à cause de la violation du postulat des sphères célestes. Il faut donc chercher autre chose et COPERNIC introduit sept axiomes qui définissent les traits caractéristiques de son système avant d'exposer celui-ci en sept chapitres très concis. Il traite d'abord de l'ordre des orbes, du triple mouvement de la Terre, de l'avantage de référer les mouvements non pas à l'équinoxe mais aux étoiles fixes. COPERNIC passe ensuite au mécanisme des mouvements de la Lune, explique les théories des planètes supérieures mais aussi de Vénus et de Mercure et assigne à leurs orbes ainsi qu'aux épicycles des dimensions déterminées. Dans le texte, il n'y a pas de preuves ni de démonstrations. Malgré cette déficience, le texte copernicien avait trouvé une large diffusion et ses amis l'exhortaient à publier ses découvertes mais, aspirant à la tranquillité, celui-ci ne pensait pas à une publication.

En 1539, un jeune professeur à l'Université de Wittenberg, RHETICUS, se rend à Frombork auprès de COPERNIC et devient le seul élève que celui-ci n'ait jamais eu. Il est tout de suite conquis par le système copernicien et par la personne du savant. Afin de faire connaître au plus vite la théorie de celui-ci, il en compose un abrégé qu'il adresse à son maître, Johannes SCHÖNER que celui-ci fit imprimer à Gdańsk en 1540 : c'est la fameuse «*Narratio prima*» [13]. Celle-ci connut un grand succès et déjà l'année suivante une nouvelle édition parut à Bâle. Depuis lors, le monde scientifique fut en possession des éléments de la nouvelle doctrine et les premières réactions furent publiées. Ainsi Érasme REINHOLD, professeur également à l'Université de Wittenberg, voyait en COPERNIC le restaurateur de l'astronomie. Il utilisait d'ailleurs la théorie copernicienne conjointement avec celle de PTOLÉMÉE pour calculer de nouvelles tables astronomiques qui furent publiées sous le titre de «*Tabulae Prutherricæ*» en 1552.

Finalement COPERNIC se laissa convaincre par son ami Tiedemann GIESE,

évêque de Chelmino, et fit publier son œuvre dont il reçut un exemplaire le jour même de sa mort, le 24 mai 1543. RHETICUS avait initialement pris soin de l'impression de l'ouvrage, mais confia par la suite à son ami Andreas OSIANDER, un théologien luthérien, la surveillance de celle-ci. Se rendant compte que la théorie nouvelle était évidemment contraire aux Écritures, celui-ci imagina dès 1541 une solution qu'il croyait fort élégante pour contourner les difficultés théologiques. Il présenta la théorie copernicienne comme une théorie purement phénoméniste de l'astronomie et fit précéder l'œuvre de COPERNIC par une préface non signée qui disait : *«L'objet propre de l'astronomie, en effet, consiste à rassembler l'histoire des mouvements célestes à l'aide d'observations diligemment et artificieusement conduites. Puis, comme aucun raisonnement ne permet à l'astronome d'atteindre aux causes ou aux hypothèses véritables de ces mouvements, il conçoit et imagine des hypothèses quelconques, de telle manière que ces hypothèses une fois posées, ces mêmes mouvements puissent être exactement calculés, au moyen des principes de la Géométrie, tant pour le passé que pour l'avenir ... Il n'est pas nécessaire que ces hypothèses soient vraies ; il n'est même pas nécessaire qu'elles soient vraisemblables ; cela seul suffit, que le calcul auquel elles conduisent s'accorde avec les observations.»* [14] Un peu plus loin, OSIANDER écrit concernant la méthodologie astronomique : *«Il est bien évident que cette science ignore purement et simplement les causes des inégalités des mouvements apparents. Les causes fictives qu'elle conçoit, elle les conçoit pour la plupart comme si elle les connaissait avec certitude ; jamais cependant, elle ne les conçoit en vue de persuader qui que ce soit qu'il en est ainsi dans la réalité, mais uniquement en vue d'instituer un calcul exact. Il peut arriver que des hypothèses différentes s'offrent à celui qui veut rendre compte d'un seul et même mouvement ; tels l'excentrique et l'épicycle en la théorie du mouvement du Soleil ; alors l'astronome prendra de préférence l'hypothèse qui est la plus aisée à saisir.»* [14]

Cet exposé extrêmement curieux du point de vue de l'histoire de l'astronomie, fut très sévèrement jugé par les amis de COPERNIC, sans que pour autant il fut retiré de l'édition. COPERNIC lui-même s'en soucia très peu. Il avait fait adjoindre à l'édition de son ouvrage la lettre que lui avait écrite le Cardinal DE CAPOUE et il avait dédié son livre au pape PAUL III. Dans sa lettre-dédicace, COPERNIC explique pourquoi il avait entrepris l'élaboration d'une nouvelle théorie des mouvements planétaires et se réfère surtout au désaccord régnant entre les mathématiciens et la multiplicité des systèmes astronomiques qui lui fit penser que les *«mathématiciens»* avaient soit négligé quelque principe essentiel, soit au contraire, introduit dans leurs constructions quelque principe inutile. Il croyait donc à une erreur commise par ses prédécesseurs et assure avoir lu tous les écrits des philosophes traitant cette question. Il découvrit que certains parmi eux croyaient au mouvement de la Terre et il prit le courage d'essayer lui-même cette hypothèse. COPERNIC dit avoir trouvé que celle-ci donna une explication meilleure des phénomènes célestes, et qu'en outre on obtenait ainsi un Univers parfaitement ordonné. Un autre mobile, non moins important, fut qu'il pouvait ainsi supprimer l'emploi de l'équant ptoléméen et rester fidèle

au principe du mouvement circulaire, le seul vrai pour un platonicien.

Le «*De revolutionibus*» se compose de six livres qui traitent les matières en suivant, dans l'ensemble, l'ordre adopté par PTOLÉMÉE dans «*L'Almageste*». Le LIVRE PREMIER présente la description cosmologique générale du monde et les fondements physiques sur la base desquels COPERNIC entreprend de sauver les apparences et de rendre compte de toutes les observations connues. A la fin du LIVRE PREMIER, COPERNIC donne également un aperçu des notions de trigonométrie qu'il utilisera dans la suite de son ouvrage. COPERNIC s'avère être un mathématicien plus faible que PTOLÉMÉE et les astronomes arabes du Moyen Âge, et du côté technique ses calculations numériques laissent beaucoup à désirer. Tout le LIVRE II est consacré aux problèmes mathématiques de l'astronomie sphérique. Il contient de plus un catalogue des étoiles fixes établi par lui. Le LIVRE III traite du mouvement apparent du Soleil. Le quatrième traite du mouvement de la Lune et de la théorie des éclipses. Les deux derniers livres sont consacrés à la théorie des planètes et à leurs mouvements en longitude et en latitude.

La démarche critique de COPERNIC est exposée dans le LIVRE PREMIER dont A. KOYRÉ a fourni une édition commentée [9]. Les quatre premiers chapitres restent docilement dans le giron aristotélicien. COPERNIC rappelle que les astres sont sphériques et que la Terre aussi est sphérique pour postuler que tous les astres sont animés de mouvements circulaires. Le cinquième chapitre pose la question si «*un mouvement circulaire convient-il à la Terre ?*» [9]. COPERNIC répond alors : «*Il a été démontré déjà que la Terre a la forme d'un globe ; j'estime qu'il faut examiner maintenant si un mouvement suit également de sa forme et quel est le lieu qui lui revient dans l'Univers ... Certes il est admis ordinairement parmi les auteurs que la Terre est en repos au centre du monde, de telle façon qu'ils estiment insoutenable et même ridicule de penser le contraire. Si cependant nous examinons cette question avec plus d'attention, elle nous apparaîtra comme nullement résolue encore et partant, aucunement méprisable.*» [9]. Un peu plus loin, COPERNIC donne une explication du mouvement relatif : «*Si donc quelque mouvement appartient à la Terre, celui-ci apparaîtrait en toutes les choses qui lui sont extérieures, comme si elles étaient entraînées avec la même vitesse, mais en sens contraire ; et telle est en premier lieu la révolution diurne. Celle-ci, en effet, semble entraîner le monde entier, à l'exception de la Terre et des choses qui sont près d'elle. Or, si l'on admettait que le ciel ne possède rien de ce mouvement, mais que la Terre tourne de l'Occident en Orient, et que l'on examinât sérieusement ce qui en résulterait par rapport aux lever et coucher apparents du Soleil, de la Lune et des étoiles, on trouverait qu'il en est ainsi.*» [9] Au chapitre six, COPERNIC montre alors que la géométrie ne résout pas la question du mouvement de la Terre et que la démonstration ptoléméenne de l'immobilité de celle-ci est fausse. Aux chapitres suivants, sept et huit, COPERNIC affirme que la physique aristotélicienne ne tranche pas non plus. Il explique d'abord que le mouvement naturel de la Terre entraîne non seulement l'élément aqueux qui lui est étroitement conjoint mais encore une portion considérable de l'air, et ceci sans résistance aucune.

COPERNIC parle ensuite de la rotation terrestre et explique que le même mouvement naturel préserve les choses terrestres de se disperser. Il s'attaque alors à PTOLÉMÉE et lui demande, puisqu'un mouvement est d'autant plus rapide que le corps mû est grand, s'il ne craint pas que la sphère des étoiles fixes pourrait se dilater à l'infini parce qu'au-delà de cette sphère plus rien ne puisse retenir les cieux. Au chapitre neuf, COPERNIC prend ARISTOTE à son propre piège, puisque celui-ci avait imprudemment affirmé que si la Terre avait un mouvement, elle pourrait en avoir plusieurs. Or, puisque COPERNIC vient de lui prêter la rotation sur elle-même, il faut admettre pour conclure que la Terre est animée de trois mouvements et que l'ordre des orbes n'est pas celui que l'on croit.

Chez COPERNIC, l'Univers s'harmonise. Au centre il y a le Soleil, puis viennent Mercure, Vénus, la Terre ramenée au rang d'une simple planète, Mars, Jupiter et Saturne. Le monde se termine par la sphère des étoiles fixes dont COPERNIC ne dit point la distance, mais qu'il estime beaucoup plus vaste que celle du cosmos de l'Antiquité comme l'atteste l'absence de parallaxe annuelle. COPERNIC explique dans son système héliocentrique les stations et les rétrogradations des planètes par le jeu de leurs mouvements avec ceux de la Terre. Dorénavant toutes les planètes ont le même statut cosmologique. Mais le système copernicien n'est pas si simple qu'on le croit à première vue. S'il reproche à PTOLÉMÉE la multitude presque infinie des cercles et des orbes, son système en restait largement pourvu également. Ainsi la Terre, à elle seule, en a huit. Les autres planètes en possèdent également un nombre considérable. En effet, le simple transfert du centre des mouvements de la Terre au Soleil, si l'on s'en tient à une seule planète, n'apporte aucun gain : le mouvement orbital de la Terre remplace uniquement le mouvement de la planète sur son épicycle. L'économie en mouvements et en cercles n'apparaît que lorsqu'on envisage l'ensemble du système solaire, alors le mouvement terrestre remplace à lui seul tous les mouvements épicycliques. Mais comme le mouvement de la Terre est contrebalancé par l'immobilité du Soleil, ce gain n'est que de cinq épicycles ou mouvements. Il est vrai que l'obstination de COPERNIC d'admettre seulement des mouvements circulaires uniformes, comme nous allons voir, oblige celui-ci à introduire un épicycle supplémentaire, que KEPLER va supprimer en réintroduisant la possibilité de mouvements circulaires non uniformes. Il faut encore souligner une difficulté du système copernicien vis à vis du système de PTOLÉMÉE. En effet, la détermination du lieu apparent d'une planète demande d'abord de déterminer son lieu héliocentrique, puis le calcul du lieu héliocentrique de la Terre, et ce n'est qu'à partir de la différence des lieux qu'on arrive à déterminer le lieu apparent de la planète vu de la Terre.

Jetons maintenant un coup d'œil plus détaillé sur l'organisation cinématique du système copernicien [15]. Celui-ci peut être caractérisé comme étant «*excentro-épicyclique*». COPERNIC utilise pour toutes les planètes, à l'exception de la Lune, un orbe excentrique ou déférent qui porte un épicycle unique. Le Soleil ne se trouve donc pas aux centres des orbes planétaires.

Le mouvement annuel de la Terre se fait sur un cercle dont le centre est formé

par le Soleil moyen. L'excentricité par rapport au Soleil vrai est de $R/26,46$ avec R comme rayon de l'orbe terrestre. La Terre est animée d'un mouvement uniforme autour du Soleil moyen. L'angle apparent de la distance du Soleil moyen au Soleil vrai, vu de la Terre a une valeur maximale de $2^{\circ}10'$. A ce mouvement en longitude de la Terre, s'ajoute un mouvement en déclinaison, afin de tenir compte du fait que celle-ci est supposée être enchâssée dans un orbe cristallin. Ce mouvement est censé expliquer en même temps la précession des équinoxes.

La description du mouvement en longitude des planètes inférieures s'avère assez difficile dans le système de COPERNIC et beaucoup moins adaptable que dans celui de son prédécesseur. En effet, ces deux planètes se meuvent sur un orbe excentrique mobile dont le centre est porté par un petit cercle déférent qui se meut dans la même direction que la Terre avec une vitesse angulaire double. Le mouvement des orbes est réglé de manière telle que, lorsque la Terre se trouve sur un point des apsides, le centre de l'excentrique mobile se trouve sur cette même ligne.

Dans le cas de Mercure, COPERNIC a dû encore ajouter une oscillation de la planète sur une ligne transportée par l'orbe excentrique mobile et normale à celui-ci. Le mouvement de la planète sur cette ligne est périodique avec le mouvement annuel de la Terre. COPERNIC arrive à décomposer ce mouvement périodique en deux mouvements circulaires dans lequel un petit cercle roule sur la circonférence d'un cercle plus grand. Il décrit ainsi un mouvement hypocycloïdal, qui pour un rapport des cercles en question de un à deux, dégénère en une droite.

Les mécanismes des mouvements des planètes supérieures sont plus simples et COPERNIC n'a besoin que d'un seul épicycle. En partant de l'orbe terrestre, dont le centre n'est pas le même que celui de l'orbe de la planète, COPERNIC définit cet épicycle dont le rayon vaut un tiers de la distance des centres des orbes de la Terre et de la planète. L'épicycle et le déférent tournent dans le même sens et avec la même vitesse angulaire. La trajectoire réelle de la planète ressemble de cette façon à un cercle.

Seul le mouvement de la Lune est modélisé à l'aide de deux épicycles. Le centre du premier épicycle, tournant dans le sens contraire à l'orbe de la Terre, est animé d'un mouvement uniforme autour de la Terre, et l'angle de la longitude moyenne croît de $360'$ en un mois sidéral. La Lune elle-même se meut sur un second épicycle dont le centre tourne sur le premier. La vitesse angulaire de la Lune sur le second épicycle est de deux révolutions en un mois synodique. Ce modèle, utilisé par COPERNIC, est identique à celui de l'astronome arabe IBN AL-SHATIR du XIV^e siècle [16]. La question reste ouverte si COPERNIC avait connaissance de cette théorie ou s'il s'agit d'une découverte autonome.

Cette courte description du système copernicien rend compte que ce n'est pas dans la diminution du nombre des mouvements célestes que consiste la grande supériorité de son système mais plutôt dans l'uniformisation, la régularisation et la systématisation, dans l'explication de l'irrégularité des mouvements apparents, avec leurs ralentissements, stations, rétrogressions dus au

mouvement de l'observateur lui-même, dans la substitution d'une réalité beaucoup plus systématique et beaucoup mieux ordonnée aux mondes incohérents d'ARISTOTE et de PTOLÉMÉE.

Mais malgré sa vision révolutionnaire, COPERNIC est resté fermement ancré dans la tradition des Anciens. Dans le *«De revolutionibus»*, on ne trouve pas de démonstration probante de son système. Le Soleil occupe le centre du monde tout simplement parce qu'il est l'astre le plus beau. Et à travers les six livres de son œuvre, COPERNIC reprend les axiomes de la physique d'ARISTOTE et les vues cosmologiques des Anciens : il revient aux épicycles et reprend la vieille complication ptolémaïque, excepté que cette fois le Soleil se trouve au centre du monde. Mais c'est précisément cela qui est l'essentiel, le reste étant des détails de mise au point. Malgré certaines déficiences, malgré certaines erreurs, COPERNIC reste l'homme qui, contre le sentiment général, a eu l'audace de proclamer que la Terre ainsi que l'écrivait Tycho BRAHE, *«court dans l'éther sublime»*.

—III—

OR CET ASTRONOME, un des plus grands observateurs de tous les temps, refuse le système de COPERNIC. La précision de ses observations, qui est de deux minutes d'arc pour la position des astres, est dix fois plus exacte que celle de HIPPARQUE ou de COPERNIC. Et elle est à la base de son refus.

Abusé par la diffusion des images stellaires sur la rétine, il affecte des diamètres apparents aux étoiles qu'il classe alors en plusieurs grandeurs. Aux étoiles les plus brillantes, il a attribué un diamètre de 120 secondes d'arc, alors que celles de deuxième grandeur ont un diamètre de 90 secondes. Ce diamètre apparent diminue pour les étoiles moins brillantes. Comme le diamètre apparent des étoiles les plus brillantes est justement la précision moyenne de ces observations de position, il cherche à déterminer la parallaxe des dites étoiles, or il ne mesure aucun déplacement perspectif. La conclusion pour lui est claire : si le diamètre apparent de l'orbite terrestre, vu des étoiles les plus brillantes, est plus petit que le diamètre apparent de ces étoiles, c'est que le diamètre réel des étoiles est plus grand que le diamètre de l'orbite terrestre. Or cette conclusion, Tycho BRAHE la refuse.

Ainsi, dans les années qui suivent la parution du *«De revolutionibus»*, le nouveau système ne fait pas l'unanimité, ni des praticiens de l'astronomie, ni des astrologues, et se trouve exposé au jugement des théologiens, des philosophes et des érudits, qui, lui aussi est loin d'être unanime.

Tycho BRAHE est né le 14 décembre 1546 à Kundstrup, localité alors en terre danoise, dans une famille noble très liée aux affaires de l'État. Tycho, enfant précoce étudie d'abord à Copenhague puis à Leipzig et se voue à la science des astres. Après avoir terminé ses études, Tycho BRAHE, comme beaucoup

de jeunes nobles de son temps, se consacre aux voyages. Ceux-ci le mèneront à travers l'Allemagne jusqu'à Bâle et Augsbourg. Lors de ces déplacements, il rencontre des astronomes de renom. Ces rencontres lui permettent de parfaire ses connaissances en astronomie et il commencera très tôt à faire ses premières observations, encore avec des moyens de fortune. La première date du temps où il avait dix-sept ans. Il observe alors le rapprochement de Jupiter et de Saturne. La conjonction a eu lieu le 17 août et l'écart observé de celle-ci avec le moment calculé d'après les tables alphonsines était de près d'un mois, d'après les tables pruténiques, de quelques jours. Ces désaccords le choquent et il est un de ceux qui plaident donner une importance plus grande aux observations. Il se met à acquérir des instruments et, en 1569, il commence à construire lui-même ses propres instruments. La santé de son père déclinant, il rentre au Danemark vers 1572. Le 11 novembre de cette même année, Tycho BRAHE remarqua une étoile plus brillante que Vénus au nord-ouest de Cassiopée. Signe des temps, il n'est pas le seul astronome à remarquer ce phénomène, ni le seul à en parler. Pourtant cette apparition était chose inouïe. Car si les archives extrême-orientales abondent en descriptions d'astres nouveaux, autant celles de l'Occident restent muettes sur ce type d'événements, avec la seule exception de la description de la supernova de 1054, qui deviendra plus tard la nébuleuse du Crabe. Parmi les astronomes qui virent la nova de 1572, il y avait Michaël MAESTLIN et Thomas DIGGES qui fut le premier à oser penser à l'espace au-delà de la sphère du monde des fixes. Tycho ne constata aucun déplacement entre la nouvelle étoile et le monde des étoiles fixes et ce fut pour lui l'occasion de publier son premier opuscule astronomique. Dans celui-ci, intitulé : «*De nova stella*» [17] qu'il publia en 1573, alors que l'étoile brillait encore, il décrit dans les moindres détails sa méthode d'observation. De cet écrit de Tycho BRAHE, le dogme aristotélicien de l'immuabilité des cieux au-delà de l'orbe lunaire en sort affaibli, même si le fait qu'il tienne la nouvelle étoile pour un miracle, affaiblit sa conclusion. Cinq années plus tard, l'apparition d'une comète donnera à Tycho BRAHE l'occasion de renouveler son exploit à la fois observationnel et iconoclaste.

Mais auparavant, BRAHE, auréolé de sa gloire, voyage à travers l'Europe, va à Francfort et à Bâle, retourne à Augsbourg et à Wittenberg, tout en passant par Venise, et vient se fixer à Cassel auprès d'un autre passionné de l'astronomie, le landgrave de la Hesse, GUILLAUME IV. Celui-ci fit l'intermédiaire entre Tycho BRAHE et le roi du Danemark, FRÉDÉRIC II, qui accepta de lui fournir un emplacement pour la construction d'un observatoire. Il lui offrit en 1776 l'île de Hveen pour y construire cet observatoire de ses rêves aux frais de l'État. Tycho restera vingt années à Uraniborg, où à côté de l'observatoire se trouvait une imprimerie, une papeterie, un laboratoire d'alchimie, des ateliers de fabrication et même ... une prison. C'est donc à Uraniborg que Tycho observa la grande comète qui fit son apparition le 13 novembre 1577. Il continua ces observations jusqu'à fin janvier 1578 et put déterminer sa longitude et sa latitude écliptiques. Il traça ainsi au jour le jour le chemin de la comète parmi les étoiles fixes, notant en plus l'amplitude et l'orientation de la queue. En com-

parant ses observations avec les résultats d'autres astronomes, il peut montrer que cette comète n'était pas un phénomène sublunaire, comme le voulait ARISTOTE, mais que sa distance à la Terre dépassait au moins six fois celle de la Lune à la Terre.

Le cosmos n'était donc pas immuable et cette «vérité» s'avérait être un a priori métaphysique sans aucune réalité physique. Plus encore, cette nouvelle situation ranima le débat sur les sphères cristallines, donc sur la substance même des cieux, et provoqua finalement l'élimination de ce concept. Cet abandon marque une étape importante de la pensée cosmologique et ouvre la voie aux véritables recherches sur les trajectoires des astres et sur les forces qui entretiennent leurs mouvements. Il introduit en quelque sorte les lois de KEPLER et de la mécanique céleste. C'est Tycho BRAHE et lui seul, qui fut le pionnier de l'élimination des sphères corporelles dès 1577.

Tycho BRAHE publie son traité sur la comète en 1578 [17]. Il évalue la distance de la comète à 230 rayons terrestres au moins, ce qui, si l'on adopte la cosmologie de PTOLÉMÉE, la situe dans la sphère de Vénus. N'étant plus convaincu de l'existence des orbes célestes, mais ayant des scrupules d'ordre religieux quant au système héliocentrique introduit par COPERNIC, il rejette celui-ci et propose son propre système, dans lequel les planètes accompagnent le Soleil dans sa révolution autour de la Terre redevenue immobile au centre de l'Univers et contournée par le Soleil avec les planètes. Ce système, qui avait déjà été proposé par APOLLONIUS, permettait de sauver les apparences et affirmait les récits bibliques. Tycho le présenta dans son traité : «*De mundi ætheri recentioribus phænomenis*» [17] de 1588 où il déclare aussi que les orbes solides n'existent pas : «*Je montrerai à la fin de mon ouvrage, principalement à partir du mouvement des comètes, que la machine du ciel n'est pas un corps dur et impénétrable rempli de sphères réelles comme cela a été cru jusqu'à présent par la plupart des gens. Je prouverai que le ciel s'étend dans toutes les directions, parfaitement fluide et simple, sans présenter nulle part le moindre obstacle, les planètes circulant librement dans ce milieu, gouvernées par une loi divine en ignorant la peine et l'entraînement des sphères porteuses.*» [12]

Si le traité tychonien de 1588 affiche clairement sa conception cosmologique, les historiens de l'astronomie ont de la peine à dater sa «conversion». Il avait une correspondance suivie avec Christophe ROTHMANN, mathématicien du landgrave de la Hesse qu'il connaissait bien, et auquel il affirma avoir adopté le nouveau concept de l'abandon des orbes depuis de nombreuses années. Or certains historiens pensent que c'était plutôt ROTHMANN qui a eu l'idée de la dissolution des orbes dans son traité sur la comète de 1585 et que Tycho BRAHE l'a reprise après avoir lu l'ouvrage de ROTHMANN.

Si donc un doute subsiste sur la paternité de l'idée de la dissolution des orbes cristallines, il y a encore une obscurité plus grande quant à la génération du système cosmologique tychonien. Ainsi J.-P. VERDET [12] relate la découverte de trois copies du «*De revolutionibus*» copernicien qui ont été annotées de la même main et qui fut, avec une très grande probabilité, celle de Tycho BRAHE. Or une de ces copies contient des dessins datés de janvier et février

1578, alors que Tycho a déclaré en 1588 que les premières moutures de son système remontaient à 1583! S'il y avait déjà confusion quant à la date exacte de la genèse du système tychonien, la découverte d'une quatrième copie à la bibliothèque de l'Université d'Édimbourg et qui appartenait à l'astronome Paul WITTICH sème définitivement le doute quant à la vraie paternité du système de Tycho BRAHE. En effet cette copie contient les mêmes annotations que l'une des trois premières, sauf qu'elle stipule que c'est bien WITTICH qui a inventé le système hybride portant le nom de Tycho. Il s'ensuit que Tycho BRAHE aurait, au mieux, mis au point son système géo-héliocentrique à partir d'une idée de WITTICH qui fit un bref séjour à Uraniborg en 1580.

L'année de la publication du traité tychonien : «*De mundi ætheri*» est aussi l'année de la mort du protecteur de Tycho, FRÉDÉRIC II. Avec son successeur, CHRISTIAN IV, les relations se détérioraient bientôt et Tycho BRAHE quitte Uraniborg vers Pâques 1597. Après deux années d'errance à travers l'Europe du Nord et l'Allemagne, il arriva à Prague et obtint de l'empereur RODOLPHE II DE HABSBOURG la charge de mathématicien impérial. Il résida depuis lors au château de Benatky au nord-est de Prague et c'est ici qu'eut lieu la rencontre la plus étonnante et la plus fructueuse de l'histoire de l'astronomie : celle de Tycho BRAHE et de Johannes KEPLER.

Celui-ci arriva à Benatky le 3 février 1600 et se retrouva au sein d'une équipe intéressée à l'orbite de la planète Mars. LONGOMONTANUS, premier assistant de Tycho, chercha à déterminer, à partir des observations accumulées à Uraniborg, l'orbite de la planète. Bientôt KEPLER se faisait remarquer et proposa des modifications dans les calculs en adoptant, non pas le Soleil moyen, mais le Soleil vrai comme base de départ. Tycho tint compte des idées de son nouvel assistant et procéda à une redistribution des tâches dans l'équipe. Il confia l'étude de Mars à KEPLER et celle de la Lune à LONGOMONTANUS. En effet, Tycho avait vite reconnu les aptitudes exceptionnelles pour le calcul chez KEPLER et il espérait que celui-ci arriverait à intégrer l'orbite de Mars dans son système. Il réitéra ce désir encore sur son lit d'agonie en 1601. KEPLER tint en partie parole dans son «*Astronomia nova*» [18] qui traite des orbites ptoléméennes, coperniciennes et tychoniennes, tout en n'omettant pas son propre système. Il est tragique que le système tychonien a été ruiné précisément par ce génial assistant de Tycho et cela grâce à ses propres observations.

—IV—

IL Y AURAIT sans doute quelque exagération à prétendre que l'œuvre de GALILEI soit centrée principalement sur des préoccupations cosmologiques, mais il n'en reste pas moins vrai que celles-ci jouent un rôle de toute première importance dans sa pensée et ses études, et que dès sa jeunesse, dès son traité «*De motu*» ébauché encore à Pise, il se pose des problèmes qui ne prennent leur sens

plein et entier qu'en fonction de la conception copernicienne de l'Univers. Et GALILEI a conscience que la physique, qui devra remplacer celle d'ARISTOTE, naît dans les cieux autant que sur la Terre [19] et se présente donc comme solidaire d'une entreprise astronomique, voire cosmologique. Les œuvres de GALILÉI, le «*Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*» [20] et «*l'Essayeur*» [8] sont tout d'abord des œuvres coperniciennes et la physique de GALILEI est une physique copernicienne, physique qui doit défendre l'œuvre du grand astronome — le mouvement de la Terre — contre les objections anciennes et les attaques nouvelles [6].

Dans le contexte qui nous préoccupe ici, nous n'allons pas nous pencher sur les péripéties biographiques et la position symbolique de sa personne, considérée par les uns comme représentant la science nouvelle contre l'obscurantisme théologique, par d'autres comme quelqu'un de gênant, fauteur de troubles, qui inventa à tout prix de nouvelles théories, qu'il n'arrivait pas à démontrer, ni logiquement, ni empiriquement. Nous n'allons pas non plus considérer l'entièreté de son œuvre, centrée surtout autour des questions de mécanique et de physique, mais nous allons nous concentrer sur ses contributions à l'astronomie et à leur place dans son œuvre.

Les réflexions sur l'astronomie chez GALILEI posent plusieurs ordres de problèmes :

- une catégorie de faits physiques nouveaux provoquent des réactions témoignant qu'ils ne s'accordent ni avec l'expérience quotidienne, ni avec les concepts qui régnaient jusque-là ;
- un problème philosophique où GALILEI tend à définir la signification exacte du terme «*nature*». Pour lui cette nature se laisse déchiffrer par l'expérience et la géométrie, les deux catégories primordiales qui servent encore aujourd'hui à l'exploration de la réalité ;
- la question fort débattue de savoir si toutes les théories astronomiques et physiques sont interchangeable et s'il suffit au mathématicien de sauver les apparences, étant bien entendu qu'aucune théorie ne serait vraie. Si c'est à la suite de la prise de connaissance du système copernicien que cette question a été posée, c'est seulement avec GALILEI qu'elle a pris toute son importance ;
- l'astronomie de GALILEI tend à une explication des phénomènes à partir des lois et principes de sa dynamique terrestre et cela avec des fortunes diverses. Elle vise ainsi à modifier profondément les rapports entre la science et la philosophie, tout en devenant la base des difficultés que GALILEI va rencontrer avec l'Eglise Catholique.

Il existe un décalage dans le développement des idées galiléennes entre celles concernant la physique et celles concernant l'astronomie. En réalité, l'astronomie de GALILEI est demeurée longtemps étrangère à sa physique et à sa dynamique. En effet la physique terrestre et l'astronomie ne se présentaient pas comme les étapes d'un unique itinéraire intellectuel ; c'étaient deux orientations bien distinctes, correspondant à des mondes différents et même opposés. Et à plus forte raison, il serait inexact de considérer la physique et la dynamique de

GALILEI comme une conséquence de son astronomie.

Les idées galiléennes concernant la dynamique terrestre avaient vu le jour avant l'année 1600. Certaines lettres à ses correspondants, écrites autour du début du siècle, révèlent que les lois des oscillations pendulaires et celles de la chute des graves lui étaient familières depuis longtemps. Dans les expériences et les lois qu'il avait déjà décrites se trouvaient, implicites ou explicites, les principes nouveaux de la dynamique comme la composition et la conservation des mouvements, ainsi que ceux de la relativité et de l'inertie [21]. La conception astronomique de GALILEI jusqu'en 1610 n'avait pas suivi la même évolution. Ses progrès dans cette science sont insignifiants et, à Padoue, il n'enseigne même pas le système de COPERNIC, mais il se contente de faire connaître à ses étudiants la «*Sphère*» de SACRO BOSCO, c'est-à-dire l'astronomie officielle et banale de toutes les universités. Or le système de COPERNIC n'était pas interdit, comme le remarque L. GEYMONAT [22]. Il est donc difficile de s'expliquer le désintérêt total de GALILEI jusqu'à l'année 1610, qui se transforme alors subitement en un engagement sans limites.

Le revirement est dû sans doute à l'intérêt que GALILEI prend au télescope, qui devient entre ses mains un instrument d'observation, appelé à modifier les apparences, à transformer la vision des choses à travers laquelle il pourra mettre en cause les principes a priori sur lesquels la science officielle se fondait. Dorénavant l'astronomie trouva un point d'appui dans les méthodes expérimentale et mathématique que GALILEI prônait.

D'après ses propres déclarations, c'est au cours d'une visite à Venise que GALILEI entend parler pour la première fois en mai ou en juin 1609 des lunettes mises au point en Hollande. Après son retour à Padoue, il arrive à construire dans son atelier un exemplaire qui agrandissait trois fois. Quelques mois après, il arrive à mettre au point une lunette agrandissant huit ou neuf fois. Le Sénat de Venise est impressionné par une démonstration qui fait ressortir la puissance de l'instrument : depuis le campanile de Saint-Marc, on peut voir distinctement la coupole de l'église Sainte-Justine-de-Padoue, et les navires qui s'approchent de Venise apparaissent deux heures plus tôt qu'à l'œil nu. GALILEI fait don aux Vénitiens de son instrument, dont il souligne l'importance pour les affaires tant terrestres que maritimes. A ce moment, il ne songe encore guère à l'utilisation astronomique de sa lunette. C'est en novembre 1609 qu'il fabrique une lunette qui agrandit vingt fois, et c'est à partir de ce moment qu'il commence à examiner systématiquement les corps célestes. Le mois de décembre est consacré en premier lieu à l'observation de la Lune. Il expose ses premiers résultats dans une longue lettre envoyée en Toscane, où GALILEI avait renoué les contacts, et dont le destinataire était probablement Antoine de Médicis. Cette description de la Lune est accompagnée de plusieurs dessins. Il y dit que *«l'on voit que la Lune n'est pas d'une surface égale, lisse et polie, comme beaucoup de gens le croient d'elle comme des autres corps célestes, mais au contraire qu'elle est rugueuse et inégale et qu'en somme elle se montre telle que, d'un raisonnement sain, on ne peut conclure autrement qu'en disant qu'elle est pleine d'éminences et de cavités, semblables, bien que beaucoup plus grandes, aux monts et aux*

vallées qui sont disséminés sur la surface de la Terre.» [23]

A la fin de cette lettre, GALILEI déclare qu'il découvre sans cesse des étoiles nouvelles, et le jour de la rédaction de la lettre citée, il voit pour la première fois les satellites de Jupiter, qu'il va observer de janvier à mars de l'année 1610. L'impression du «*Messenger des Étoiles*» [24] se fait très rapidement : la dernière observation concernant Jupiter a été faite le 2 mars 1610. Après avoir obtenu le permis d'imprimer très rapidement, GALILEI peut envoyer un exemplaire de son petit traité de cinquante-trois pages, accompagné d'une lunette au Grand-Duc de Toscane le 19 mars déjà. La publication du «*Messenger des Étoiles*» révèle alors à toute l'Europe savante l'inégalité de la Lune, l'existence d'un nombre inouï d'étoiles invisibles à l'œil nu, notamment dans la voie lactée, ainsi que le fait que Jupiter possède quatre satellites.

La publication de l'opuscule galiléen n'aboutit pas seulement à la divulgation de résultats scientifiques, mais aussi au don symbolique des «*planètes médicéennes*» à COSME DE MÉDICIS. L'acte même de ce don produit un effet persuasif qui rejaillit sur l'objet donné plus qu'il implique, chez le donateur, la certitude de la valeur de ce qui est offert et de l'immanquable reconnaissance publique de cette valeur. Mais GALILEI veut aussi monnayer en quelque sorte ce don en briguant le retour à Florence avec le titre de philosophe et mathématicien du Grand-Duc, poste qu'il obtient finalement le 10 juillet 1610.

Le «*Messenger des Étoiles*» commence par un résumé des découvertes, qui constitue en même temps une introduction attirant l'attention sur l'importance des résultats qui vont être présentés. GALILEI enchaîne ensuite avec une présentation des matériaux et de la méthode, c'est-à-dire la description du télescope et son mode d'utilisation. Le traité s'achève par l'exposition des résultats accompagnée d'une discussion partielle réfutant certains points d'interprétations alternatives. En effet, GALILEI provoquait les défenseurs d'un Univers géostationnaire par son interprétation d'un phénomène qui s'observe même à l'œil nu : la lumière «*cendrée*» de la Lune, c'est-à-dire l'illumination grisâtre qui couvre la partie sombre juste avant et après la nouvelle Lune, et qui ne peut s'expliquer ni par la lumière propre de celle-ci, ni par un impact direct du Soleil. GALILEI donne alors l'explication que la Terre réfléchit les rayons solaires vers la Lune tout comme celle-ci les réfléchit vers la Terre. La lumière cendrée correspond donc à un «*clair de Terre*» sur la Lune, produit par une «*pleine Terre*» sur la Lune au moment de la «*nouvelle Lune*» sur la Terre. Celle-ci n'est donc nullement distincte du monde céleste car elle a un même pouvoir d'illumination que la Lune. Il n'y a donc pas de séparation entre la Terre et le ciel, tel que l'avaient postulé les défenseurs d'une représentation géocentrique du monde. De prime abord, GALILEI semble défendre avec son explication le système copernicien. Mais il entend donner plus, comme le prouve le ton quelque peu pathétique de son texte. Il ressent que pour beaucoup, c'était diminuer la dignité de l'homme en le chassant du centre du monde. La mise en cause de la vision ptoléméenne du monde risquait de se heurter à une attitude émotive. Et par son explication sur la lumière «*cendrée*», GALILEI voulait au moins diminuer une éventuelle résistance affective à l'acceptation du système copernicien en incorporant à l'ex-

position de ses découvertes une valorisation positive de la Terre et de l'homme dans un monde héliocentrique. GALILEI fait clairement allusion au thème de la dignité humaine. Au lieu d'être diminuée par une Terre chassée du centre de l'Univers, celle-ci serait accrue : la Terre n'est plus dorénavant le domaine bas de l'imperfection, de l'altération et de la corruption, séparé de la perfection immuable du ciel, mais participerait du mouvement des autres planètes au même rang qu'eux. GALILEI rapporte que son télescope révèle l'existence d'un nombre vertigineux d'étoiles jusqu'alors inconnues. La voie lactée et les nébuleuses ne correspondent nullement à des zones où la matière céleste est de densité différente, mais sont en fait des amas d'étoiles. «... *les Étoiles appelées par tous les astronomes jusqu'à ce jour nébuleuses sont des troupeaux de petites étoiles, semées de manière admirable.*» [24] Et l'observation télescopique des étoiles permettait, aux yeux de GALILEI, d'éliminer une des principales objections de Tycho BRAHE contre le système héliocentrique. En effet, le télescope magnifiait beaucoup moins les étoiles et les planètes que la Lune. La lunette permettait donc de corriger les données qui servaient de base de mesure à Tycho et supprimait une des objections principales de celui-ci. GALILEI écrit à ce propos : «*Ô Nicolas COPERNIC ! quel aurait été ton plaisir de voir confirmée cette partie de ton système grâce à des expériences si évidentes.*» [20]

Pour exposer la découverte des satellites de Jupiter, GALILEI passe de la description, forme qu'il avait employée jusqu'alors, à la narration, et son discours suit désormais l'ordre chronologique des observations. Et le choix du genre du récit pour l'exposition de sa découverte rappelle une préférence semblable affichée par KEPLER dans son «*Astronomia nova*» [18] de 1609, où il définissait, à propos de Mars, ses deux premières lois. Et tout comme celui-ci, GALILEI veut faire participer ses lecteurs aux cheminements de l'auteur, en incorporant dans l'exposition de la vérité inattendue, le temps et la rigueur de sa maturation. C'est le 7 janvier 1610 que GALILEI remarque pour la première fois trois nouveaux corps célestes dans le voisinage de Jupiter. Bien qu'il soit frappé que ceux-ci se trouvent en ligne droite, très proches les uns des autres, il ne prête pas une attention particulière à ce phénomène. Le jour suivant, en regardant de nouveau Jupiter, une anomalie apparaît : Jupiter se trouve maintenant à l'est des trois étoiles alors que la planète aurait dû se déplacer vers l'ouest. Il décide alors de continuer ses observations. Le 10 janvier, deux étoiles apparaissent maintenant à l'est de Jupiter, tandis que GALILEI suppose que la troisième est cachée par la planète. GALILEI se rend compte alors que ces corps célestes, changeant journallement de position tout en restant dans le voisinage de Jupiter, sont en réalité des satellites de cette planète, ceci d'autant plus qu'une quatrième étoile apparaît dans le voisinage. La découverte des satellites de Jupiter apporte pour GALILEI, la confirmation empirique qu'un des «*astres errants*», Jupiter, est le centre d'un système particulier. La Terre n'est donc pas le centre de tous les mouvements, mais il existe plusieurs centres dans l'Univers. Ainsi l'acquis principal du «*Messenger des Étoiles*» est bien doublement lié au copernicanisme, d'abord par l'analogie des mouvements des satellites joviens avec ceux de Mercure et Vénus autour du Soleil ; et ensuite l'hypothèse une fois

dûment confirmée, il corréle la possibilité d'un système physique du type exigé par l'héliocentrisme. Une preuve supplémentaire est fournie par les phases et les dimensions de Vénus : en effet, avec le télescope, non seulement sont visibles les phases de Vénus, mais s'observent encore de grandes différences entre une toute petite Vénus, quand elle est «pleine» et une Vénus immense quand elle est un mince croissant. Ces phénomènes sont déductifs dans le cadre du système de COPERNIC mais ils ne le sont pas dans le système de PTOLÉMÉE. Il est donc inexact de dire que tous les systèmes peuvent rendre compte des mêmes apparences. Et la réflexion galiléenne tend précisément à prévoir et à découvrir des apparences déductives mathématiquement et observables physiquement.

La controverse des taches solaires constitue un autre moment démontrant le génie de GALILEI. En effet, il commence à observer ce phénomène à partir de 1610 et il est bientôt suivi dans cette recherche par le père jésuite Christophe SCHEINER et une controverse épistolaire s'établit entre celui-ci, Marc WELSER, magistrat à Augsbourg, et GALILEI. Dès ses premières observations, GALILEI est persuadé que ces taches se trouvent à la surface du Soleil en rotation, fait nié d'abord par SCHEINER, qui pense que ces irrégularités tournent sur une orbite autour du Soleil. Toutefois GALILEI reste prudent dans ses affirmations. Ainsi dans une lettre du 12 mai 1612 à son ami Federico CESI, il écrit : «*Quant à ces taches, je conclus finalement et je crois pouvoir montrer nécessairement qu'elles sont contiguës à la surface du corps solaire où elles s'engendrent et se dissolvent continuellement à la manière justement des nuages autour de la Terre ; qu'elles sont portées par le Soleil dans le tour qu'il fait sur lui-même en un mois lunaire, avec une révolution semblable à celles des planètes ...* » [25] Plus loin dans cette lettre, GALILEI dénonce sans ambiguïté aucune, la doctrine péripatéticienne de l'incorruptibilité des cieux.

C'est en mars 1613 que GALILEI publie grâce à l'Académie des Lincei son ouvrage sur les taches solaires sous le titre : «*Istoria e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti*» [26] avec la correspondance qu'il a échangée sur le sujet avec SCHEINER et WELSER. Par son argumentation, GALILEI pense avoir ruiné le dogme aristotélicien de l'incorruptibilité des cieux. Il infirme la division du cosmos en matière céleste et en matière terrestre, et prépare ainsi l'unification du cosmos qui sera achevée par NEWTON presque cent années plus tard. Mais GALILEI ressent aussi dans ses recherches un fort indice en faveur du système héliocentrique.

Beaucoup plus tard, en 1632, après bien des difficultés d'ordre théologique, GALILEI fait paraître le «*Dialogue des plus grands systèmes*» [20] qui représente quasiment la somme de ses idées sur la mécanique et sur l'astronomie. Le «*Dialogue*» prétend exposer deux systèmes astronomiques rivaux. Mais en fait, ce n'est pas un livre d'astronomie, ni même de physique. C'est avant tout un livre de critique, une œuvre de polémique et de combat ; mais c'est en même temps une œuvre philosophique. GALILEI choisit la forme littéraire du «*Dialogue*» et c'est contre la science et la philosophie traditionnelles que GALILEI monte sa machine de guerre dans la langue vulgaire. Et il veut persuader «*l'honnête homme*» et le convaincre. GALILEI change continuellement de style. Une fois il

utilise la discussion sereine qui cherche la preuve et tente de démontrer ; une autre fois, il tire tous les registres du discours éloquent qui veut persuader. Enfin, il n'a pas peur de la critique incisive et mordante, sans oublier de se servir de la moquerie et de la plaisanterie afin de rendre ridicules ses adversaires. Cette œuvre maîtresse de GALILÉE, en germe depuis la publication du «*Sidereus nuncius*», avait une signification profonde : elle rendait compte de l'effort de GALILÉE d'appliquer aux mouvements célestes les principes de la dynamique terrestre, tels qu'ils avaient été définis dans l'étude de la chute des graves. Avec le «*Dialogo*», GALILÉE a écrit un des tout grands livres de l'humanité.

—V—

GALILÉE et KEPLER étaient des contemporains, mais ils n'avaient guère d'intérêts spécifiques communs. Le premier, tout en adhérant au système copernicien, à tel point même qu'il risquait sa vie pour ses convictions, avait une vue plutôt simpliste du système héliocentrique. Tout en donnant avec le «*Sidereus nuncius*» et le «*Dialogo*» deux livres clé pour l'astronomie moderne, il restait surtout intéressé à la physique et la mécanique. Le deuxième se mutait d'un astrologue et astronome intéressé à la mystique en un calculateur savant, parvenant à énoncer les lois quantitatives du mouvement des planètes. Les deux hommes se sont connus et s'estimaient peut-être. Mais leur fréquentation se limitait à quelques lettres et en 1610, GALILÉE «*oubliait*» même de faire parvenir à KEPLER un exemplaire de son télescope. Il s'avère paradoxal que ce fut précisément ce dernier qui donna une théorie optique de la lunette que GALILÉE faillit à établir.

Si les premières lettres écrites faisaient état encore d'une complicité, leurs chemins divergeaient bien vite. Ainsi dans sa lettre du 4 août 1597, GALILÉE remerciait encore chaleureusement KEPLER de l'envoi de son premier livre, le «*Mysterium cosmographicum*» [27] et dit : «... rien certes ne m'est plus agréable que de trouver dans la recherche du vrai, un allié tel que toi, et à tel point ami de la vérité.» [28] Plus loin, dans la même lettre, il avoue que : «... depuis plusieurs années déjà, je me suis converti à la doctrine de COPERNIC, grâce à laquelle j'ai découvert les causes d'un grand nombre d'effets naturels dont il est hors de doute que l'hypothèse commune ne peut rendre compte.» [28] Il s'excuse ensuite parce qu'il n'ose pas publier les résultats de ses recherches par crainte d'être poursuivi. «*Sans doute m'enhardirais-je à produire au grand jour mes réflexions s'il y avait beaucoup d'hommes comme toi, mais il en est peu, j'aime mieux remettre à plus tard pareille entreprise.*» [28]

La réponse de KEPLER à cette lettre ne fait pas tarder, et elle est écrite le 13 octobre 1597. Dans sa lettre, il se montre honoré par la missive de GALILÉE et il l'invite à lui faire connaître son appréciation concernant ses écrits, même si celle-ci risquait d'être négative. Plus loin, KEPLER incite GALILÉE à porter

le flambeau de la science nouvelle, et il appelle à une association de tous ceux qui adhèrent aux idées progressistes [29].

Il n'y a pas eu de réponse à cette lettre invitante de KEPLER, bien qu'il y eût une copie d'une lettre de KEPLER à GALILEI datant de 1611 que celui-ci a joint à sa lettre à Filippo SALVIATI du 22 avril 1611. Dans celle-ci, KEPLER assure GALILEI de son soutien contre les attaques de Francesco SIZZI concernant le «*Sidereus nuncius*» que celui-ci a publié dans un petit traité dédié au grand-duc de Toscane.

Même si dans cette lettre, KEPLER avait promis une suite de son évaluation et du traité de SIZZI et des travaux de GALILEI, il n'y a guère plus eu de relations épistolaires, abstraction faite d'une lettre de recommandation datée du 27 août 1627, que GALILEI avait adressée à KEPLER et qui concernait G.-S. BOSSI de Milan. Nous ne connaissons pas de réponse de KEPLER à cette lettre et très probablement, il n'y eut plus de contact entre les deux hommes avant la mort de KEPLER en 1630. Leurs intérêts étaient vraiment trop divergents et empêchaient une amitié durable. Si GALILEI devint de plus en plus philosophe, KEPLER poursuivait sa carrière d'astronome.

Il devient en l'année 1600 assistant de Tycho BRAHE, ceci après avoir eu l'intuition géniale, mais fausse, sur l'harmonie du système solaire donné dans le «*Mysterium cosmographicum*» [27]. En effet, en 1595, KEPLER pensait que le nombre des planètes était dû au fait qu'il y avait cinq polyèdres réguliers en géométrie : «*L'orbe de la Terre est la mesure de tous les autres orbes. Circonscribui un Dodécaèdre, la sphère qui l'entoure est celle de Mars ; circonscris à l'orbe de Mars un Tétraèdre : la sphère qui l'entoure est Jupiter. A l'orbe de Jupiter, circonscris un Cube : la sphère qui l'entoure est Saturne. Place maintenant dans l'orbe de la Terre un Icosaèdre : la sphère qui lui est inscrite est Vénus ; place dans l'orbe de Vénus un Octaèdre : la sphère qui lui est inscrite est Mercure. Tu as là la raison du nombre des planètes.*» [27] Les sphères dont il s'agit chez KEPLER ne sont plus, bien entendu, les sphères solides de la cosmologie aristotélicienne, mais seulement des enveloppes sphériques dans lesquelles sont logés les orbes planétaires. Les orbes coperniciens ont disparu du ciel, détruits par Tycho BRAHE, comme nous l'avons vu. KEPLER ne dissimule pas que l'accord entre sa construction et les données astronomiques est très approximatif. En effet, l'emboîtement des corps les uns dans les autres ne tient guère compte de l'épaisseur des enveloppes dont il faut distinguer la sphère extérieure et la sphère intérieure. La première est inscrite dans le corps régulier immédiatement supérieur, la deuxième circonscrite au corps régulier immédiatement inférieur. La correspondance est donc loin d'être parfaite. Mais elle est trop significative pour être accidentelle. Et la constatation keplérienne contient en germe la question à laquelle il a consacré toute sa vie : Peut-on, à la longue, se contenter de purement constater la composition du mouvement planétaire et accepter la structure du système solaire comme un fait brut et dernier ? Ne faut-il pas, au contraire, chercher les lois qui déterminent cette structure et en expliquent, le cas échéant, sa stabilité ? La dynamique keplérienne est une réponse à cette question fondamentale et préfigure en même temps celle que donna NEWTON

quelques dizaines d'années plus tard.

Mais KEPLER en 1600, engagé par Tycho BRAHE, est encore à ses débuts. Celui-ci lui attribue la construction d'une théorie de la planète Mars à partir de ses observations. Ce problème paraissait simple de prime abord et la méthode à suivre était connue. Il fallait imaginer un mouvement excentrique à partir des lieux observés par Tycho, qui tenait le mieux compte de ceux-ci. Si l'on n'arrivait pas de façon satisfaisante, il fallait recommencer en introduisant un point équant. Le volume des calculs était très grand, d'autant plus que la théorie des logarithmes n'existait pas encore, mais KEPLER pensait venir à bout de ces difficultés en quelques mois. Or il n'en fut rien, et il s'écoula quelques années avant que KEPLER n'arrivât à donner une théorie de Mars donnant une exactitude de $2'$ entre les positions observées et celles calculées. Celle-ci attribuait à la planète un cercle excentrique avec une bissection de l'excentricité. Le centre du cercle excentrique étant C , le Soleil se trouve en S et le point équant A se trouve sur la ligne des apsides de façon que $CA/CQ = 0,072\,32$. Le rapport CS par rapport au rayon du cercle excentrique étant $0,113\,32$, l'aphélie est situé dans le signe du Lion à $28^\circ 48'55''$.

Si ce résultat avait dû satisfaire la plupart des astronomes, tel ne fut pas le cas pour KEPLER. Il se rendait compte que tous les lieux qu'il avait utilisés se situaient près de la ligne des apsides ou à environ 90° de celle-ci. Le contrôle d'autres positions situées à 45° ou à 135° révélait une erreur de $8'$. KEPLER accepte son échec et met en place une toute nouvelle méthode. Avant de continuer ses calculs concernant l'orbe de Mars, il détermine d'abord le mouvement de la Terre autour du Soleil. D'après COPERNIC, celui-ci se montre dans la deuxième inégalité planétaire et toutes les erreurs de la représentation de ce mouvement se feront ressentir dans les mouvements des planètes. En adoptant une idée géniale, consistant à rapporter l'observation de l'orbite de la Terre depuis un point fixe situé sur l'orbite de Mars, il arrive à montrer que le cercle excentrique sur lequel se meut la Terre possède, lui aussi, un point équant A . Il trouve $CA = CS$ et $CS/CQ = 0,018$, l'aphélie ayant une longueur de $95^\circ 30'$.

KEPLER saute alors une limite jusqu'alors infranchissable. Il abandonne définitivement l'axiome platonicien du mouvement uniforme sur des cercles parfaits pour s'intéresser davantage à la variation de la vitesse de la planète sur son orbe. Il montre d'abord qu'il y a une relation réciproque entre les vitesses dans l'aphélie et le périhélie et les distances au Soleil. Il établit ainsi une loi erronée concernant la dépendance des rayons et des vitesses. L'acquis de la théorie keplérienne à ce moment se résume ainsi [4] :

- les planètes se meuvent sur des cercles avec une excentricité bissectée. Dans un des points de la distance excentrique est placé le Soleil ;
- la vitesse linéaire d'une planète est inversement proportionnelle de sa distance au Soleil.

Mais dans son œuvre de 1609 : *«Astronomia Nova»* [18], KEPLER cherche à dépasser le concept purement cinématique pour introduire une vraie physique du ciel. Il veut découvrir non seulement les mouvements des planètes mais la cause de ceux-ci. Nous traiterons de ces réflexions keplériennes, fortement im-

prégnées de pythagorisme et de platonisme dans un chapitre ultérieur, consacré à sa théorie de la Lune et nous nous contenterons dans le présent contexte de commenter ses répercussions dans la description cinématique du système solaire.

KEPLER avait repris ses calculs de l'orbite martienne en se penchant encore une fois sur sa première théorie l'«*hypothesis vicaria*» qui deviendra d'abord son instrument de travail vu qu'elle donne des positions au moins approximatives. Il se rend compte que le problème fondamental de chaque théorie planétaire est l'établissement de tables, c'est-à-dire de pouvoir calculer la position pour un temps donné. A cette fin, il doit connaître la relation existant entre le temps du passage de la planète à travers l'aphélie et la grandeur de l'arc parcouru.

KEPLER cherche une solution approchée à ce problème. Il dit que la vitesse en un point P de l'orbite est inversement proportionnelle de la distance du Soleil S à ce point P . Le temps nécessaire à parcourir un arc très petit de l'orbite est donc proportionnel à PS . Si l'on choisit convenablement les unités, le temps parcouru est égal à la longueur du «rayon» PS . KEPLER se pose alors la question si le temps total d'aller de l'aphélie Q au point P , ne peut pas être représenté par la surface du «secteur» QSP comme étant la somme de tous ses rayons. KEPLER se réfère ici à ARCHIMÈDE, qui avait considéré la surface d'un secteur de cercle comme la somme de ses rayons, mais il sait pertinemment qu'il fait ici une extrapolation non démontrée et même théoriquement inexacte.

KEPLER se décide, malgré l'inexactitude lui connue, d'adapter la loi de la proportionnalité du secteur QSP et de la durée du temps de parcours de la planète depuis son passage à l'aphélie. Il entre ainsi en possession de sa deuxième loi qui, plus tard, sera le complément de la première, qui dit que les planètes se meuvent sur des ellipses dans lesquelles le Soleil se trouve dans un des foyers. KEPLER reprend cette même loi aussi quand il s'aperçoit que l'orbite d'une planète n'est pas un cercle excentrique, mais une ellipse. En désignant par β l'anomalie excentrique et par e l'anomalie moyenne, on obtient l'équation suivante pour le secteur QSP :

$$QSP = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}e \sin \beta \quad (1.1)$$

pour un rayon du cercle excentrique égal à l'unité et une excentricité $CS = e$. Si tout le cercle est parcouru en un temps T , l'on peut écrire :

$$\frac{t}{T} = \frac{\frac{1}{2}(\beta + e \sin \beta)}{\pi} \quad (1.2)$$

ou bien :

$$\beta + e \sin \beta = 2\pi \frac{t}{T} \quad (1.3)$$

Si l'on pose maintenant :

$$\beta + e \sin \beta = \alpha \quad (1.4)$$

l'anomalie moyenne remplace l'angle QAM de la première hypothèse keplérienne.

Or l'astronomie ne s'intéresse guère au temps parcouru lors duquel une planète occupe un lieu déterminé, mais plutôt au problème inverse, de trouver l'anomalie excentrique pour un temps t donné. Il faut donc déterminer β à partir de l'équation 1.3 connue sous la dénomination d'«*équation de KEPLER*». Cette détermination ne peut se faire que par itérations. Une fois β trouvé, la position de la planète se calcule à partir des formules :

$$\rho = \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \beta} \quad (1.5)$$

$$\rho \cos \nu = e + \cos \beta \quad (1.6)$$

ρ étant la distance du Soleil à la planète et ν l'anomalie vraie.

KEPLER avait bien abandonné l'axiome platonicien prescrivant des mouvements circulaires uniformes pour tous les corps célestes. En poursuivant ses calculs, il se voit obligé d'abandonner également le mouvement circulaire tout court. En effet, il est parvenu à déterminer une série de distances Mars-Soleil en fonction du lieu de la planète. Et il trouve chaque fois des valeurs différentes, de sorte que Mars ne peut se mouvoir sur un cercle. A l'aide de longs calculs, KEPLER veut trouver la différence de l'orbe vrai par rapport à un cercle. Il croit trouver que Mars se meut sur un ovale qu'il construit d'abord géométriquement. KEPLER tente alors de remplacer cet ovale par une ellipse dont le grand axe est situé sur la ligne des apsides, tandis que le petit axe donne la largeur de l'ovale. Après bien des détours, il reconnaît que le petit axe devrait être :

$$b = 1 - \frac{1}{2}e^2 \quad (1.7)$$

et cette valeur correspondait bien avec les observations. Finalement KEPLER arrive à déterminer les coordonnées de la planète P sur l'ellipse. L'abscisse du point P comptée à partir de l'emplacement du Soleil S devient :

$$SB = \rho \cos \nu = e + \cos \beta \quad (1.8)$$

tandis que l'ordonnée PB a comme valeur :

$$PB = \rho \sin \nu = b \sin \beta \quad (1.9)$$

La distance du Soleil à la planète devient alors :

$$\rho^2 = e^2 + 2e \cos \beta + \cos^2 \beta + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 \sin^2 \beta \cong (1 + e \cos \beta)^2 \quad (1.10)$$

en négligeant les termes d'ordre quatre. La distance du Soleil à la Planète est donc bien :

$$\rho = 1 + e \cos \beta \quad (1.11)$$

Les foyers de l'ellipse ont une distance du centre C de :

$$c^2 = 1 - b^2 - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 = e^2 \quad (1.12)$$

en négligeant encore une fois les termes du quatrième ordre.

Il reste encore à déterminer la loi des aires. On détermine d'abord la surface du secteur elliptique SQP qui est proportionnelle à celle du cercle SQA avec un facteur de proportionnalité b .

Secteur $SQP = b$, Secteur $SQA = b$ (triangle SCA + secteur QCA).

$$= b \left(\frac{1}{2} e \sin \beta + \frac{1}{2} \beta \right) = \frac{1}{2} b \alpha \quad (1.13)$$

α étant l'anomalie moyenne. La formule 1.13 donne finalement :

$$\frac{\text{secteur } SQP}{\text{ellipse}} = \frac{\frac{1}{2} b \alpha}{\pi b} = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{t}{T} \quad (1.14)$$

avec t le temps de parcours sur l'arc QP et T la période. Le secteur SQP est donc proportionnel au temps comme l'exige la loi des aires.

La théorie planétaire keplérienne est exprimée par les formules (1.4), (1.8) et (1.11). Pour un temps t , 1.4 permet de calculer β par itérations successives. Avec la valeur β la distance au Soleil est calculée avec (1.8). L'anomalie vraie est déterminée à l'aide de la relation (1.11). KEPLER a ainsi trouvé ses deux premières lois qui sont :

- les planètes se meuvent sur des ellipses et dont un foyer est occupé par le Soleil ;
- le rayon vecteur du Soleil à la planète balaye des surfaces égales pour des temps égaux.

Les deux premières lois keplériennes décrivent les mouvements de chaque planète. Dix années après leur publication en 1609, KEPLER a ajouté une troisième loi dans son livre : «*Harmonice mundi*» [30] paru en 1619. Tout en dissertant sur l'analogie entre les mouvements des planètes et les harmonies musicales, KEPLER introduit cette troisième loi comme un fait empirique trouvé sur la base des observations tychoniennes. Cette loi dit que les carrés des temps de révolution de deux planètes quelconques sont entre eux comme les cubes de leurs distances moyennes au Soleil. Pour l'astronomie, cette loi s'avérait être d'une extrême importance ; pour KEPLER, elle représentait la preuve irréfutable que le système planétaire peut être décrit à l'aide de la géométrie, c'est-à-dire qu'un ordre prévisible y règne.

Avec la déduction des dimensions du système planétaire, la détermination des mouvements des planètes et de la Lune, l'entreprise keplérienne est achevée en 1630. «*La route sur laquelle, il y a un quart de siècle, KEPLER s'était*

engagé avec toute l'ardeur de la jeunesse, route longue, difficile, pleine d'embûches, route dont il s'était si souvent écarté et sur laquelle il avait été toujours ramené par la sollicitude inhérente de la Providence Divine, a été parcourue jusqu'au bout. La pensée du mathématicien terrestre a rejoint la pensée de l'Artiste Divin; à l'esprit de la créature contemplatrice, l'Univers a révélé son λόγος.»
[15]

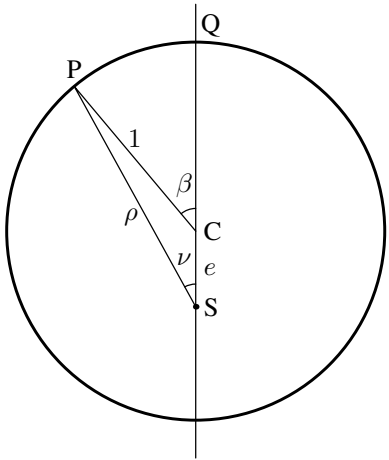


Fig. 1.1

Chapitre 2

Les «Principia» et la loi de la gravitation universelle

2.1 Newton — génie isolé et solitaire

BEAUCOUP de biographies de NEWTON existent, et il n'est donc guère nécessaire d'en ajouter une nouvelle dans le présent contexte. Le lecteur est renvoyé aux grands essais biographiques du XIX^e et du début du XX^e siècle [31, 32, 33, 34] pour une description quelquefois trop hagiographique de la vie et de l'œuvre du grand homme. Dans les dernières années, il y a bien eu la biographie très complète, quoique concentrée presque exclusivement sur les travaux scientifiques de NEWTON : «*Never at rest*» [35] de R.-S. WESTFALL. Le texte qui suit utilise aussi une description de la vie et de l'œuvre de NEWTON par Ivo SCHNEIDER [36], qui, elle, donne également une introduction à la philosophie de la nature newtonienne et décrit l'évolution du newtonianisme. Un livre très récent de J.-P. AUFRAY [37] met l'accent sur les travaux alchimiques de NEWTON et cherche à expliquer l'œuvre scientifique de celui-ci à travers ses intérêts fondamentalement alchimiques et théologiques. Nous puisons encore, pour ce qui suit, dans une quatrième étude biographique : celle de J. WICKERT [38] qui cerne la personnalité de NEWTON à travers une analyse psychologique et essaie de faire ressortir l'interdépendance de son œuvre scientifique et théologique avec sa constitution psychique.

Nous assistons ces dernières années à un intérêt toujours croissant pour la face cachée de cet exceptionnel génie scientifique qui, très jeune déjà, se posait des questions essentielles sur le monde et les choses qui peuplent celui-ci. NEWTON croit avoir trouvé une réponse qui se veut avant tout religieuse : Dieu le Père, à jamais insaisissable, est présent «*partout et toujours*». Il se révèle par la bouche des prophètes, se devine dans les arcanes de l'alchimie, se manifeste par les lois admirables qui règlent le cours ordinaire des choses. Ses écrits de l'ombre en attestent : NEWTON est constamment inspiré par la vision

globale d'un monde animé par l'invisible, mais cette vision, il la sacrifie pour écrire mathématiquement sa théorie de la gravitation universelle [39].

Nous allons nous contenter dans ce chapitre de rappeler les dates-clés de la vie de NEWTON, tout en les mettant en rapport avec ses œuvres, en premier lieu les «PRINCIPIA», la théorie de la gravitation universelle, et subsidiairement le problème des trois corps, respectivement la théorie de la Lune. Nous tenterons également d'expliquer les intérêts scientifiques de NEWTON dans ces domaines par sa vue du monde et de prouver que, loin d'aspirer seulement à une explication purement positive des faits, NEWTON chercha une compréhension profonde de la réalité.

NEWTON est né à Woolsthorpe le jour de Noël de l'année 1642, la même année qui vit la mort de GALILEI. En 1661, il entre au Trinity College de Cambridge, «*Scholar*» en 1664, il obtient le titre de «*Bachelor of Arts*» l'année suivante.

Même si NEWTON est entré à Cambridge par «*la petite porte*» en qualité de «*Subsizar*», qui devait servir de valet aux étudiants fortunés, il possède certains avantages vis-à-vis de ses condisciples. Ainsi il lit, écrit et parle couramment le latin, connaissance qui lui permet d'aborder à la fois la littérature scientifique, mais aussi les livres théologiques. De plus, il est fort méthodique et studieux, annotant et commentant ses lectures dans des cahiers de notes, ainsi que dans le fameux «*waste book*». Ces documents constituent les sources les plus importantes pour comprendre la vie et les études du jeune NEWTON. Nous savons ainsi qu'il a médité sur KEPLER, qu'il a lu l'optique d'EUCLIDE, mais aussi le «*Dialogue*» de GALILEI. Bien entendu, il s'est familiarisé avec les œuvres de PLATON et d'ARISTOTE. Une expérience très importante pour NEWTON fut la lecture du «*Discours de la Méthode*» de DESCARTES avec ses trois annexes : «*La Dioptrique*», «*Les Météores*» et «*La Géométrie*» [48]. Il se procure ensuite, dans les traductions latines disponibles, les «*Meditationes de prima philosophia*» et les «*Principia philosophiæ*» du philosophe français. DESCARTES représente, ainsi à Cambridge, la nouvelle philosophie, en opposition à celle d'ARISTOTE et des scolastiques, et qui s'ouvre en même temps à la science de la nature. Ainsi NEWTON découvre au huitième discours des «*Météores*», la deuxième des annexes au «*Discours de la méthode*», l'explication de l'arc-en-ciel et il s'initie durant la même période à l'usage d'un prisme pour disperser les rayons du Soleil. L'intérêt de NEWTON pour l'optique trouve probablement ici son origine.

Mais les mathématiques restent prépondérantes dans l'intérêt de NEWTON. Il s'avère que Trinity College possède un éminent mathématicien en la personne du professeur Isaac BARROW, récemment nommé «*Lucasian Professor*» pour l'enseignement des sciences. Spécialiste en géométrie, celui-ci a publié une traduction latine des «*Eléments*» d'EUCLIDE en 1655, qui fut plus tard suivie d'une édition en anglais. L'ouvrage sembla rébarbatif à NEWTON qui en abandonna l'étude bien vite sans pour autant perdre l'intérêt pour les mathématiques. Il décide donc d'étudier «*La Géométrie*», le plus difficile des trois essais qui accompagnent le «*Discours de la Méthode*», et il s'en rend maître non sans

grandes peines. Mais il est loin d'être d'accord avec DESCARTES, car il trouve incongru que ce dernier ait voulu entremêler la géométrie et l'arithmétique. Or NEWTON prend vite conscience qu'en réalité DESCARTES ne combine pas la géométrie à l'arithmétique, mais à l'algèbre. Au XVII^e siècle, peu nombreux sont ceux qui comprennent et pratiquent cette branche des mathématiques, qui nécessite d'écrire des équations et de trouver des valeurs qui satisfont celles-ci. Dans l'ouvrage de DESCARTES, un détail attire l'attention de NEWTON : c'est le calcul à la puissance six du binôme $(y - a)$ au quatorzième paragraphe du LIVRE III. NEWTON recoupe le résultat de DESCARTES avec les valeurs de la sixième rangée du «*triangle arithmétique*» de PASCAL donné par John WALLIS. Il trouve ainsi le résultat que les nombres correspondant à la puissance n du binôme $(y - a)$ sont bien ceux de la n^e rangée du triangle arithmétique. Ce résultat impressionne beaucoup NEWTON, et en fait cette entrée dans la discipline des mathématiques est portée à son crédit dans l'histoire de celles-ci comme étant une des contributions majeures à cette science. Séduit par ce premier succès, NEWTON entreprend le calcul de la série logarithmique à base de dix avec un grand nombre de décimales. Fort de cette expérience positive, il se sent désormais l'âme d'un algébriste. Et il peut retourner aux questions de géométrie. DESCARTES dans sa «*Géométrie*» trace des courbes et explique que chacune de ces courbes correspond à une équation algébrique. De là, il n'y a qu'un pas jusqu'aux acquis de J. WALLIS qui postule que l'aire sous la courbe $y = x^n$ est égale à $x^{(n+1)}/(n+1)$. NEWTON est ainsi confronté aux deux questions fondamentales de ce qui deviendra plus tard l'analyse : comment mesurer la longueur d'une ligne lorsque cette ligne est une courbe, et comment mesurer l'aire confinée à l'intérieur d'une courbe ? NEWTON rencontre ici pour la première fois des questions mathématiques qui seront traitées plus tard dans son calcul des fluxions. En juin 1665, NEWTON fuit Cambridge à cause de l'épidémie de peste qui ravage l'Angleterre et qui fut suivie par le grand incendie de Londres en 1666. L'Université étant fermée, il rentre chez lui. Et c'est dans le cadre idyllique de Woolsthorpe que NEWTON pose les bases de quelques-unes de ses grandes découvertes. Près d'un demi-siècle après les faits, NEWTON décrit cet épisode, l'un des plus importants de son existence : «*En novembre 1665, j'avais la méthode directe des fluxions et l'année suivante j'avais la théorie des couleurs, et en mai j'accédais à la méthode inverse des fluxions. La même année, j'ai commencé à penser à l'extension de la gravité à l'orbite de la Lune . . . Tout ceci se passa durant les deux années de peste 1665–1666. A cette époque, j'étais à la fleur de l'âge de l'invention et pensais aux mathématiques et à la philosophie plus qu'il ne m'est jamais arrivé depuis.*» [40] WESTFALL, dans sa biographie de NEWTON [35], décrit son séjour dans sa maison natale pendant les deux années cruciales sous l'angle de ses occupations mathématiques. Ainsi, en novembre 1665 NEWTON rédige deux courts essais sur le mouvement et il récidive en mai 1666 en écrivant deux autres ouvrages sur le même sujet. Finalement, en octobre et novembre de la même année, il finalise ses réflexions et il ne touchera plus aux mathématiques dans les deux années à venir pour consacrer son attention uniquement à l'optique.

NEWTON est d'avis que la lumière ne peut consister en vibrations, comme HOOK l'avait postulé dans sa théorie des couleurs. Selon lui, elle doit être faite de corpuscules. Afin d'en donner des résultats probants, il utilise le prisme qu'il possède déjà et en achète un deuxième. A l'aide de ceux-ci, NEWTON réalise ses premières expériences sur la décomposition de la lumière blanche du Soleil et de la dispersion des rais lumineux à travers un prisme. Ces premiers essais le conduisent à se faire une idée de la couleur qu'il va abandonner par la suite. S'il a pensé d'abord que les rayons lumineux du Soleil sont soit de couleur rouge, soit de couleur bleue, il porte par la suite le nombre des couleurs élémentaires à cinq : le rouge, le jaune, le vert, le bleu et le violet. Cinq couleurs suffisent à tout expliquer pense-t-il : *« Comme le blanc est fait d'un mélange de toutes sortes de couleurs, le vert est fait d'un mélange de bleu et de jaune, le violet d'un mélange de rouge et de bleu, etc. »* [41]

A Woolsthorpe, NEWTON devine aussi la raison de la gravitation universelle. Cette découverte il aimait sur ses vieux jours en conter la genèse. Un jour, flânant dans le verger maternel, il vit tomber une pomme ; il lui vint alors l'idée que la même cause pouvait être responsable, et de la chute de la pomme, et du mouvement de la Lune, qui, au lieu de poursuivre son chemin droit devant elle, incurve son orbite vers la Terre. Il soumit immédiatement cette idée à l'épreuve du calcul, mais en l'absence de livres, trompé par des données fallacieuses, il n'obtint pas de résultat qui le satisfasse et abandonna pour longtemps cette théorie qui fera plus tard sa gloire. Nous parlerons dans les chapitres qui suivent des détails de celle-ci.

Revenu à Cambridge, NEWTON parfait ses études et, lors d'une cérémonie solennelle le 7 juillet 1668, reçoit le diplôme de *« Master of Arts »* de l'Université de Cambridge. Il est l'un des cent quarante-huit lauréats retenus pour cette dignité par le Sénat. Après huit années de travail assidu, son accession au titre de membre du Trinity College, qui accompagne le diplôme, va changer sa vie. S'il avait toujours été timide et réservé jusqu'ici, il s'approche maintenant de ses professeurs et surtout de l'un deux : Isaac BARROW. Celui-ci est, à cette époque, l'une des gloires ascendantes de Trinity. Botaniste, théologien, mathématicien réputé, excellent orateur, il aspire à de plus hautes fonctions que celle de professeur au sein du Collège : il aimerait en devenir le Maître. Titulaire depuis bientôt six ans de la prestigieuse chaire *« Lucas »*, il estime avoir assez bien rempli sa tâche en cette fonction. Mais, malgré ses tractations en coulisses, et à son grand regret, BARROW voit s'éloigner de lui la perspective d'être nommé *« Master of Trinity »*. En conséquence, lorsque le roi CHARLES II lui fait savoir qu'il ferait volontiers de lui son chapelain, il accepte, et pour accéder à cette nouvelle dignité, démissionne de la chaire lucasienne. Les exécuteurs testamentaires du fondateur de la chaire Henri LUCAS doivent alors trouver un successeur. Cédant à la pression discrètement exercée sur eux par des personnages haut placés à l'Université, dont l'un fut BARROW lui-même, ils décident de nommer NEWTON.

Voilà donc NEWTON en octobre 1669 installé professeur à l'Université de Cambridge, fonction qu'il gardera jusqu'en 1696, année où il deviendra *« War-*

den of the Mint», pour être son directeur trois années plus tard. Néanmoins, il restera «*Fellow*» du Trinity College jusqu'en 1701. La nouvelle tâche qui attend NEWTON à Cambridge n'est pas écrasante. NEWTON consulte son prédécesseur sur la manière et les sujets à enseigner. BARROW lui recommande de reprendre à son compte la pratique qu'il a solidement établie : n'enseigner son cours que pendant un seul trimestre chaque année. Le sujet des cours est vite trouvé lui aussi. NEWTON se joint à la suggestion de BARROW et continue l'enseignement de l'optique, un cours que celui-ci avait initié l'année précédente et qui demandait moins de préparation qu'un enseignement de l'algèbre ou de la géométrie, disciplines qui de toute façon n'intéressaient que très peu d'étudiants de Trinity College. En 1670, pendant le «*trimestre de Carême*», NEWTON donna donc son premier cours d'optique, et nous ignorons combien d'étudiants ont réellement suivi celui-ci. Quinze ans plus tard, Humphrey NEWTON, devenu entre-temps son assistant, écrit : «*Les élèves étaient peu nombreux à l'écouter, moins encore à le comprendre et souvent, faute d'auditeurs, il parlait aux murs.*» [42] Après quoi, il s'en retournait solitaire à ses travaux, très souvent de nature alchimique dans ses appartements au Trinity College.

NEWTON continue donc à présenter à ses rares étudiants ses travaux sur la lumière ; entre 1673 et 1683, il donne des cours d'arithmétique et d'algèbre. En 1685 il lit un cours sur la mécanique et en 1687, il offre un cours sur le «*Système du Monde*», préfigurant le LIVRE III de son œuvre maîtresse. Les deux dernières performances montrent que les «PRINCIPIA» sont en gestation. Mais cette œuvre principale de NEWTON fut précédée par le petit traité «*De Motu*», que nous analyserons au prochain chapitre, et dont les correspondances avec le LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» seront décrites dans les détails. Les différents traités «*De Motu*» ont leur origine dans une visite que Edmund HALLEY rend à NEWTON en août 1684. Un compte-rendu de cette visite a été fait par A. DE MOIVRE, une quarantaine d'années après que celle-ci ait eu lieu [43] : «*... en 1684, le Dr HALLEY lui rendit visite à Cambridge. Après qu'ils furent restés quelque temps ensemble, le docteur lui demanda quelle serait à son avis la courbe qui serait décrite par les planètes en supposant que la force d'attraction vers le Soleil est inversement comme le carré de leur distance à celui-ci. Sir Isaac répondit immédiatement que ce serait une ellipse ; le docteur, frappé de joie et d'étonnement, lui demanda comment il le savait. Eh bien, dit-il, je l'ai calculé, sur quoi le docteur lui demanda son calcul sans plus de délai. Sir Isaac regarda parmi ses papiers mais ne put le trouver ; il lui promit de le recommencer et de le lui envoyer.*» Or en refaisant ses calculs, il n'arrivait plus à trouver sa démonstration. Il découvrit qu'il avait interverti les axes de l'ellipse avec ses diamètres conjugués. Il était donc forcé de reprendre ses réflexions à zéro, et c'est en novembre 1684 qu'il fit parvenir à HALLEY un petit traité de neuf pages avec le titre : «*De Motu corporum in gyrum*» [44].

Dans son écrit, NEWTON non seulement démontra que l'orbite elliptique présuppose une force inversement proportionnelle au carré de la distance dans un des foyers, mais esquissa aussi une preuve du problème inverse. Celui-ci dit qu'une force inversement proportionnelle au carré de la distance engendre une

orbite elliptique pour des vitesses initiales ne dépassant pas une certaine valeur limite.

Si HALLEY attendit quelques mois avant de recevoir le travail newtonien, ceci était dû au fait que sa visite avait enclenché un processus intellectuel d'une rare intensité chez le professeur de Cambridge. NEWTON était totalement possédé par le problème et il n'arrivait plus à s'en détacher. Mais si HALLEY avait raisonné en astronome lorsqu'il posa sa question, NEWTON, lui est saisi par le côté alchimiste qu'il voyait à l'arrière-plan du problème cosmologique. Les principes actifs seraient-ils plus faciles à débusquer dans l'étude du mouvement des planètes que dans celle, plus subtile, de la constitution de la matière ? NEWTON seul voit le parti qu'il peut tirer de la loi des carrés inverses. Il se rappelle les textes alchimiques qu'il a déjà lus : *«Et ainsi, à cet endroit, vous obtiendrez la vérité et la bonne explication d'Hermès lorsqu'il dit que le père de cet aimant est le Soleil et sa mère la Lune.»* [37]. Et n'avait-il pas lui-même écrit déjà : *«L'air engendre le chalybs ou aimant, et cela fait apparaître l'air. Ainsi le père de celui-ci est le Soleil ou l'Or, et sa mère la Lune ou l'Argent.»* [37] La loi de l'inverse du carré va lui permettre de démontrer *«la bonne explication d'Hermès»* et de devenir le nouvel Hermès des temps modernes.

Mais NEWTON avait d'abord le devoir d'appliquer la loi de la gravitation à la réalité physique, constituée pour lui par le système du monde. Les *«PRINCIPIA»* [1] paraissent donc le 7 juillet 1687. Environ trois cents exemplaires des *«Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica»* sont expédiés à des correspondants à travers l'Europe ou mis en vente. L'ouvrage sera réédité en 1712, avec des modifications conceptuelles profondes sur le plan scientifique, mais contenant également à présent les idées théologiques de NEWTON, sous la direction de R. COTES. La préface que ce jeune savant a écrite tente d'expliquer l'approche épistémologique de NEWTON. Une troisième édition finale, élaborée avec l'aide de H. PEMBERTON, paraît en 1726 à la veille de la mort de NEWTON. Le texte qui va suivre analysera dans les détails le contenu des trois éditions.

Mais ici déjà, nous pouvons nous poser la question quant à la nouveauté de l'ouvrage. Sans doute, et en premier lieu, c'est l'introduction de la loi de la gravitation universelle qui permet la synthèse des travaux de GALILEI et de HUYGENS en expliquant les phénomènes célestes et terrestres. Les corps s'attirent avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. La physique est unifiée ; les mêmes lois s'appliquent désormais à la Terre comme au ciel, et le cosmos aristotélicien hiérarchisé est remplacé dorénavant par un nouveau paradigme.

Celui-ci n'a pu être instauré que par l'organisation très stricte de l'ouvrage de NEWTON, qui est structuré de façon déductive, l'idéal mathématique depuis les *«Éléments»* d'EUCLIDE. S'il est vrai que NEWTON s'est sans doute inspiré chez Ch. HUYGENS et de son *«Horlogium Oscillatorium»* [45], il a mieux réussi que ce dernier à faire la symbiose entre la réalité physique et les mathématiques nécessaires pour décrire celle-ci, même s'il a caché ses raisonnements basés, au moins partiellement, sur ces travaux d'analyse, par des constructions purement géométriques. A travers les *«PRINCIPIA»*, NEWTON apparaît comme

le premier véritable fondateur de la mécanique rationnelle moderne. Son livre a fixé le cadre langagier, obligatoirement mathématique, au sein duquel allaient se définir les grandes théories-cadres jusqu'à la fin du XX^e siècle.

NEWTON est lent à faire connaître ses découvertes en physique. Outre les «PRINCIPIA», réédités deux fois de son vivant, il publie en 1704 l'«*Optics*» [46], qui a pour l'essentiel été écrite trente ans plus tôt. En effet, peu après son retour à Cambridge, après l'année de la grande peste à Londres qu'il avait passée dans son village à Woolsthorpe, lisant entre autres le «*Micrographia*» [47] de R. HOOK, un des grands documents de l'histoire de l'optique, il s'activa à utiliser un prisme pour faire des expériences d'optique. NEWTON s'en prend très vite aux idées de HOOK qui avait assimilé la lumière à des «*impulsions en orbe*» comparables aux ondulations que l'on observe sur la surface de l'eau lorsqu'on l'agite. L'«*impulsion en orbe*» hookéenne est traduite par les physiciens par la constatation que la lumière possède une «*fréquence d'oscillation*» donnant ainsi à R. HOOK la paternité d'une partie de l'optique moderne. Mais NEWTON est d'avis que la lumière ne peut consister en vibrations comme HOOK l'affirma. Pour lui elle est constituée de corpuscules. De plus la couleur ne peut provenir d'«*impressions confuses*» comme le croit l'auteur des «*Micrographia*». NEWTON recherche des explications alternatives et reprend la lecture de la «*Dioptrique*» et des «*Météores*» de DESCARTES [48]. Il examine les spectres fournis par le prisme et il fait presque aussitôt une importante découverte. Il relève «*que les rais lumineux qui se déplacent lentement sont plus réfractés que les rais rapides*», mieux encore, «*que les rais qui produisent du bleu sont plus réfractés que les rais qui produisent du rouge.*» [49] Les «*Rays of light*» dont il est question chez NEWTON sont, dans l'esprit de celui-ci, des corpuscules qui se présentent soit l'un après l'autre, le long d'une même ligne, soit l'un à côté de l'autre, le long de plusieurs lignes avoisinantes. Après plusieurs essais, NEWTON porte à cinq le nombre de couleurs de base composant la lumière blanche : rouge, jaune, vert, bleu et violet. Il pense alors pouvoir expliquer tout le phénomène des couleurs en partant de l'hypothèse de la composition de la lumière blanche.

Une conséquence de la théorie newtonienne se rapportait à la construction de télescopes. En effet on savait depuis la propagation des lunettes par GALILEI, que celles-ci n'arrivaient pas à produire des images claires et distinctes. Il y avait le phénomène de l'aberration de sphéricité : la lumière tombant par le milieu de la lentille est troublée par l'inégale réfraction des rayons lumineux. Il fallait donc utiliser des lentilles possédant une courbure minimale tout en sachant que la distance au foyer devenait de plus en plus grande, fait que DESCARTES avait déjà révélé dans les «*Dioptriques*» [48]. NEWTON était persuadé que cette mesure ne suffisait pas, parce qu'il fallait en plus tenir compte de l'aberration chromatique. Si les différentes composantes de la lumière blanche possèdent des indices de réfraction différents, il n'est pas possible de focaliser la lumière blanche en un foyer unique. Or l'aberration chromatique est un effet qui se produit avec la réfraction mais non pas avec la réflexion. NEWTON construisit alors un télescope basé uniquement sur ce dernier phénomène. Il coule, taille,

polit à la perfection un miroir que les meilleurs artisans de Londres s'efforceront en vain d'imiter. Il imagine le dispositif qui portera toujours son nom pour observer l'image produite par le miroir sphérique et fabrique une monture équatoriale, afin de pouvoir suivre le mouvement apparent du ciel. Une fois cet instrument achevé, au cours de l'année 1669 ou même plus tôt, il le montre à ses rares visiteurs.

L'existence du télescope construit par NEWTON finit par être connu du monde savant et, à la fin de 1671, la Royal Society demande à Isaac BARROW de lui présenter l'appareil mis au point par son protégé. Peu après cette présentation, NEWTON reçoit une lettre extrêmement élogieuse de H. J. OLDENBURG, secrétaire de cette illustre assemblée, dans laquelle il est aussitôt élu sans devoir solliciter son adhésion à travers un vote. Il y pénètre, précédé par un appareil qui s'impose de lui-même, et évite ainsi toute controverse. NEWTON se montre sensible aux éloges qui lui sont alors présentés et s'adresse aux membres de la Royal Society en les assurant : *«je tenterai de témoigner ma gratitude en communiquant ce que mes pauvres tentatives solitaires peuvent réussir quant à la promotion de vos desseins philosophiques.»* En réalité, NEWTON mesure pleinement l'importance de la découverte qu'il s'apprête à dévoiler : il s'agit, dit-il, *«d'une découverte scientifique qui m'a amené à faire ledit télescope et dont je ne doute pas qu'elle se montrera plus profitable que la communication de cet instrument, étant à mon jugement la plus étrange, sinon la plus importante révélation faite à ce jour des opérations de la Nature.»* [50]

Cette lettre du 6 février 1672 de NEWTON à OLDENBURG sur la théorie des couleurs était destinée, comme le voulait l'usage, à être lue devant la Royal Society et à être imprimée dans les comptes-rendus de ses séances. NEWTON y relate ses expériences avec un prisme de verre triangulaire et vise en même temps à séduire les membres de cette institution en se soumettant ostensiblement aux principes posés au début du XVII^e siècle par Francis BACON. En effet, celui-ci voulait, face à l'enseignement aristotélicien pratiqué alors dans les universités, fonder la nouvelle connaissance appelée depuis *«philosophie naturelle»* sur *«... un mariage véritable et légitime entre la faculté empirique et la faculté rationnelle.»* [51] Voilà pourquoi NEWTON insista dans son écrit que toute expérience devra aboutir à des mesures quantitatives susceptibles d'être répétées, et que la raison doit être formulée mathématiquement.

La communication de NEWTON débute par une observation qui semble être faite au hasard, pour arriver tout de suite à la présentation d'une expérience cruciale découlant de l'observation initiale. NEWTON décrit comment il isole une portion du spectre lumineux émanant du prisme triangulaire. Il projette alors les rayons ainsi délimités sur un second prisme, pour constater que les rayons provenant du second prisme sont de même nature que ceux qui y parviennent. Si donc l'on a isolé, après le premier prisme, des rayons lumineux réfractés selon l'angle correspondant à la couleur rouge, on ne trouvera après le second prisme que des rayons identiques, réfractés selon le même angle ; de même pour toute autre composante du spectre. NEWTON conclut que la lumière blanche est hétérogène, mais que chacun des rayons lumineux produits par la décomposition

de cette lumière blanche par le prisme est définitivement indécomposable.

NEWTON était étonné que sa théorie n'était pas acceptée par la communauté scientifique et fut critiquée de façon véhémence. Il y avait trois groupes de critiques. Les premiers comme PARDIES et LINUS ne parvenaient pas à répéter l'expérience newtonienne. Les deuxièmes, comme HOOK, acceptaient le résultat de l'expérience décrite mais n'étaient pas d'accord avec l'interprétation que NEWTON en donnait. Un troisième groupe, autour de Ch. HUYGENS, était d'avis que NEWTON avait découvert seulement une propriété secondaire, peu intéressante, de la lumière : la réfraction variable. A la lumière des théories optiques en vigueur alors, l'interprétation newtonienne était inacceptable. On interprétait la lumière non pas comme une substance, mais comme une action qui se propage dans un milieu. HOOK et HUYGENS étaient persuadés que la lumière se transmettait de proche en proche dans les milieux transparents, et ils cherchaient à décrire cette transmission par analogie avec la propagation d'une onde sonore. Pour eux, la lumière avait un caractère ondulatoire tandis que NEWTON, lui, supposait l'existence de corpuscules lumineux.

La controverse, du point de vue épistémologique, souffrait en plus de difficultés logiques, parce que NEWTON était loin d'appliquer les préceptes baconiens auxquels il se référait. Bien au contraire, il explicite un parti pris phénoméniste en voulant faire croire que sa théorie de la lumière repose entièrement sur l'expérience et serait donc libre de toute hypothèse. Et ce fut justement cette démarche que la communauté scientifique se refusa à admettre. NEWTON fit encore un effort pour convaincre ses critiques en soumettant à la Royal Society en 1675 un article avec le titre : «*An hypothesis explaining the properties of light*» qui n'arriva pas à redresser la situation. Et ce n'est qu'en 1704, bien après que sa réputation scientifique fut solidement établie, qu'il publia l'«*Optique*» [46].

NEWTON est possédé par une angoisse viscérale devant toute critique de ses idées. Et c'est encore dans sa correspondance avec LEIBNIZ en 1693 [52] que les blessures qu'il a reçu vingt années plus tôt lors des querelles autour de ses idées relatives à l'optique restent apparentes, quand il explique qu'il n'a pas publié de livre exposant ses travaux sur la lumière «*par crainte des querelles et des controverses soulevées contre moi par les ignorants.*» Avant de s'attaquer aux questions d'optique, NEWTON avait déjà pris une position analogue quant à la publication de ses travaux mathématiques. Et c'est très tôt, lorsqu'il était encore étudiant à Cambridge, que NEWTON s'était déjà tourné vers les mathématiques comme nous l'avons vu. Très vite, il avait maîtrisé l'algèbre à partir de «*La Géométrie*» [19] de DESCARTES, qui avait mis en place le cadre de l'analyse mathématique moderne en décrivant quantitativement les figures de la géométrie. Mais en laissant DESCARTES bien derrière lui, NEWTON, en l'espace de quelques mois, va créer de toutes pièces une théorie nouvelle, le calcul différentiel et intégral. Et il ne publia rien encore jusqu'en 1704 avec les «*Quadratura Curvarum*» [53], qu'il présenta comme une annexe à son traité d'optique. Or, ce texte est un extrait d'une étude beaucoup plus complète, écrite par NEWTON déjà en 1665 : «*De analysi per æquationes numero terminorum infinitas*» [54] publiée seulement en 1736 bien après sa mort. C'est donc

seulement bien plus tard que l'on a pu constater que l'analyse mathématique possédait une double paternité, celle de NEWTON et celle de LEIBNIZ, fait que l'atroce querelle de priorité [55] cachait un bon moment et fit que cette théorie a été livrée à la postérité uniquement dans la notation leibnizienne. L. VERLET rappelle dans *«La malle de NEWTON»* [39] tout le génie qu'il fallait développer pour concevoir l'idée de la dérivée : *«rapport de deux quantités qui restent finies tout en s'évanouissant dans une plongée indéfinie vers un zéro jamais atteint. La définition de l'infinitésimal suppose une sorte de suspension de la pensée, soumise, l'espace d'un instant à un flou vertigineux auquel l'intuitionnisme cartésien ne pouvait que répugner. Mathématique mouvante, le calcul différentiel et intégral se révèle être la mathématique du mouvement : l'espace infinitésimal parcouru dans un temps infinitésimal, c'est la vitesse instantanée ; la variation infinitésimale de la vitesse sur un temps infinitésimal, c'est l'accélération.»*

Malgré ces prouesses dans l'invention des mathématiques modernes, nous assistons à un étrange revirement dans les intérêts newtoniens concernant cette science. En effet, à partir des années 1670, il se tourna vers la géométrie des Anciens et abandonna le calcul des fluxions, ou plutôt le transforma en méthode géométrique qu'il nomma *«synthétique»*. Il y a plusieurs explications pour justifier ce revirement fondamental. Au XV^e et XVI^e siècle apparurent les premières traductions des œuvres des géomètres de l'antiquité, à partir de manuscrits arabes et grecs. La *«découverte»* des travaux géniaux d'un ARCHIMÈDE, d'un APOLLONIUS, fascinait aussi un NEWTON. Dans les années 1670, celui-ci étudia de façon intense le septième livre de la *«Synagogue»* de PAPPUS [56] et s'intéressa particulièrement au contenu des deux livres perdus : les *«Contacts»* ayant comme sujet le problème général d'APOLLONIUS : *«Deux éléments quelconques étant donnés parmi des points, des droites et des cercles, décrire un cercle donné de grandeur qui passe par un point donné ou par les points donnés, dans le cas de points donnés, et qui soit tangent, respectivement aux droites et aux cercles donnés»* [56] et *«Des Inclinaisons»* organisé autour du problème général de la sécante : *«Deux lignes, droites ou cercles, étant données de position, poser dans leur intervalle une droite de longueur donnée ou inclinée vers un point donné.»* Il est probable que les propositions de cet ouvrage n'appartenaient pas toutes à APOLLONIUS, mais venaient de plusieurs géomètres grecs. NEWTON s'intéressait au contenu de ces deux textes parce qu'il y voyait des interférences avec sa propre méthode des fluxions.

Le septième livre de la *«Synagogue»* intéressa NEWTON surtout pour son introduction. PAPPUS y introduit les deux notions d'analyse et de synthèse : *«L'analyse est donc la voie qui part de la voie cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme déjà*

obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée; et c'est ce que nous appelons la synthèse.» [56]

NEWTON était fasciné par l'approche pappusienne, tout comme le furent de nombreux autres mathématiciens du XVII^e siècle, et elle l'amena à réévaluer sa position quant à la géométrie. De ses réflexions émanèrent de nombreuses propositions géométriques qui feraient l'objet de la géométrie projective plus d'un siècle plus tard. NEWTON se concentrait sur le problème de PAPPUS que DESCARTES avait traité dans le deuxième livre de sa «*Géométrie*» et il le résolut par une méthode purement géométrique. Et il jugeait des deux approches en constatant que les méthodes des Anciens étaient de loin plus élégantes que celles de DESCARTES. Celui-ci aurait obtenu sa solution à l'aide d'un calcul algébrique qui, si on le traduisait en mots comme les Anciens avaient coutume de le faire, serait tellement rébarbatif et imprécis qu'il était impossible de le comprendre. Mais, par contre, les Anciens obtenaient leurs résultats à l'aide de proportions simples parce qu'ils étaient d'avis que toute alternative ne valait même pas d'être lue et suivant ce principe, ils fondaient leur analyse à partir de laquelle ils trouvaient leurs constructions [57]. Cette appréciation newtonienne caractérise très bien celle-ci : l'admiration des Anciens, le rejet de l'approche cartésienne, mais aussi la conviction qu'il existerait une méthode secrète permettant d'obtenir des résultats exacts en mathématiques.

NEWTON était persuadé qu'il ne faisait que redécouvrir des résultats que les anciens géomètres d'Alexandrie et de Syracuse possédaient déjà, et qu'ils les avaient appris auprès des sages de l'Antiquité tels que PYTHAGORE et Numa POMPILIUS ou MOCHUS qu'il identifiait avec le MOÏSE de l'Ancien Testament. NEWTON croyait fermement que les Anciens étaient supérieurs aux Modernes, et disposaient d'un savoir de loin supérieur à ceux-ci. Il soutenait qu'ils avaient connaissance du fait que la Terre tournait autour du Soleil et, dans une préface non publiée à la deuxième édition des «PRINCIPIA», il écrivait que les «*Chaldéens*», les «*Anciens*», les «*Pythagoriciens*» et même les «*Grecs et les Romains*» avaient connaissance de la gravitation universelle [57]. NEWTON non seulement était persuadé que sa «*philosophie naturelle*» était une redécouverte de la philosophie ancienne, mais croyait aussi que ses «*principes mathématiques*» n'étaient rien d'autre qu'une version moderne des méthodes géométriques anciennes. Et le rôle que NEWTON attribua à PYTHAGORE mérite d'être souligné. En effet, il pensait que celui-ci avait rassemblé des connaissances égyptiennes et phéniciennes, elles-mêmes tributaires de MOCHUS, sur la religion primordiale et la philosophie de NOÉ, et que ces peuples avaient la connaissance d'un Dieu unique et qu'ils avaient exprimé en harmonies musicales les vérités premières sur la cosmologie et la gravitation. PYTHAGORE n'avait que transmis ce savoir en Grèce, mais possédait en même temps des connaissances mathématiques avancées. NEWTON s'approche ici des platoniciens de Cambridge apparentés à la renaissance italienne, et qui maintenaient que quatre sages transmettaient le savoir égyptien parmi les Grecs : ORPHÉE apportait la théologie, THALÈS les mathématiques, DÉMOCRITE la philosophie

naturelle et PYTHAGORE la somme des trois. La bibliothèque de NEWTON, contenant pour la majeure partie des ouvrages théologiques, chronologiques et alchimiques, reflète cette conviction. Et elle est aussi implicitement présente dans son œuvre maîtresse que sont les «PRINCIPIA».

Fort de sa conviction de la supériorité des Anciens sur les Modernes, NEWTON est persuadé que les prophètes de l'ancien temps annonçaient leurs prophéties au travers d'un langage mystique. Il commença dans les années soixante-dix à s'intéresser fortement à la théologie et à l'ésotérisme, dû peut-être au fait qu'il attendait son ordination comme prêtre anglican vers 1675 et ceci uniquement dans le but de pouvoir garder sa «*Fellowship*» au Trinity College. Très vite, il se composa sa propre théorie quant à la vérité de la religion chrétienne et de l'évolution de l'humanité. Si MOÏSE et ses successeurs ont consigné dans la Bible l'histoire de l'humanité première, il eut un revirement complet avec le «*Livre de DANIEL*» et l'«*Apocalypse de JEAN*» qui relatent l'histoire à venir. Ces deux livres sont, selon NEWTON, la relation factuelle des tribulations futures de l'humanité, et il faut donc apprendre à déchiffrer correctement ces prophéties pour connaître l'avenir. Et NEWTON consacra au cours des années 1670 et au début des années 80 la plus grande partie de son temps à des études théologiques, dont le volume paraît énorme [58]. Après sa mort ont été publiées ses «*Observations sur les prophéties de DANIEL*» [59]. NEWTON y explique que, pour chacune des figures utilisées par les prophètes, il faut fixer une signification, si possible unique, certaine et définie. L'ensemble des significations ainsi déterminées constituera alors une grille de décodage permettant ensuite de traduire le langage mystique en termes clairs et univoques. Entamant ainsi un travail herculéen qui le tiendra en haleine pendant de nombreuses années, il établit un texte collectant toutes les variantes disponibles, auxquelles il ajoute de multiples sources annexes, allant des commentaires des Pères de l'Église en passant par MAÏMONIDES jusqu'aux mythologiques grecques et chaldéennes. Il fait ainsi apparaître l'histoire des deux mille ans passés, marqués par la corruption de l'Église, l'idolâtrie papiste et la rébellion protestante.

Très vite NEWTON se confond dans l'hérésie, au risque même de mettre en danger sa carrière. En effet, sa conversion secrète à l'arianisme ne lui aurait guère permis une ordination en tant que pasteur anglican. Heureusement pour lui, une dispense de la Couronne leva cette obligation pour le professeur lucasien en dernière minute. Dorénavant, l'arianisme constitue la véritable source philosophique de la conception newtonienne de la déité. Et le Dieu du scholie général terminant les «PRINCIPIA», le Grand Architecte de l'Univers, dominant et au besoin réparant sa création, est très semblable au Dieu des théologiens ariens. En effet, ceux-ci, tout comme ce modeste prêtre réfractaire du troisième siècle, ARIUS, avaient affirmé que la doctrine de la Trinité était fausse et que donc ni le Fils, ni le Saint-Esprit ne sont exactement de la même nature que le Père : ils ne lui sont pas consubstantiels et ne participent donc pas pleinement à son éternité. Si l'église catholique avait réglé cette controverse théologique déjà en l'an 380, en mettant l'arianisme au ban, tel ne fut pas le cas aux yeux de NEWTON. Celui-ci s'insurge : «... ils ont corrompu la vraie religion, le culte de

VESTA qui seul possède la marque de l'authenticité — unité, unicité, simplicité. Idolâtres ! Blasphémateurs ! Fornicateurs spirituels ! Ils se prétendent chrétiens, mais le diable sait qu'ils surpassent les pires espèces de scélérats ... les pires espèces d'hommes qui n'aient jamais régné sur la face de la Terre jusqu'à ce jour.» [60] NEWTON est sûr que le dogme de la Trinité a corrompu la vraie religion. Il se sent investi d'une mission : réformer la civilisation occidentale en restaurant la religion primitive. Mais son ardeur est très vite mise en cause par son prédécesseur I. BARROW à la chaire lucasienne qui s'oppose à ses idées de réforme religieuse tout en le persuadant de continuer ses études alchimiques.

Chez NEWTON les spéculations alchimiques et les réflexions sur la vraie religion étaient entremêlées depuis ses débuts. Dès sa parution, il s'était procuré le livre de R. BOYLE : «*The origin of Formes and Qualities*» [61] et il y découvrit deux affirmations lui paraissant d'une importance énorme. En effet, BOYLE affirme qu'un métal peut être transformé en un autre par transmutation d'un élément «*itinérant*» ou «*mobile*» comme l'eau, l'air ou le feu, en un autre. Et BOYLE introduit une théorie corpusculaire de la matière en postulant que les corps diffèrent dans la composition de leur texture uniquement en raison de la présence ou de l'absence en eux de certains corpuscules «*nobles et subtils*».

Sa curiosité piquée au vif amène NEWTON à étudier l'œuvre de BOYLE et il rapporte les principaux termes employés par celui-ci dans «*Of Forms*» en un glossaire qu'il complète par la description des différents types de fourneaux avec lesquels BOYLE a mené à bien ses expériences, ainsi qu'avec des recettes qu'il tire d'une collection de traités alchimiques. Ne se contentant pas de recopier seulement, il l'illustre également de schémas de cornues et d'alambics [62]. Après avoir emménagé dans sa chambre au Trinity College, celle-ci se transforme très vite en un véritable laboratoire alchimique. NEWTON commence aussi à acheter des livres alchimiques dont un des plus en vue : le «*Secrets reveal'd, or An Open Entrance to the Shut Palace of the King*» [63] de Eirenæus PHILALETHES, un alchimiste anglais, de son vrai nom Michel SENDIVOGIUS, un peu plus âgé que lui. NEWTON avale les pages de ce traité. Il découvre que le «*mercure*» et le «*soufre*» dont parle PHILALETHES ne sont pas les corps «*ordinaires*» que les apothicaires utilisent dans leurs préparations, mais renvoient bien à des concepts philosophiques qu'il faut méditer afin de deviner la nature des substances qui se cachent derrière ces expressions. Et cela signifie qu'il doit continuer à lire et à travailler d'autres traités d'autres alchimistes : Michael MAIER, Ezekiel FOXCROFT, Henri MORE et d'autres, en vue de trouver des similitudes entre les vérités théologiques et la symbolique alchimiste.

Peu à peu, NEWTON devient un adepte. Il s'intéresse excessivement aux théories alchimiques de la transmutation et du composé. La théorie de la transmutation ne s'applique en toute rigueur qu'aux seuls éléments et vient à l'alchimie par la physique d'ARISTOTE. Les «*composés*» sont traités par ZÉNON DE CITION qui enseigna à Athènes la doctrine du mélange : «*La matière et la forme sont des principes logiques qui n'ont pas d'existence séparée dans la nature*» [64] avait affirmé ARISTOTE, et le stoïcien retient ce modèle quand il précise que seuls le matériel, la forme et la matière sont les uniques réalités cor-

porelles. Pour lui, il y a deux principes, l'un passif — la substance non qualifiée, l'autre actif — le Logos, qui est Dieu et qui «... *mêlé à la matière, répandu à travers elle, lui procure configuration et forme.*» [65] Animé par sa lecture, NEWTON recherche bientôt à son tour des principes actifs dans la nature. Toute son œuvre de physique en témoigne.

NEWTON porte son attention sur les métaux et il est sûr de pouvoir démontrer à travers eux le principe fondamental de l'alchimie et sa relation avec la vérité éternelle : «*L'art est Un*», écrit ZOSIME, «*comme aussi le Dieu est Un.*» [66] Selon lui, il est possible de séparer la matière première, le «*substrat*», des qualités qui agrémentent les métaux. Ce substrat métallique pur est la «*liquidité*». Matière première commune à tous les métaux, cette liquidité se révèle pleinement lorsque l'on fait passer le plomb à l'état fluide pour ensuite le «*teindre*» afin d'obtenir l'or ou l'argent. En se fluidifiant, le plomb «*noircit*» et perd dans cette opération toute «*détermination*». Seule subsiste sa «*liquidité*». Il en va de même avec d'autres métaux qui tous ont une origine mercurielle hautement semblable à celle de l'or [63]. NEWTON se met alors à «*ouvrir*» les métaux pour accéder à la substance de l'or. Pour ce faire, il faut débarrasser le métal de son humidité en l'«*exaltant*» pour réduire par la chaleur la substance de l'or qu'il contient en particules minuscules, semblables à celles du feu. Ainsi «*digéré*», l'or s'unira avec les plus petites particules métalliques tandis que le reste du métal s'envolera en fumée pour ne laisser dans le creuset que l'or «*transmuté*». Suivant pas à pas les indications de BOYLE, mais aussi des nombreux alchimistes qu'il a étudiés, NEWTON passe de nombreuses années au laboratoire où ses cheveux prennent très vite la couleur argentée vif, sans doute sous l'influence des vapeurs mercurielles auxquelles il s'expose.

NEWTON est intimement persuadé que l'alchimie renferme non seulement le savoir des Anciens, mais que les prophètes de l'ancien temps utilisaient le même langage hermétique. Pour lui, si MOÏSE et ses successeurs ont consigné dans la Bible l'histoire de la première humanité, dans le «*Livre de DANIEL*» et l'«*Apocalypse de JEAN*», c'est l'histoire à venir qui est écrite. Ces livres informent donc sur les tribulations futures de l'humanité et il faut donc apprendre à déchiffrer ces prophéties en vue de connaître l'avenir. «*Le langage mystique est fondé sur l'analogie entre le monde naturel et le monde politique*», et voilà pourquoi il doit exister un sens dans les mots et les images employés par les prophètes. En effet «... *si l'on devait ne jamais les comprendre, à quelle fin Dieu les aurait-Il révélées ? ... JEAN n'écrivait-t-il pas dans un langage, DANIEL dans un autre, ISAÏE dans un troisième ... Ils écrivent tous dans un seul et même langage mystique que, sans aucun doute, les fils des Prophètes connaissaient aussi bien que les prêtres égyptiens le langage des hiéroglyphes.*» [59]

Cette constatation signifiait pour NEWTON tout un programme de travail en vue de décrypter les Livres de l'Écriture tout en poursuivant la lecture de celui de la Nature qui doit se faire suivant la même démarche. Il lui faut donc trouver la «*clé*» permettant de traduire les textes énigmatiques des hermétistes et alchimistes en terme de processus naturels susceptibles de vérification, soit

par l'expérience, soit par le calcul. Pour NEWTON, dorénavant, le doute n'est plus permis, «... les actions de la Nature sont ou végétales ou purement mécaniques.» La référence à l'action végétative rappelle que les alchimistes considéraient la nature comme un vaste être vivant. La conviction newtonienne sur les actions de la nature lui permet de s'attaquer à DESCARTES et sa philosophie purement mécaniste. En effet, il peut lui opposer «une façon plus secrète, subtile et noble de travailler dans toute la végétation, sans laquelle rien ne pourrait être fait et qui rend ses produits distincts de tous les autres.» [67] En un mot, pour NEWTON la science mécanique doit être supplantée par une philosophie naturelle approfondie mettant en jeu des principes actifs capables d'animer les particules en mouvement. Pour lui, clairement, de même que l'âme humaine est capable de mouvoir son corps, de même Dieu a la capacité de mouvoir la matière. La matière est une masse passive animée par un esprit actif.

La pensée newtonienne essaie alors de lier l'univers alchimique à la philosophie de la nature en recherchant les véritables causes de la force de la gravitation. En effet, même quand encore dans la deuxième édition de 1713 des «PRINCIPIA» [1], il affirme : «*Je n'ai pas encore assigné la cause de la pesanteur ...* », il n'a pas cessé de spéculer sur les causes de cette force. Plusieurs voies s'offraient à lui, notamment une hypothèse d'éther qu'il avait élaborée pendant ses réflexions alchimiques et qui fut rapportée par un de ses proches que fut Fatio DE DUILLIER, lui-même protagoniste de cette explication «... il ne craint pas de dire qu'il n'y a qu'une cause mécanique possible de la gravité, à savoir celle que j'ai trouvée ; bien qu'il semble souvent incliné à penser que la gravité a son fondement seulement dans le vouloir arbitraire de Dieu.» [68] Sans doute, par aversion profonde contre la philosophie mécaniste cartésienne, NEWTON se range progressivement à une thèse totalement non mécaniste mettant pour cela en avant ses convictions théologiques. Ainsi D. GRÉGORY remarque que NEWTON pensait que les Anciens ne pouvaient assigner qu'une seule cause à la gravité : «*Il croit qu'ils considéraient que Dieu en est la cause, et rien d'autre, aucun corps n'en étant la cause ; puisque tout corps est pesant.*» [35]

De même dans les «*Queries*» annexées à l'«*Optique*» [46] et dans les lettres adressées par CLARKE à LEIBNIZ [69], et qui reflètent l'expression très directe des idées de NEWTON, la cause spirituelle de la gravitation est nettement envisagée. En fin de compte les divers fluides imaginés pour expliquer la pesanteur sont inutiles et même inacceptables, et le mécanisme strict conduit à des «*hypothèses*» vaines, avec le sens péjoratif que ce mot a acquis pour le NEWTON des «PRINCIPIA». Le mécanisme est donc générateur d'hypothèses fictives, et NEWTON conclut qu'il vaut mieux accepter un principe non matériel qui viendrait s'ajouter au vide et aux atomes afin de ne pas sombrer dans le matérialisme. Si la philosophie naturelle s'occupe de «*puissances qui agissent avec régularité*», celles-ci ne sont pas nécessairement mécaniques. Pourtant NEWTON se refuse à voir dans la pesanteur une force surnaturelle comme en témoigne la doctrine philosophique qu'il a tenté de construire dans le manuscrit «*De gravitationes*» [44]. Celui-ci, à côté de reformulations de perspectives différentes par rapport à celles de DESCARTES, quant aux notions de l'espace, du temps et des corps

matériels, témoigne d'un refus total du mécanisme. En compagnie de MORE, des alchimistes et des philosophes mystiques du passé, NEWTON préserve la possibilité d'agents actifs et de forces non matérielles.

Quand en 1684 NEWTON se pencha de nouveau sur les questions de mécanique céleste, il était quasiment certain que la gravité n'était pas explicable à l'aide d'une cause mécanique, que ce soit un éther matériel ou une autre forme de fluide corpusculaire. En effet ses résultats mathématiques prouvaient l'adéquation entre les orbites képlériennes et les observations astronomiques, et cela sans tenir compte d'une résistance dans les mouvements. Un fluide corporel dense dans l'espace n'existait tout simplement pas, et DESCARTES avait tort dans ses hypothèses. Si donc la gravité ne pouvait avoir une cause non matérielle, tel que c'est le cas pour la fermentation par exemple, était-elle alors soumise à un principe organisationnel, une sorte de cause finale dans le sens aristotélicien du terme ? Un tel principe existait bien dans le principe végétal que NEWTON considérait comme un véhicule, un moyen de transport entre l'esprit actif et la matière passive. Avec son statut quasi ontologique, il était l'agent principal dans l'alchimie et servait de lien entre le ciel et la Terre. De la même façon opérait l'esprit prophétique apportant les messages de Dieu aux hommes. NEWTON pensait que la force de la gravitation avait un statut analogue, sans pour autant être à même d'en donner une définition complète. Ses multiples écrits sur la question témoignent de son intérêt persistant.

Les connexions entre gravité et alchimie dans la réflexion newtonienne, et qui changeaient de façon radicale au courant de sa vie [70], constituent un argument pour l'unité fondamentale de sa pensée. Il n'avait tout simplement pas compartimenté ses études en approches quasi positivistes d'un côté, et en méditations presque mystiques de l'autre, comme certains auteurs modernes le pensent, mais il cherchait à posséder la vérité unique et toute entière concernant l'activité de Dieu dans le monde. Voilà pourquoi il existait non seulement une relation entre la gravité et l'alchimie, mais également entre la gravitation et Dieu, tout comme entre l'alchimie et Dieu. NEWTON aspirait à étudier l'activité de Dieu dans chaque aspect de la création : dans la matière, dans l'ordre cosmique et dans l'histoire. Loin d'étudier uniquement les principes mathématiques de la philosophie naturelle, il projetait de réaliser la grande unification des principes naturels et divins.

Après cette longue présentation des intérêts cachés de son génie, revenons encore à la partie profane de la biographie de NEWTON. En octobre 1669, NEWTON est consacré professeur lucasien de mathématiques à l'Université de Cambridge. En 1672, il devient membre de la Royal Society. Après la «*Révolution glorieuse*» qui remplace Jacques STUART par GUILLAUME D'ORANGE comme roi d'Angleterre, NEWTON obtient un siège au Parlement en 1688–1689. En 1696, il quitte Cambridge pour prendre le poste de «*Warden of the Mint*» et en 1699, il devient le directeur de la Monnaie. Dans la même année, il est élu membre étranger de l'Académie Royale des Sciences à Paris. En 1703, il devient président de la Royal Society. NEWTON meurt après une longue période de déclin le 20 mars 1727.

Il paraît intéressant d'appliquer à NEWTON certains acquis de la psychanalyse, même si ceux-ci sont plus récents que la période de vie de celui-là. Chez NEWTON, la pulsion du savoir dominait d'une façon extrême et d'après les modèles de pensées psychanalytiques, il faut en rechercher la cause dans sa petite enfance. FREUD est persuadé que le fond de toute aspiration au savoir chez l'enfant n'est dû qu'à la peur de voir soudainement avec lui un frère ou une sœur plus jeune, le privant d'une partie ou de la totalité de l'amour maternel. NEWTON eut une vie difficile dès sa prime jeunesse, car son père était mort déjà avant sa naissance. Sa mère confie l'enfant à la grand-mère maternelle et s'en va vivre dans le village voisin où elle se marie et met au monde plusieurs autres enfants. Il est donc probable que NEWTON était hanté, plus que les autres enfants, par la question essentielle évoquée plus haut, et que donc la réflexion consacrée à une solution de celle-ci a fait naître cette disposition spécifique pour la recherche tous azimuts, que nous admirons à juste titre encore aujourd'hui.

NEWTON, au lieu d'aimer, se consacrait uniquement à la recherche comme le montrent amplement ses biographes. De cette disposition résultait une concentration exclusive sur la relation entre le moi et la chose. Le moi s'identifiait pour NEWTON à une prédestination au savoir. Et à partir de cette certitude, il entreprend ses incursions dans la réalité. Cette réalité signifie la nature dans sa totalité et non seulement la nature physique, et celle-ci doit par principe être compréhensible. La réflexion sur la nature pratiquée par NEWTON est active dans le sens qu'il s'imagine pouvoir la manipuler.

Son savoir-faire croît avec ses expériences et lui donne une plus grande sécurité intellectuelle quant à sa compétence à modéliser la réalité. Ses modèles sont transparents, décrits géométriquement et contrôlables par le calcul. L'amour de NEWTON appartient à ces modèles dont il aperçoit toute la beauté. A ce sentiment s'ajoute, pour le profondément religieux NEWTON, que l'ordre qu'il décrit dans la nature et dans l'histoire est voulu par le Dieu créateur qui utilise, comme lui, la géométrie pour exprimer son œuvre. Les racines de son amour pour les formes embrassent ainsi la totalité de l'étant pour aller se focaliser sur le Grand Architecte de l'Univers.

2.2 La genèse de la loi de la gravitation chez Newton

NEWTON, bachelier, quitte Cambridge en 1665 à cause de la peste et retourne dans son village de Woolsthorpe pour y rester jusqu'en 1666. Lors de cette retraite forcée, NEWTON pose les fondements de sa mécanique mais aussi de son optique et de sa méthode d'analyse mathématique. C'est donc aussi à cette époque que doit se situer l'épisode quelque peu légendaire de la pomme, généralement reconnue comme étant à la source de la théorie newtonienne de la gravitation. Réelle ou légendaire, elle témoigne que la découverte de la loi de la gravitation repose en fait sur la réponse exacte à une question bien simple :

«*Pourquoi la Lune ne tombe-t-elle pas comme cette pomme ?*» La réponse à la fois géniale et paradoxale de NEWTON affirme précisément que la Lune tombe bel et bien vers la Terre et le fait de rester sur son orbite n'est que le résultat d'un compromis entre la chute permanente et la tendance à filer tout droit vers l'univers. Les «PRINCIPIA» [1] ne deviennent finalement que la mise en forme mathématique de ce fait et la démonstration que la révolution de la Lune autour de la Terre en suivant les règles empiriques de KEPLER, concorde avec la loi de la chute des corps donnée par GALILEI.

Mais en 1668 persistaient encore des doutes chez NEWTON, si l'accélération centrifuge de la Lune compensait bien sa pesanteur, question dont la réponse passait par le calcul effectif de la force centrifuge dans le cas du système Terre-Lune. Il y avait d'abord l'incertitude qui régnait alors sur la valeur du rayon de la Terre, mais sans doute aussi le fait que NEWTON, à cette époque, n'arrivait pas encore à prouver que la Lune et la Terre peuvent être considérées pour ces calculs comme des objets ponctuels. Quoi qu'il en soit, NEWTON ne conclut pas et il garda jalousement le secret de ces réflexions sur la gravitation.

Il est aujourd'hui possible de reconstruire la démarche de NEWTON qui prétendait avoir relié la règle du «*conatus*» centrifuge à la troisième loi de KEPLER. Or le concept du «*conatus*» ne fut introduit par HUYGENS qu'en 1673, dans son «*Horologium Oscillatorium*» [45] donc bien postérieur au séjour forcé de NEWTON à Woolsthorpe. En admettant la valeur de la force centrifuge égale à v^2/r et en la combinant à la troisième loi de KEPLER comme quoi $r^3/T^2 = cte$ on obtient :

$$\frac{v^2}{r} = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} \right) / r = 4 \cdot \pi^2 \left(\frac{r^3}{T^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r^2} \right) \quad (2.1)$$

Comme r^3/T^2 est une constante pour le système solaire, il s'ensuit que v^2/r est proportionnel à $1/r^2$. Cette loi est bien celle des carrés inverses mais pour des forces centrifuges et non pour des forces centripètes. NEWTON ne s'en rendit compte que bien plus tard, et c'est seulement dans les «PRINCIPIA» qu'il formula la PROPOSITION IV du LIVRE I : «*Les corps qui parcourent uniformément différents cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles et qui sont entre elles comme les carrés des arcs décrits en temps égaux, divisés par les rayons de ces cercles*» [1]. Dans le **Corollaire** 6 à cette proposition, NEWTON précise : «*Si les temps périodiques sont en raison sesquiplée des rayons, et que par conséquent les vitesses soient réciproquement en raison sous doublées des rayons, les forces centripètes seront réciproquement comme les carrés des rayons : et au contraire*» [1]. Il conclut dans le deuxième paragraphe du scholie qui termine la proposition : «*... on peut trouver la proportion qui est entre la force centripète et une force quelconque comme telle que la gravité ; car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la Terre par la force de la gravitation, la gravité sera la force centripète : or, connaissant d'un côté la descente des graves, et de l'autre le temps de la révolution, et l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura (par le **Corollaire** 9 de cette PROPOSITION IV), la proportion cherchée entre la gravité et la force centripète...*

» [1]

Il reste qu'en les années 1660, NEWTON concluait que les forces planétaires sont dans la raison v^2/r et donc proportionnelles à $1/r^2$. Les réflexions de NEWTON des années 1665 et 1666 étaient centrées autour de la théorie de la Lune. David GREGORY rapporte qu'il a vu lors de sa visite à NEWTON en 1694, un manuscrit écrit avant l'année 1669 dans lequel NEWTON traitait de la gravité de la Lune vers la Terre et de celle des planètes vers le Soleil. Ce manuscrit a été identifié [71] et donne la formule suivante pour l'accélération gravitationnelle de la Lune vers la Terre :

$$a_{cc} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R}{T^2} \quad (2.2)$$

Quand NEWTON appliquait cette formule au système Terre–Lune, il trouva la valeur :

$$a_{cc} \cong 0.272 \quad (2.3)$$

L'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre est de :

$$g = 9.80 = 3602a_{cc} \quad (2.4)$$

Or 2.2 donne le rapport :

$$\frac{g}{a_{cc}} \cong 4000 \quad (2.5)$$

La différence entre ± 3600 et ± 4000 désappointa NEWTON. Elle peut être expliquée par le fait qu'il utilisait une valeur erronée pour le rayon du globe terrestre mais aussi par le fait que l'orbite de la Lune n'est pas circulaire. De plus NEWTON avait déjà ressenti que la force gravitationnelle agit entre toutes les particules et se suffit à elle-même sans avoir besoin d'une autre explication. Néanmoins il persistait à rechercher une cause supplémentaire en vue d'expliquer le pauvre résultat de ses calculs et il entrevoyait même pendant un certain temps l'existence des tourbillons à la manière de DESCARTES [72].

En conclusion, NEWTON dans les années 1665 - 66 était assez loin d'un concept clair de la gravitation, même s'il possédait la loi des carrés inverses. Ses réflexions se concentraient sur le mouvement d'un seul corps tournant autour d'un autre et non pas sur le problème de l'attraction réciproque de toutes les particules. Et si la force centrifuge introduite par DESCARTES et HUYGENS l'empêcha pendant un certain temps de pouvoir développer son concept propre de la force gravitationnelle postulant une attraction mutuelle entre toutes les particules, il lui manquait aussi l'idée de la masse qui entre, parallèlement avec la distance, comme facteur primaire dans la loi de la gravitation universelle. Dans les années 60, il n'y avait pas de base dans la pensée newtonienne pour discuter une «Loi» de la «Gravitation Universelle» et il fallait attendre l'année 1679 pour voir NEWTON reprendre ses réflexions sur la question.

Un acquis préliminaire en vue de la formulation de la loi de la gravitation fut l'abandon par NEWTON de l'idée du «*conatus*» nécessaire au mouvement et l'introduction subséquente des forces centripètes en remplacement des forces centrifuges. Ce changement de point de vue consomma l'abandon définitif de la physique cartésienne par NEWTON qui raisonna dorénavant en termes d'une action continue d'une force centrale composée avec un mouvement inertiel rectiligne [73].

En 1679 HOOK initia une correspondance avec NEWTON et les deux paires de lettres qu'ils échangèrent en ce temps ranimaient l'intérêt de NEWTON sur la question de la gravitation universelle [74]. HOOK avait lu à la «*Royal Society*» un texte qui, selon lui, reproduisit le contenu de ses cours de 1670 au «*Gresham College*». Il y écrit «*Premièrement, on admet que tous les corps célestes, quels qu'ils soient, ont une force d'attraction ou de gravitation vers leur propre centre par laquelle ils n'attirent pas seulement les différentes parties de leur corps, et les empêchent ainsi de s'en détacher, comme on peut l'observer pour la Terre, mais ils attirent aussi tous les autres corps célestes qui se trouvent dans la sphère de cette action; (HOOK considère l'action attractive comme étant finie!) que, par conséquent, non seulement le Soleil et la Lune ont une influence sur le corps et le mouvement de la Terre, et la Terre sur ceux-ci, mais que Mercure, Mars, Saturne et Jupiter, par leurs forces d'attraction, ont une influence considérable sur les mouvements de la Terre et que de la même façon la force d'attraction correspondante de la Terre a aussi une influence considérable sur chacun de leurs mouvements. La deuxième supposition est que tous les corps, quels qu'ils soient, une fois entraînés dans un mouvement direct et simple, continueront à se mouvoir en ligne droite, jusqu'à ce que d'autres forces efficaces les dévient et les infléchissent en un mouvement, un cercle, une ellipse ou quelque autre ligne plus complexe. La troisième supposition est que ces forces d'attraction sont d'autant plus puissantes que le corps sur lequel elles agissent est plus proche de leurs centres. Je n'ai pas jusqu'ici vérifié de façon expérimentale la valeur de cette proposition, mais c'est là une idée qui, une fois élaborée comme il doit se faire, aidera considérablement l'astronomie à ramener tout les mouvements célestes à une loi certaine, et sans cela je doute fort que l'on puisse jamais y arriver. Celui qui comprend la nature du pendule circulaire et du mouvement circulaire comprendra aisément tout ce sur quoi est fondé ce principe et il saura où trouver sa voie dans la nature pour en obtenir une véritable compréhension, etc... J'ose promettre à celui qui s'attellera à cette tâche qu'il découvrira que tous les grands mouvements du monde sont influencés par ce principe et que la vraie compréhension de ce principe sera la vraie perfection de l'astronomie*» [75].

La profondeur de l'intuition de HOOK, mais aussi la clarté de sa pensée frappent tout lecteur, encore aujourd'hui. La similitude de ces vues avec celles que NEWTON exposera dans le traité : «*De motu*» en 1684 est voyante et l'on comprend HOOK qui insistait sur son droit de priorité. Mais à regarder de plus près il y a une lacune immense entre ces deux conceptions à première vue identiques. HOOK continue à ignorer la valeur de la proportion dont il parle

dans son texte et selon laquelle le pouvoir d'attraction varie avec la distance. En fait, il n'arrive pas à expliquer le système du monde qu'il propose, et même si en 1679 il donna la loi d'attraction variant avec la proportion inverse du carré de la distance, il est incapable de produire une démonstration mathématique de son assertion. Entre-temps HOOK continuait à écrire à NEWTON et insistait sur sa théorie. NEWTON lui répondit, sans doute pour couper court à toute relation avec un auteur qu'il n'aimait pas et dont il se méfiait, qu'il n'avait jamais entendu parler de ses théories concernant les mouvements célestes. Il prétendit en outre, n'avoir pas de temps à perdre en correspondance car il aurait complètement renoncé à la philosophie [74]. Mais sa lettre à HOOK du 28 novembre 1679 contient aussi un démenti implicite à ses dires qu'il «*a délaissé la philosophie pour se tourner vers d'autres études*». En effet il lui fait part de ses réflexions concernant la preuve du mouvement diurne de la Terre et propose à HOOKE une expérience destinée à prouver ce mouvement. D'après NEWTON, un corps tombant d'une hauteur considérable doit, si la Terre se meut, tomber à l'est de la perpendiculaire. Il base ses explications sur des considérations d'attraction du corps vers le centre de la Terre. Si la suite de la correspondance agrandissait encore l'animosité de NEWTON envers HOOK, elle amena aussi le premier à se repencher sur la question de la gravitation universelle [76].

Il existe une série de documents dans lesquels NEWTON raconte son chemin intellectuel vers la maîtrise de la dynamique céleste telle que référencée dans les «PRINCIPIA». Dans ces documents, NEWTON releva l'importance de sa correspondance avec HOOK pour la genèse de ses propres idées en ce qui concerne le mouvement des planètes qui suivent des orbites elliptiques. Ainsi il dit : «*A la fin de l'année 1679 et en répondant à une lettre du Dr HOOK, alors Secrétaire de la Royal Society, j'écrivais, que contrairement à ce qui avait été écrit contre le mouvement diurne de la Terre obligeant des objets de tomber à l'ouest de leur point de départ, le contraire était vrai ... le Dr HOOK répondit que les objets ne tomberaient pas vers le centre de la Terre mais qu'ils remonteraient et décriraient une courbe ovale tout comme les planètes le font. Je calculais alors l'orbite des planètes. Parce que j'avais trouvé avant, en appliquant la loi de la proportion 3/2 (i.e. la troisième loi de KEPLER) du temps de révolution des planètes par rapport à leurs distances au Soleil que la force qui les maintenait sur leurs orbites autour du Soleil était comme la racine carrée de leurs distances moyennes; et je trouvai alors que quel qu'était la loi des forces qui maintiennent les planètes sur leurs orbites, la aires décrites par le rayon vecteur décrit de la planète au Soleil, étaient proportionnelles au temps. Et à l'aide de ces deux propositions, je trouvai que les orbites étaient ces ellipses que KEPLER avait décrit.*» [77]

NEWTON avoue ainsi que sa correspondance avec HOOK lui fit découvrir que toute force centrale suit la loi des aires. Et il comprit en même temps la signification dynamique de la deuxième loi de KEPLER. En combinant ce résultat avec la troisième loi de celui-ci, il arrivait à une force variant de façon inverse avec le carré de la distance. Les deux résultats lui permirent de prouver que l'orbite résultante de l'attraction suivant une loi des carrés inverses est bien

une ellipse.

Si nous n'avons pas d'évidences documentées concernant la compréhension newtonienne des phénomènes régis par la dynamique céleste vers les années 1680, nous connaissons par contre ses méthodes d'analyse quelques années plus tard, quand il écrivit son premier essai sur la mécanique céleste après la visite de HALLEY à Cambridge au mois d'août de l'année 1684. On peut admettre que ce texte : «*De motu*» [78] à l'origine du LIVRE I des «*PRINCIPIA*», est en fait le résultat de ses réflexions engendrées par la correspondance avec HOOK.

Vers les années 1680, NEWTON rédige donc différentes versions du manuscrit «*De motu*» basé sur des textes successifs, qui finalement sera à la base des «*PRINCIPIA*» de 1687, NEWTON fait différentes ajoutes au texte qui grossit démesurément pour être fondu finalement dans son œuvre maîtresse.

Dans sa version confiée à HALLEY en novembre 1684, le traité «*De motu*» peut être divisé en quatre parties : il y a d'abord trois théorèmes fondamentaux : sur la loi des aires, la formule de la force pour un mouvement circulaire uniforme, et le mouvement curviligne quelconque. Le traité continue avec trois problèmes illustrant les théorèmes indiqués : sur un corps tournant sur la circonférence d'un cercle et la loi de la force centripète, sur un corps tournant sur une ellipse et la loi de la force centripète tendant au centre de l'ellipse, sur un corps tournant sur une ellipse et la loi centripète qui tend vers le foyer de l'ellipse. Divers compléments s'ajoutent à la théorie newtonienne en vue de la rendre plus complète, telle que la loi de KEPLER énoncée de la façon suivante : «*Si l'on suppose que la force centripète est inversement proportionnelle au carré de la distance du centre, les carrés des temps périodiques sont comme les cubus des axes transverses*», la détermination des orbites où NEWTON demande de définir l'ellipse qu'un corps décrit s'il est lancé d'un lieu et d'une vitesse donnée en supposant que la force centripète inversement proportionnelle au carré de la distance au centre soit connue ; le problème de KEPLER faisant l'objet d'un scholie énoncé de la façon suivante : «*Grâce à la solution de ce problème (c'est-à-dire. le problème inverse cité avant) il est possible de définir les orbites des planètes et par suite leurs temps de révolution ; et en comparant la grandeur des orbites, leur excentricité, leur aphélie, leur inclinaison sur le plan de l'écliptique et leurs nœuds, il est possible de savoir si une même comète revient assez souvent vers nous*» ; le théorème de la chute rectiligne dû à GALILEI termine la troisième partie. Une quatrième partie, traitant du mouvement des corps dans les milieux résistants, composée d'un scholie et de deux problèmes, achève le traité.

Dans l'histoire des sciences exactes, la séquence des quatre théorèmes introduits par NEWTON, représente un changement radical de paradigme. «*De motu*» constitue la création d'une toute nouvelle approche de la physique céleste basée sur le concept de la force centripète. Le traité est en quelque sorte la réalisation de l'idéal keplérien, qui tentait de baser la physique céleste sur des causes physiques. Or en réalité il reste très éloigné des idées intuitives de KEPLER [15]. NEWTON est exact et déductif, de plus, il construit de nouveaux concepts comme la force centripète, le mouvement cinématique et le principe

d'inertie.

Une analyse plus détaillée du «*De motu*» s'impose maintenant [79]. NEWTON se trouvait devant le problème du passage d'une idée vague concernant l'introduction d'une force attractive à une formulation mathématique consistante et pour lui, sa réussite dans l'élaboration d'une telle solution fait toute la différence qui le sépare de HOOK. En effet NEWTON, contrairement à HOOK ne voit pas dans la mise au point d'une formulation mathématique une tâche subalterne mais bien la véritable essence de la solution du problème. Et pour arriver à bout de cette tâche, il lui fallut d'abord construire toute la théorie des forces centrales en s'appuyant sur des éléments provenant de DESCARTES, de KEPLER et d'autres auteurs du XVII^e siècle.

La démarche générale de NEWTON dans le «*De motu*» est la suivante :

- la loi de l'inertie qui postule que les planètes laissées à elles-mêmes auraient un mouvement uniforme ;
- une force extérieure doit les diriger vers le Soleil comme point d'attraction ;
- le principe de composition de deux mouvements énoncé par GALILEI, permet l'évaluation de cette composition moyennant l'incurvation, c'est-à-dire la déviation entre la trajectoire rectiligne visuelle et la trajectoire incurvée réelle, et par là la détermination de la force.

L'idée que la déviation permet d'évaluer la force, vu qu'elle est proportionnelle à la première, deviendra en 1687 la loi II des «PRINCIPIA». L'incurvation est donc la mesure géométrique de la force qui tire le mobile vers son centre d'attraction.

Mais comment mesurer la déviation ? Il y a d'abord l'intensité de la force mais il y a aussi d'autres facteurs comme par exemple le temps, en admettant que la déviation dépend du temps écoulé. Il pose que cette déviation est proportionnelle du temps écoulé et il opte donc pour une généralisation de la loi de la chute de GALILEI. D'après cette loi, l'espace parcouru par un mobile en chute libre à partir du repos est proportionnel au carré du temps. Or l'application de cette loi repose sur plusieurs suppositions :

- la force qui attire les planètes vers le Soleil est foncièrement la même que la pesanteur terrestre ;
- la déviation du mobile de la trajectoire inertielle est une sorte de trajet de chute.

Elle doit être considérée comme la résultante de deux mouvements : l'un rectiligne et uniforme, l'autre accéléré vers le centre d'attraction. HUYGENS dans son traité : «*Horologium Oscillatorium*» [45] utilise à profusion cette manière de raisonner.

Mais vis à vis de HUYGENS il y a nuance : la chute des planètes n'est pas verticale mais dirigée vers un point qui représente le centre d'attraction fixe. D'autre part l'intensité de la force varie selon les points de l'espace. Le mobile est ainsi soumis à une force variable, même sur un parcours de longueur, infinitésimale et la loi de GALILEI n'est applicable que pour des déviations très petites.

Mais que dire du temps lui-même ? Comment peut-il entrer dans les calculs ? En effet la représentation géométrique, choisie par NEWTON comme support de son exposé, permet bien de figurer le trajet mais non le temps écoulé. Si la vitesse était uniforme, le temps pourrait être remplacé par le trajet parcouru. Or il n'en est rien et ni la vitesse initiale, ni les forces aux différents points du parcours ne sont connues puisque celles-ci dépendent à leur tour de la position du mobile. NEWTON a vu que la loi des aires de KEPLER permet de résoudre le problème. Cette loi affirme que le temps de parcours d'une planète sur un arc peut être évalué en mesurant l'aire du secteur balayé par le rayon qui relie la planète au Soleil. Le triangle infiniment petit, formé par deux positions voisines du mobile sur son parcours et le centre d'attraction est donc une mesure du temps de parcours entre les deux points cités et il est possible de substituer au temps l'aire de ce triangle. La déviation est donc proportionnelle au carré du produit du rayon vers le premier point par la hauteur du triangle infinitésimal introduit.

NEWTON est prêt maintenant à déduire la formule générale d'évaluation de la force centripète dans le **Théorème III**. Celui-ci constitue le cœur de la théorie newtonienne.

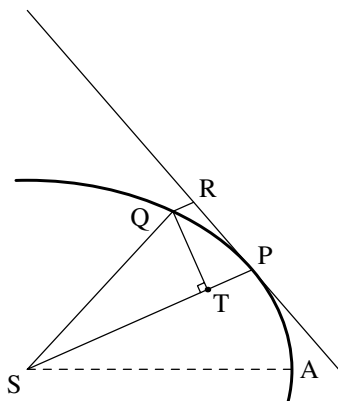


Fig. 2.2-1

La relation qui lie la déflexion QR , la force appliquée et le temps qui est représenté par l'aire du triangle SQP s'écrit (Fig. 2.2-1) :

$$QR \cong (SP \cdot QT)^2 \quad (2.6)$$

ou bien : la force est comme déflexion QR et inversement comme le carré de l'aire du triangle SPQ . Cette expression purement géométrique de la force présuppose quand même l'acceptation des arcs infiniment petits et donc de considérations infinitésimales.

La force que subit un mobile en un point P d'une trajectoire est proportionnelle à la valeur de :

$$\frac{QR}{SP^2 \cdot QT^2} \quad (2.7)$$

La variation de la force d'un point à un autre selon une certaine loi, par exemple en fonction dynamique de la distance, peut être trouvée en déterminant la dépendance de $QR/(SP^2 \cdot QT^2)$ en fonction de SP . Il ressort de 2.7 que la force est inversement proportionnelle au carré de la distance du mobile au foyer S de la courbe.

NEWTON a ainsi démontré que si les planètes se meuvent sur des ellipses, avec le Soleil en un foyer de l'ellipse, la force qui les attire vers celui-ci augmente ou diminue comme l'inverse du carré de la distance.

La déduction de NEWTON ne présuppose pas une courbe bien définie comme une conique ou un cercle, mais part d'une courbe quelconque. Le principe qu'il applique est toujours le même : si la force centripète n'agissait pas, le corps continuerait un mouvement en ligne droite comme DESCARTES l'avait déjà énoncé. Une force détourne alors le mobile de la tangente dans la direction du centre d'attraction. Pour évaluer cette force, NEWTON dit qu'elle est proportionnelle à la déviation qui est l'écart entre la tangente et la trajectoire réelle. Mais la déviation est également proportionnelle au carré du temps comme le postule la loi de la chute de GALILEI : les espaces parcourus sous l'action d'une force centripète sont proportionnels au carré du temps. Dans les «PRINCIPIA» NEWTON susurre les propriétés de la déviation dans la loi II : le changement de mouvement est proportionnel à la force centripète. NEWTON remplace alors le temps par sa représentation géométrique : l'aire du secteur PQR , considéré comme élément infinitésimal, est proportionnelle au temps en vertu du théorème des aires, le **Théorème I** du «*De motu*». Il est donc possible d'exprimer le carré du temps sous forme du carré de l'aire $1/2 SP \cdot QT$.

Les trois premiers théorèmes du traité portent exclusivement sur la détermination de la déviation de l'action d'une force centripète. La suite du texte s'occupe de l'application de la formule (2.7). NEWTON compare la force d'attraction aux différents points d'une même orbite et il démontre que la variation de la force obéit à une loi simple pour chaque espèce de trajectoire. Il associe ainsi à chaque point de l'espace une force analogue à la pesanteur et admet que cette force varie uniquement en fonction de la distance à un point d'attraction. Pour des trajectoires déterminées, NEWTON se met alors à calculer les lois de la force centripète dans les trois problèmes qui suivent le **Théorème III**. La méthode à employer est décrite au corollaire de ce même théorème : «*Par conséquent si une figure quelconque est donnée, et sur celle-ci un point vers lequel est dirigée la force centripète, on peut trouver la loi de la force centripète qui fait tourner le corps sur le pourtour de cette figure. Il suffira de calculer le solide $SP^2 \cdot QT^2/QR$ qui est inversement proportionnel à cette force ...* » [44]. Il faut donc obtenir une expression égale au produit 2.7 et la réduire à la forme la plus simple possible grâce à des relations métriques découlant de la géométrie de la trajectoire. Les grandeurs QT et QR , étant des quantités infinitésimales, doivent disparaître de façon que l'expression finale ne contienne plus que des termes en SP .

Le premier exemple que NEWTON traite comme Problème I est un corps tournant sur un cercle sans l'action d'une force qui tend vers un point de

la circonférence elle-même. Il arrive au résultat que la force centripète est inversement proportionnelle à la cinquième puissance du rayon du cercle.

Le deuxième problème est consacré au mouvement sur une ellipse avec le centre de forces étant au centre de l'ellipse. La loi de force que NEWTON trouve pour cette situation est une proportionnalité directe à l'éloignement.

Le Problème III enfin traite du mouvement elliptique avec la force tendant vers le foyer. Cette proposition peut être considérée comme étant le but premier de tout le traité vu que les planètes tournent effectivement sur des ellipses avec le Soleil dans un foyer. La tâche reste toujours la même que dans les deux problèmes précédents : il faut trouver une expression de la force centripète en un point quelconque P c'est-à-dire une expression égale à $SP^2 \cdot QT^2 / QR$, dans laquelle n'apparaît plus qu'un terme en SP , mêlé à des constantes. NEWTON transforme l'expression 2.7 en fonction des grandeurs caractéristiques de l'ellipse comme la taille d'un axe et le «*latus rectum*», paramètre qui indique le rapport entre les axes et que NEWTON note L . Par un enchaînement très complexe de rapports, NEWTON parvient à énoncer cinq proportionnalités qu'il combine pour trouver finalement l'expression de l'inverse de la force :

$$SP^2 \cdot QT^2 / QR = L \cdot SP^2 \quad (2.8)$$

Donc la force centripète au point P est inversement comme le carré de la distance.

Ce qui assombrit le résultat de NEWTON, c'est l'ajoute d'un scholie à la fin de sa démonstration du Problème III. En effet, il écrit : «*Donc les planètes majeures tournent sur des ellipses ayant leur foyer au centre du Soleil; et par les rayons menés au Soleil décrivent des aires proportionnelles au temps exactement comme KEPLER l'a supposé. Et le «latus rectum» de ces ellipses est QT^2 / QR , les points P et Q étant séparés par la distance la plus petite possible pour ainsi dire infiniment petite*». Or il est impossible de tirer la conclusion énoncée de la solution du Problème III. Il confond manifestement le problème direct et le problème inverse [44].

Une autre hypothèse pour expliquer l'insertion du scholie est la volonté de NEWTON d'assembler en quelques lignes les trois lois de KEPLER et de les prouver de façon rigoureuse. En effet le **Théorème IV**, suivant directement la solution du Problème III, prouve que la troisième loi de KEPLER est une conséquence de la loi de force trouvée dans la solution du Problème III. Il est vrai que NEWTON avait déjà introduit cette troisième loi de KEPLER dans le scholie du **Théorème II**, mais là elle était admise comme une donnée d'observation et permettait de conclure à la variation de la force en $1/R^2$ tandis qu'ici elle est déduite de la loi de la force.

Revenons à la différence entre le problème direct et le problème inverse dans la détermination des orbites. Le problème direct étant la question de calculer la loi de force si la trajectoire est donnée, tandis que le problème inverse demande une réponse à la question de déterminer la trajectoire étant donnée la loi de force. L'intérêt parmi les savants anglais du XVII^e siècle était plutôt de trouver

une réponse au problème inverse, mais NEWTON dans le «*De motu*» résolut le problème direct. En effet le passage de la loi de force à la trajectoire est mathématiquement plus difficile que la solution du problème direct. Car si on connaît la trajectoire, on est en présence d'une représentation géométrique de la situation tandis que dans le cas du problème inverse, la construction de l'objet géométrique cherché est demandée.

NEWTON se rapproche le plus de la solution du problème inverse dans le Problème IV du «*De motu*». Celui ci est formulé de la façon suivante : «*Supposant que la force centripète est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre, et connaissant la quantité de cette force, on demande l'ellipse qu'un corps décrira s'il est lancé d'un lieu donné, avec une vitesse donnée, le long d'une ligne droite donnée*».

Or, la réponse au Problème IV a une portée restreinte, puisque l'énoncé même du problème présuppose que l'orbite est une ellipse. Néanmoins NEWTON dans la discussion de sa solution du problème arrive à la conclusion que d'autres trajectoires sont possibles, appartenant à la famille des coniques, si certaines données initiales sont modifiées.

Jean BERNOULLI avait bien remarqué le point faible dans les démonstrations de NEWTON et les lui reprocha lors de sa discussion des «PRINCIPIA» [80]. L'évaluation de l'approche newtonienne est plutôt une intuition qu'une démonstration véritable et montre en même temps que NEWTON ne savait pas résoudre le problème par intégration des équations différentielles sous-jacentes.

NEWTON expose alors un programme en vue de reformuler l'astronomie en termes dynamiques avec le scholie qui suit le Problème IV (i.e. le problème de KEPLER) : il est possible de définir les orbites des planètes et par suite, leur temps de révolution ; en comparant la grandeur des orbites, leur excentricité, leur aphélie, leur inclinaison sur le plan de l'écliptique et leurs nœuds, il est possible de savoir si une même comète revient assez souvent chez nous. Le texte devient alors plus mathématique et explique d'abord le calcul de la trajectoire d'une comète qui au temps de NEWTON était considéré comme étant rectiligne. NEWTON explique comment, avec quatre observations faites à des dates différentes, on peut procéder par itération à trouver l'arc d'ellipse ou de parabole. Le procédé indiqué par NEWTON suppose que l'on sache déterminer un parcours sur une conique en fonction du temps. Il faut recourir à la loi des aires, une fois encore, mais cela sous une forme pratique correctement applicable.

La suite du scholie est consacrée à la solution approchée du «*problème de KEPLER* » que NEWTON donne par une méthode purement géométrique.

Le restant du traité est dédié au mouvement accéléré de la chute des corps (Problème V) créant ainsi le lien avec les théories de GALILEI [81] mais aussi au mouvement des corps dans les milieux résistants, sujet qui trouvera plus tard sa place dans le LIVRE II des «PRINCIPIA».

Une question subsiste après la revue du contenu du «*De motu*» : c'est la position de NEWTON devant la question quant à la nature de la loi de la gravitation. Les différences entre les différentes versions du traité sont significatives. Le premier manuscrit semble être une sorte de jeu, un plan d'action risqué plu-

tôt qu'un programme bien défini. Il faut noter que les principes de base sont loin d'être définis de façon sûre. Il n'y a pas d'argument quant à la gravitation universelle, le terme n'apparaît même pas et les conséquences explicites d'une telle idée aptes à supporter le nouveau paradigme sont ignorées [76]. Le texte admet des forces centripètes suivant la loi des carrés inverses, dirigées vers les centres du Soleil, de Jupiter, de Saturne et de la Terre. Elles sont introduites au **Corollaire 5** du **Théorème II** qui postule : *«Si les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des rayons, les forces centripètes sont inversement comme les carrés des rayons : et réciproquement»*. Un scholie conclut alors : *«Le cas du Corollaire 5 a lieu pour les corps célestes. Les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des distances à partir du centre commun autour duquel ces corps sont en révolution. C'est le cas des grandes planètes tournant autour du Soleil, et des petites autour de Jupiter, comme l'ont désormais établi les astronomes»*. Il est intéressant de noter qu'ici NEWTON omet une référence à Saturne parce que certains astronomes doutaient de la découverte des satellites de cette planète par CASSINI II.

Quant à la gravitation ici sur Terre, NEWTON en parle dans un scholie, directement à la suite du Problème V traitant de la chute des corps : *«Par le problème précédent on définit le mouvement des projectiles dans notre air, et par celui-ci le mouvement des corps pesants tombant perpendiculairement, en admettant cette hypothèse que la pesanteur est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre dynamique de la Terre, et que l'air est un milieu non résistant. Car la pesanteur est une espèce de force centripète»*. NEWTON introduit ici la loi des carrés inverses non pas comme une vérité empirique mais plutôt comme une hypothèse. Dans sa dernière phrase, NEWTON établit en fait une analogie entre les forces centripètes et la force gravitationnelle qui a la même forme algébrique que les premières. Mais il se garde d'en postuler l'identité.

Dans la version commentée ici du *«De motu»*, plusieurs questions essentielles subsistent. NEWTON avait manifestement en vue d'écrire un texte sur les phénomènes célestes et d'établir des méthodes pour une vérification empirique de ses théories. Il était encore loin des aspirations que les *«PRINCIPIA»* veulent remplir quelques années plus tard, celles de fonder une véritable *«philosophie naturelle»*.

D'autres manuscrits de NEWTON constituant des révisions du texte remis à HALLEY ont été étudiés par HERIVEL [82]. Ainsi dans une version amendée du *«De motu»* on trouve la première affirmation de la gravitation universelle dans un long scholie que NEWTON a ajouté au **Théorème IV** où il parle de l'interaction mutuelle des planètes quand il dit : *«... ces observations ne tiennent pas compte des mouvements irréguliers très petits qui sont négligés ici et qui font que l'ellipse dévie un peu de sa forme et de sa position actuelle ... »*. Ce paragraphe affirme clairement les actions des planètes entre elles et sur le Soleil. La conséquence en est qu'il n'est pas possible de déterminer les positions exactes des corps célestes et que seulement les orbites moyennes restent calculables. Dans la même version du manuscrit, NEWTON fait encore

l'ajoute suivante au scholie à suite du Problème V : «*La gravité est une sorte de force centripète qui tient la Lune sur son orbite mensuelle autour de la Terre comme les carrés des deux distances du centre de la Terre ou presque*». C'est la première référence explicite de NEWTON à une explication de l'orbite de la Lune à travers la loi de la gravitation. La forme de cette loi n'est plus proposée ici comme une hypothèse telle que dans la version discutée plus haut du «*De motu*» mais elle acquiert ici une confirmation empirique. Mais cependant NEWTON n'affirme pas la qualité différente de la gravitation quand il répète que «*la gravité est une sorte de force centripète*» [76].

Dans l'histoire des sciences exactes, la séquence des quatre théorèmes avec les sept problèmes associés, précédés de trois définitions et de quatre hypothèses, représente un des changements de paradigme le plus significatif. C'est la création de toutes pièces d'une nouvelle approche de la physique céleste basée sur le concept des forces centripètes. On peut considérer le «*De motu*» comme une réalisation de l'idéal keplérien qui, le premier tentait de créer une dynamique expliquant les phénomènes célestes [18]. Mais des mondes séparent les idées de KEPLER et NEWTON. Celles du premier furent purement intuitives respectivement furent influencées par la physique d'ARISTOTE, tandis que NEWTON avait forgé de toutes pièces un système révolutionnaire dynamique basé sur les concepts de force, de moment, de masse et d'inertie. NEWTON avait bel et bien construit une nouvelle physique et dépassait ainsi KEPLER, GALILEI, DESCARTES, et même Ch. HUYGENS.

Après une telle performance, il devient d'une importance secondaire d'établir la date exacte de la rédaction du traité et de sa refonte dans les «PRINCIPIA». Le premier document daté dans lequel le texte apparaît est le Registre de la «*Royal Society*» sous la date de novembre 1684. L'exemplaire effectivement envoyé n'a pu être retrouvé mais, comme il a été décrit plus haut, il existe plusieurs versions dont au moins quatre textes manuscrits à la bibliothèque de Cambridge et à Londres [83, 57].

Leur titre commun est «*De motu*». Ce sont des versions soit simplifiées, soit encore grossières, des «PRINCIPIA» que NEWTON réécrit et enrichit de façon permanente. Le petit écrit «*De motu*» est ainsi le noyau initial d'un ouvrage énorme qui contiendra près de deux cents propositions en plus de cinq cents pages. Le texte a ainsi grossi dans des proportions incroyables au fil des rédactions successives entre novembre 1684 et janvier 1687.

La lecture du «*De motu*» ne s'avère pas seulement intéressante du point de vue de la genèse de l'idée de la loi de la gravitation, mais l'ouvrage donne en même temps une première introduction au style purement déductif de NEWTON et fait ressentir le chemin énorme que cet isolé a accompli en moins de trois ans où il a produit une œuvre énorme qui occupera les mathématiciens et astronomes pendant tout le XVIII^e siècle. Les «PRINCIPIA» sont d'un accès difficile et peuvent décourager les lecteurs même compétents. NEWTON le savait pertinemment quand il déclarait dans le préambule du LIVRE III : «*Cependant parce qu'il se trouve dans ces LIVRES I et II un grand nombre de propositions qui pourraient retarder excessivement les lecteurs même compé-*

tents en mathématiques, je n'invite nullement à les étudier toutes. Il suffira de lire soigneusement les définitions, les lois du mouvement et les trois premières sections du livre premier, puis de passer à ce livre-ci qui concerne le système du monde, en consultant lorsqu'on le voudra les autres propositions des deux premiers livres qui sont citées ici» [1].

Comme le «*De motu*» est de loin plus modeste en propositions il devient plus accessible aussi et il est essentiel de se familiariser avec ce petit texte avant les raffinements des «PRINCIPIA» concernant la gravitation universelle.

2.3 Les «Principia», œuvre maîtresse de Newton



LES «PRINCIPIA» peuvent être lus sous divers éclairages. Le titre est déjà révélateur. NEWTON veut reprendre et développer les «*Principes de la Philosophie*» [84] de DESCARTES dont l'édition latine parut en 1644 et la traduction française en 1647. En effet selon NEWTON, DESCARTES avait confondu dans son œuvre, les corps créés avec l'étendue «*éternelle, infinie et incréée*», ce qui veut dire avec l'espace vide, confusion qui conduit non seulement à des erreurs métaphysiques mais aussi à des erreurs en physique, parce qu'elle rend impossible le mouvement des planètes et même des projectiles. Les «PRINCIPIA» sont foncièrement anti-cartésiennes ; «... leur dessein est d'opposer à la philosophie cartésienne et à son apriorisme et son essai de déduction globale une philosophie autre, assez différente, une philosophie plus empirique et en même temps plus mathématique que celle de DESCARTES, une philosophie qui vise à l'étude du cadre mathématique de la nature et des lois mathématiques des forces qui agissent dans la nature.» NEWTON le dit de la façon suivante : «... à partir des phénomènes du mouvement, rechercher les forces de la nature, et à partir de ces forces, démontrer d'autres phénomènes.» [72]

Le deuxième mode de lecture des «PRINCIPIA», c'est de voir dans ce livre le premier traité de physique mathématique qui lie deux niveaux cognitifs : le mathématique et l'expérimental. Dans les «PRINCIPIA», NEWTON explore les conséquences de sa construction de la gravitation universelle commencée dans le «*De motu*» respectivement les annotations diverses de ce traité entre 1684 et 1685, avec les moyens des mathématiques, de la géométrie d'abord, des proportions ensuite, mais aussi sans le divulguer, avec son calcul des fluxions et la théorie des limites. NEWTON reste pleinement conscient que ce qu'il explore de cette façon n'est pas la nature elle-même mais une abstraction mathématique de celle-ci, celle des lois de KEPLER décrivant la première. Mais comme il est intéressé dans la nature véritable du monde physique, NEWTON se doit de comparer sa construction d'un champ gravitationnel avec un centre d'attraction et un point matériel gravitant autour de celui-ci à l'univers astronomique révélé par les multiples observations depuis l'Antiquité la plus reculée.

NEWTON s'en rend compte et déclare au début de la Section XI du premier livre : *«J'ai traité jusqu'ici des mouvements des corps attirés vers un centre immobile, tel qu'il n'en existe peut être aucun dans la nature ; car les attractions ont continué de se faire vers des corps, et les actions des corps qui attirent et qui sont attirés sont toujours mutuelles et égales par la troisième loi.»* [1]

Afin de relier sa construction mathématique au monde matériel il doit donc traduire les éléments de base sur lesquels repose celle-là à des équivalents physiques. Ainsi l'espace géométrique, le temps mathématique, les points matériels deviennent l'espace physique, le temps phénoménologique et les corps astronomiques possédant un poids. NEWTON réussit ainsi une traduction intégrale de son concept mathématique dans le monde physique. Il suit ainsi de façon quasi inverse sa démarche initiale quand il a exprimé des faits empiriques simples en langage mathématique. Mais il jouit également de la liberté d'exploiter les conséquences mathématiques de faits qui, à première vue, semblent arbitraires. Ainsi NEWTON peut s'intéresser à la troisième loi de KEPLER qui pour des orbites circulaires donne une force proportionnelle à $1/r^2$, mais il est libre aussi d'examiner d'autres lois pour la force attractive, ce qu'il fait d'ailleurs. La comparaison de sa construction mentale d'un système à un corps et le monde physique amène alors NEWTON à la conception d'un système de deux corps dans lequel deux masses s'attirent mutuellement. Il est alors forcé de modifier sa construction mentale primaire et il applique à la nouvelle ses techniques mathématiques et arrive à un ensemble de résultats plus complexes que ceux dont il est parti. La comparaison de ces nouveaux résultats avec les phénomènes réels lui suggère que son modèle est toujours trop simple et NEWTON introduit un troisième corps perturbateur. En continuant cette itération, NEWTON obtient un système contenant une multitude de corps de formes et de masses différentes qui peuvent en surplus posséder des contraintes dans leur mouvement. NEWTON développe ainsi des principes mathématiques dans un contexte mathématique, mais qui se laisse appliquer au monde des phénomènes physiques dans le monde réel, observables et reconstituables à travers des expériences [85].

La composition des «PRINCIPIA» reflète le mode de construction décrit. Ainsi les LIVRES I et II ont comme sujet les modèles mathématiques tandis que le LIVRE III contient l'application des modèles au monde physique. NEWTON le dit d'ailleurs clairement dans l'introduction de ce troisième livre quand il écrit : *«J'ai donné dans les Livres précédents les principes de la Philosophie naturelle, et je les ai traités plutôt en Mathématicien qu'en Physicien, car les vérités mathématiques peuvent servir de base à plusieurs recherches philosophiques, telles que les lois du mouvement et des forces motrices. Et afin de rendre les matières plus intéressantes, j'y ai joint quelques scholies dans lesquels j'ai traité de la densité des corps et de leur résistance, du vide, du mouvement du son, et de celui de la lumière, qui sont à proprement parlé, des recherches plus physiques. Il me reste à expliquer par les mêmes principes mathématiques le système général du monde»* [1].

A côté de cette lecture quasiment génétique du point de vue des idées,

il y a une troisième approche : C'est la comparaison des différentes éditions des «PRINCIPIA» publiées durant la vie de NEWTON. Il va de soi que cette lecture devrait rester limitée aux questions en relation avec les idées sur la gravitation de NEWTON. Néanmoins un court rappel des péripéties des trois premières éditions des «PRINCIPIA» contribuera à comprendre la progression des idées de NEWTON entre 1686 et 1723. Le manuscrit du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» fut présenté à la Royal Society le 28 avril 1686. Les registres de la société savante relatent que «*Dr VINCENT présentait à la Société un manuscrit ayant comme titre : «Philosophiae Naturalis principia mathematica» et dédié à la Société par Monsieur Isaac NEWTON, dans lequel il donne une démonstration mathématique de l'hypothèse Copernicienne telle que proposée par KEPLER, et explique tous les phénomènes des mouvements célestes par la supposition unique d'une gravitation vers le centre du Soleil qui diminue avec l'inverse des carrés de la distance.*» [86]

La description est particulièrement intéressante parce que les PROPOSITIONS I à XI du LIVRE PREMIER traitent des trois lois keplériennes de façon que la démarche de NEWTON pouvait être interprétée comme donnant un fondement dynamique aux théories keplériennes. Or nulle part dans ce LIVRE I le nom de KEPLER n'est mentionné, ce qui montre clairement que NEWTON met bien au-dessus du travail empirique de celui-là ses propres démonstrations mathématiques.

Déjà le 19 mai 1686, la Royal Society prend la décision de faire imprimer le travail de NEWTON, et HALLEY, dans sa lettre du 22 mai 1686 qui informera NEWTON de la décision prise, revient à la question des prétentions de HOOK pour avoir découvert la loi de la gravitation et il suggéra à NEWTON de tenir compte des affirmations de HOOK. NEWTON répondit par une lettre assez furieuse en date du 26 mai 1686 dans laquelle il renvoya sèchement les prétentions de HOOK [74]. Entre-temps l'impression se poursuivait, non sans discussions épistolaires entre HALLEY et NEWTON sur le contenu du LIVRE II et sur l'opportunité d'ajouter ou non le LIVRE III ayant comme sujet le Système du Monde. HALLEY soulignait auprès de NEWTON que c'était précisément le LIVRE III qui rendrait les «PRINCIPIA» intéressants auprès des philosophes sans connaissances mathématiques, tout en précisant que ce groupe était le plus grand des intéressés potentiels.

Le 1^{er} mars 1686/7, NEWTON annonça à HALLEY qu'il avait envoyé le LIVRE II par la poste ; le reçu fut confirmé par une lettre du 7 mars écrite de HALLEY à NEWTON. Certains problèmes techniques concernant la composition furent résolus par HALLEY et le travail se poursuivit. Le manuscrit du LIVRE III parvint à HALLEY le 5 avril et fut présenté à la «*Royal Society*» le jour suivant. La composition et l'impression des trois livres furent terminées le 5 juillet 1687. L'édition est estimée entre 250 et 300 exemplaires, ce qui rend cette première édition extrêmement rare.

Il faut absolument relever la contribution de E. HALLEY à cette première édition des «PRINCIPIA» qui allait beaucoup plus loin que l'encouragement moral depuis sa visite à Cambridge mais englobait aussi des tâches pratiques

telles que les tractations avec les imprimeurs, la lecture des épreuves et les conseils pour la présentation graphique du Traité. La correspondance entre NEWTON et HALLEY entre 1684 et 1686 en témoigne, mais renseigne aussi sur les problèmes scientifiques débattus entre les deux hommes pendant cette période [74].

HALLEY publia même une recension des «PRINCIPIA» dans les «*Philosophical Transactions*» dont il était l'éditeur [87] en 1687, ainsi qu'un rapport plutôt vulgarisateur destiné au Roi et expliquant le phénomène des marées, qui fut plus tard repris dans les «*Philosophical Transactions*» [88]

Lire la première édition est une entreprise difficile, même après la publication du livre en fac-similé en 1954 [89]. Beaucoup d'informations concernant les «PRINCIPIA» de 1686 sont contenues également dans l'édition faite par J.-B. COHEN et A. KOYRÉ de la troisième édition du texte avec variantes [90], ainsi que dans [86]. Et en effet des différences sensibles avec les éditions postérieures apparaissent. Citons-en quelques-unes dans le domaine qui nous intéresse ici. Ainsi dans le troisième livre qui porte le titre «*Le Système du Monde*», NEWTON a intercalé encore des règles qu'il nomme hypothèses et qui en réalité forment un groupe assez désordonné. Voici les trois premières :

- Hypothèse I : «*On ne doit pas admettre plus de causes des choses naturelles que celles qui sont à la fois vraies et suffisantes pour l'explication de leurs phénomènes, car la nature est simple et n'est pas prodigue en causes superflues.*»
- Hypothèse II : «*C'est pourquoi les causes (des effets naturels du même genre) sont les mêmes.*»
- Hypothèse III : «*Tout corps peut être transformé en un autre, de n'importe quel autre genre, et tous les degrés intermédiaires des qualités peuvent être induits successivement dans ce corps.*» [91]

Les hypothèses suivantes s'occupent de données astronomiques parlant des «*planètes circumjoviales*» qui suivent la seconde loi de KEPLER, des «*planètes primaires*» obéissant à la troisième loi de KEPLER, «*ce qui est le cas si celles-ci tournaient autour de la Terre*», mais ce qui est le cas pour la Lune. L'ensemble des ces six «*hypothèses*» concernent la structure du système solaire.

La signification des hypothèses IV à IX, liant la première édition des «PRINCIPIA» au traité antérieur «*De motu*», c'est de prouver, tout comme ce dernier, la vérité du système astronomique «*copernico-keplerien*».

NEWTON utilise la désignation «*hypothèse*» dans le sens usuel en astronomie, à savoir celui d'une prémisses de base ou d'une proposition fondamentale de la théorie qu'il va développer dans la suite. Anticipons maintenant sur la deuxième édition. Ici le titre «*Hypothèse*» a disparu et fait place à celui de «*Regulae Philosophandi*». Les hypothèses initiales sont réparties en trois classes dès la deuxième édition et quelques-unes sont tout simplement oubliées. Les deux premières formulent les principes généraux de la science de la nature et sont dénommées dorénavant «*règles*» de raisonnement. NEWTON en ajouta une troisième dès la deuxième édition remplaçant celle qu'il avait laissée tomber. Elle s'énonce :

«*Règle III : Les qualités des corps qui sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.*»

Dans la troisième édition NEWTON ajouta une quatrième règle qui résume sa position épistémologique et qui s'énonce :

«*Règle IV : Dans la Philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomènes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce quelques autres phénomènes les confirment entièrement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions.*» [1]

Dans la deuxième édition, les autres hypothèses IV à IX deviennent des «*Phénomènes*». Seulement deux «*hypothèses*» survivent de la première édition : celle de l'immobilité du centre du Monde et celle sur l'identité des mouvements d'une enveloppe sphérique rigide ou liquide et d'une sphère pleine. Cette position quelque peu ambiguë n'empêche pas NEWTON de déclarer fièrement qu'il n'invente pas d'hypothèses et que celles-ci n'ont pas de place dans sa philosophie naturelle.

NEWTON n'était pas satisfait de certaines autres formulations dans la première édition qu'il a modifié par la suite : ainsi dans la seconde Section du LIVRE I, il changeait la méthode pour trouver les forces auxquelles sont soumis des points matériels sur une orbite donnée. Dans la section VII du second livre il modifiait la théorie de la résistance des fluides en profitant de nouvelles expériences. Les plus grands changements furent entrepris par NEWTON dans le texte du LIVRE III. A côté de la refonte épistémologique qui mena à la distinction entre «*Règles*» et «*Hypothèses*», décrite plus haut, des changements concernant la théorie de la Lune et de la précession des équinoxes furent introduits dès la seconde édition. Il en fut de même pour la théorie des Comètes.

Quel fut l'écho de cette première édition des «*PRINCIPIA*»? Il y avait d'abord la correspondance scientifique dans les revues érudites de l'œuvre de NEWTON. Une de ces appréciations semble être rédigée par John LOCKE [86] qui écrit : «*C'est pourquoi les Philosophes et principalement les modernes se sont imaginés que Dieu s'est prescrit de semblables Lois, pour la formation et la conservation de ces Ouvrages, et ont tenté d'expliquer par là divers effets de la Nature. Monsieur NEWTON se propose le même but, et prend la même voie dans ce traité expliquant dans les deux premiers Livres les règles générales des Mécaniques naturelles, c'est à dire les effets, les causes et les degrés de la pesanteur, de la légèreté, de la force élastique, de la résistance des fluides, et des vertus qu'on appelle attractives et impulsives. Il entreprend, dans le LIVRE III d'expliquer le Système du Monde, les degrés de pesanteur, qui portent les corps vers le Soleil, ou vers quelques Planètes, et qui étant connus lui servent à rendre raison du mouvement des Planètes, des Comètes, de la Lune et de la Mer.*» [92]

Les articles dans les «*Acta Eruditorum*» de 1688 concernant les «*PRINCIPIA*» ouvrirent la querelle avec LEIBNIZ jusqu'à la mort de celui-ci. LEIBNIZ annota

d'une façon critique sévère sa copie de l'œuvre de NEWTON sans pour autant provoquer une réaction dans les révisions successives de la première édition. Ceci ne fut pas le cas de l'article dans les «*Acta Eruditorum*» dont l'auteur relevait que NEWTON avait attribué à Dieu le soin de placer les planètes aux distances qu'il fallait. NEWTON modifia cette affirmation et Dieu n'apparaissait plus dans la deuxième édition dans ce contexte.

La revue des «PRINCIPIA» dans le «*Journal des Sçavans*» [93] est peut-être à la base de l'élimination des «*Hypothèses*» au début du LIVRE III dès la deuxième édition. L'auteur, tout en affirmant que le livre constitue «*une Mécanique la plus parfaite qu'on puisse imaginer*», constate pourtant que NEWTON «*n'a pas considéré leurs principes en Physicien mais en simple Géomètre*». Il fait alors le reproche que NEWTON avoue lui-même ce déficit au commencement du LIVRE III expliquant le Système du Monde. «*Mais ce ne sont pas des hypothèses qui sont la plupart arbitraires, et qui par conséquent ne peuvent servir de fondement qu'à un traité de pure Mécanique*». L'auteur de l'article illustre sa dépréciation du contenu par un seul exemple : le flux et le reflux de la mer, et il dit que l'explication est : «*que toutes les planètes pèsent réciproquement les unes sur les autres*». L'auteur considère cette explication comme une supposition arbitraire qui n'aurait pas été prouvée. Voilà pourquoi la démonstration de ce fait «*ne peut être mécanique*». Finalement l'auteur recommande à NEWTON de composer «*un ouvrage le plus parfait qu'il est possible*» et pour cela il n'a qu'à donner «*une Physique aussi exacte qu'est la Mécanique*» et il y arrivera quand il a substitué «*de vrais mouvements en la place de ceux qu'il a supposés.*» [93]

NEWTON fut sûrement furieux en lisant que son «*Système du Monde*» est décrit comme étant basé sur un ensemble d'hypothèses arbitraires et ne doit donc pas être considéré comme une vraie «*Physique*». Même s'il n'existe pas de preuves écrites que NEWTON a réagi à l'article cité, tout porte quand même à croire que la modification au début du LIVRE III de la 2^e édition où les «*Hypothèses*» furent remplacées par les «*Regulae Philophandi*» et les «*Phénomènes*» sont la réaction newtonienne à la critique du «*Journal des Sçavans*».

Des nombreuses révisions à la première édition des «PRINCIPIA» proposées par NEWTON, il faut absolument mentionner la nouvelle formulation de la seconde loi du mouvement par laquelle il fit de nombreuses propositions. Finalement il se décida pour la forme suivante : «*que le mouvement produit est proportionnel à la force imprimée et se fait dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.*» [94]. Cette variante de la deuxième loi est spéciale dans le sens que la nature du mouvement en tant que telle n'est pas spécifiée et que NEWTON omet de dire que tout mouvement peut s'ajouter à un mouvement déjà existant. Aussi les deux éditions de 1713 et de 1727 parlent de «*changements qui arrivent dans le mouvement.*»

NEWTON projetait encore d'autres modifications surtout dans la section II du LIVRE PREMIER. Des textes existent parmi les papiers de NEWTON et ont été commentés de façon détaillée dans [86]. Finalement les changements adoptés étaient beaucoup moins drastiques et il suffit de mentionner les propositions

que NEWTON rédigea pour modifier les «*lemmes*» de la section I traitant des «*premières et dernières raisons*» dans le but de donner, au moins de façon implicite, une plus grande importance à sa méthode des «*fluxions*» qui aurait pu donner une base méthodologique différente à tout le LIVRE PREMIER. Finalement NEWTON préféra maintenir son approche synthétique.

Ce fut le LIVRE III sur le «*Système du Monde*» qui subit les ajoutés et modifications les plus importantes lors de la deuxième édition. Les nouvelles dénominations introduites au début de ce livre ont déjà été mentionnées. À côté du problème des trois corps sur lequel NEWTON travailla dans les années 1695, ce fut surtout la théorie de la Lune qui subissait une refonte complète pour la nouvelle édition projetée. Si la première édition avait défini le principe de la solution du problème de l'attraction de trois corps et avait donné une esquisse pour traiter quantitativement ce problème, NEWTON avait reconnu lors de la préparation de la première édition déjà que le problème de la détermination de l'orbite lunaire était le passage obligé pour la vérification de sa théorie de la gravitation universelle. Il se fit fort d'atteindre par sa méthode une exactitude de deux à trois minutes pour ses calculs comparés aux observations. Et il avait besoin des observations de FLAMSTEED, premier astronome royal à Greenwich sans lesquelles son projet ne pouvait progresser. Dans ce but, NEWTON fit une visite à Greenwich le 1^{er} septembre 1694 comme le raconte GREGORY [74] : «*Monsieur NEWTON visita FLAMSTEED ... quand il parlait de la nouvelle édition des «PRINCIPIA». Il croit que la théorie de la Lune est à portée de sa main. Afin d'en déterminer la position, il croit avoir besoin de cinq ou six équations. FLAMSTEED en révéla une qui donne les plus grandes valeurs dans les quadratures ; il lui montra quelque cinquante positions de la Lune réduites dans une table. L'équation de NEWTON donna une position correcte pour les emplacements près des quadratures. Les différences, soit en plus ou en moins, dépendent d'autres causes physiques. Les observations ne sont pas suffisantes pour compléter la théorie de la Lune. Des causes physiques doivent être considérées.*»

Tel fut le début d'une relation de plus en plus orageuse, débouchant sur une haine réciproque des deux antagonistes. Nous aurons l'occasion d'en relater les détails dans le chapitre consacré à la théorie de la Lune de NEWTON. Celui-ci en continuant ses recherches, est de plus en plus dégrisé quant au succès prochain de ses démarches théoriques. Ainsi dans une lettre écrite en février 1695, donc encore au début de son commerce avec FLAMSTEED, il avoue à celui-ci : «*Je trouve la théorie de la Lune tellement difficile et la théorie de la gravitation si nécessaire à sa formulation que je suis sûr qu'elle ne pourra être perfectionnée que par quelqu'un qui comprend la théorie de la gravitation aussi bien ou mieux que moi*» [95].

NEWTON était trop fixé sur ses projets et ne tenait pas assez compte de la personnalité de FLAMSTEED, ce qui, après un nombre de péripéties, menait à la rupture définitive. Il considérait sa théorie lunaire comme un échec partiel et imputa la cause à FLAMSTEED en se vengeant sur celui-ci par le fait d'omettre les références à celui-ci dans la seconde édition des «PRINCIPIA» aux endroits

où il l'avait nommé dans la première.

Il est peut-être faux d'affirmer que la théorie de la Lune modifiée dans les années 1690 fut un échec. En effet NEWTON parvenait à définir un certain nombre d'inégalités lunaires qu'il décrit dans un texte de 1702, intitulé «*Theory of the Moon's Motion*» [96] et qui indiqua des règles de calcul pour sept corrections de l'orbite sans pour autant donner une explication théorique. Des années plus tard, il permit à David GREGORY d'en faire une copie pour la publier dans son «*Astronomiae physicae et geometricae elementa*» [97]. Il composa dans ce contexte également un scholie qu'il inséra dans la seconde édition à la fin de sa théorie de la Lune et qui discuta les fondements théoriques de ces inégalités qui diffèrent légèrement par rapport au texte de 1702.

Malgré tout, NEWTON était persuadé que ses efforts sur la théorie de la Lune étaient restés vains et ses corrections insérées dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» faisaient pauvre figure à côté de la réécriture complète de la théorie de la Lune en 19 propositions qu'il avait projetée. En effet la plus importante des corrections dans la 2^e édition était une modification purement cinématique du mouvement du centre de l'orbite lunaire sans fondation aucune dans la théorie de la gravitation [96]. NEWTON n'arrivait pas non plus à cette date à résoudre le problème de la progression de la ligne des apsides en vue de faire concorder théorie et observations. FLAMSTEED constatait avec une satisfaction certaine que dans cette théorie révisée, les positions théoriques et observées de la Lune différaient toujours jusqu'à 10 minutes, et cela malgré les affirmations d'un HALLEY et d'un GREGORY qui avançaient des différences de deux à trois minutes. Et il faut mentionner ici la constatation que CLAIRAUT fit dans le texte «*Exposition abrégée du système du monde*», rédigé en grande partie par lui mais publié sous le nom de la Marquise DU CHÂTELET [98] et dans lequel il se déclara déçu et peu impressionné par les nouvelles corrections de NEWTON.

Sur le continent, la théorie de la Lune reprit à zéro à partir de 1740 et les corrections de NEWTON dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» n'apportaient rien pour ces nouvelles tentatives basées essentiellement sur l'analyse mathématique suivant la méthode leibnizienne.

L'année 1708 fut en quelque sorte l'année dans laquelle la seconde édition débuta concrètement. NEWTON en avait parlé d'abord avec Fatio DE DUILLIER, puis avec D. GREGORY et il continuait à compiler des tables de corrections à incorporer dans cette nouvelle édition. Or aucun des deux hommes n'arrivait à accrocher NEWTON pour de bon et le déménagement de celui-ci à Londres en vue de prendre ses nouvelles fonctions comme «*Master*» de l'office de la «*Monnaie*» après avoir été «*Warden*» de la même institution quelques années déjà, l'occupait fortement. Il continua quand même avec les préparations de la nouvelle édition et butait surtout sur certaines parties du LIVRE II qu'il considérait comme étant très difficiles. A toutes ses difficultés, s'ajoutait le début de la querelle avec LEIBNIZ concernant la priorité dans l'invention du calcul différentiel et intégral qui fut ouverte par une lettre de LEIBNIZ à Hans SLOANE, secrétaire de la Royal Society écrite au printemps 1711.

Néanmoins en 1708, aussi bien GRÉGORY que DE MOIVRE étaient persuadés que la nouvelle édition des «PRINCIPIA» serait sans presse à Cambridge, pour la bonne raison qu'il devenait de plus en plus difficile de trouver encore un exemplaire de l'édition de 1688. C'est ici que Richard BENTLEY entra en scène, à la fois dans sa fonction de «*Master*» du «*Trinity College*», et aussi comme entrepreneur. BENTLEY, le théologue qui probablement n'a jamais lu l'œuvre de NEWTON, avait beaucoup investi pour gagner la confiance de ce dernier. Il en profita pour manoeuvrer NEWTON dans l'entreprise d'une seconde édition des «PRINCIPIA», ceci aussi vite que possible, en lui faisant miroiter une bonne affaire financière. NEWTON, toujours insatisfait des modifications et corrections qu'il se proposait d'inclure dans la deuxième édition, n'était pas chaud pour cette entreprise bien que BENTLEY s'y engagea à fond et commanda le papier, fixa le format et choisit les caractères. Finalement NEWTON se rétracta et rien ne se passa pendant toute une année. Quand les activités reprirent en 1709, une nouvelle figure en la personne du jeune Roger COTES, mathématicien comme NEWTON, fut interposée entre NEWTON et BENTLEY afin de reprendre la coordination de l'édition. De son côté BENTLEY s'effaça après avoir envoyé une copie annotée de la première édition à COTES et l'avoir informé du désir de NEWTON de le recevoir à Londres pour lui remettre une grande partie des corrections telles qu'il voulait les voir imprimées. La visite eut lieu en juillet 1709 et dorénavant le «*Plumian Professor of Astronomy*» de Cambridge fut en charge de la préparation de la nouvelle édition.

NEWTON commença à prendre confiance en COTES après que celui-ci eut découvert deux erreurs et qu'il eut contrôlé plusieurs propositions du LIVRE I. COTES persista à relire et à contrôler pas à pas le texte avant de le donner à l'imprimeur. Le 15 avril 1710 il pouvait rapporter à NEWTON que les presses de l'Université avaient terminé l'impression du texte à leur disposition et il demandait à NEWTON de lui envoyer la suite. Les 224 pages imprimées contenaient le LIVRE I en entier, les sept premières propositions du LIVRE II et le Lemme II sur la méthode newtonienne des «*moments*», une démarche proprement algorithmique basée sur son calcul des fluxions et qui lui permettait de résoudre dans le LIVRE II des problèmes relatifs au mouvement des projectiles dans les milieux résistants. COTES reconnut immédiatement que le LIVRE II demandait un travail de préparation plus intensif que le LIVRE I et il est certain que le texte du LIVRE II dans la 2^e édition doit beaucoup à la réflexion de COTES. Il modifia le texte de plusieurs propositions et corollaires lui-même et demanda à NEWTON de nouvelles formulations pour d'autres. Dans une lettre du 1^{er} mars 1710, NEWTON remercia COTES de ses suggestions et remarques ainsi que pour les soins qu'il porta à la préparation de cette édition [99]. Pendant ce travail d'édition, NEWTON accepta tous les changements proposés par COTES. Celui-ci restait respectueux dans ses lettres à NEWTON, mais déterminé quand il était persuadé d'avoir raison. Et NEWTON, quant à lui, n'utilisait jamais le poids de son autorité pour imposer ses propres vues. Stimulé par COTES, NEWTON se décida progressivement à enrichir cette deuxième édition beaucoup plus qu'il ne l'avait projeté et les LIVRES II et III de la deuxième édition doivent leur

forme définitive surtout à l'initiative de COTES.

L'impression encourut certaines difficultés vers le milieu de l'année 1710, faute de textes à composer, et COTES en profita pour prendre un peu de vacances dans son pays. Il retourna à Cambridge le 4 septembre et demanda à NEWTON de lui envoyer au plus vite la partie restante de sa copie révisée. Celui-ci s'exécuta le 13 septembre. Mais l'impression ne reprit pour de bon que le 23 juin 1711 suite à des difficultés tant matérielles que conceptuelles et NEWTON n'avait toujours pas livré ses dernières corrections et modifications et ne s'était pas encore prononcé sur le texte définitif d'une des propositions du LIVRE II. Le 19 juillet COTES rappela à NEWTON cette situation tout en le priant de renvoyer les épreuves du texte imprimé jusqu'ici. NEWTON, de son côté, s'impatientait et par une lettre du 28 juillet 1711, il avoua franchement qu'il avait des choses plus importantes à faire et donc, ne pouvait pas s'occuper de mathématiques. Et c'est seulement six mois plus tard qu'il daigna prendre position sur la proposition controversée du LIVRE II. Mais en même temps il rassura COTES que le LIVRE III ne devrait pas poser de difficultés. Mais s'il y en avait, COTES devrait les lui soumettre car il aspirait à terminer le texte.

Pendant ce temps, COTES continuait la lecture du texte et il s'occupa particulièrement de la théorie des marées et de celle de la Lune, la première étant complexe par les effets sur les eaux de l'action conjointe de la Lune et du Soleil, la seconde par l'action gravitaire commune du Soleil et de la Terre sur la Lune. La théorie lunaire occupe une place de choix dans le LIVRE III où elle est traitée dans 10 propositions et dans un scholie assez long commençant par les mots : *«J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvements de la Lune qu'on pouvait les déduire de la théorie de la gravité ... »*[1]. Les discussions sur les deux problèmes sont le sujet de deux douzaines de lettres échangées entre COTES et NEWTON pendant la période du 7 février 1712 au 15 septembre de la même année [99]. Ce long échange épistolaire entre NEWTON et COTES termina pratiquement leurs discussions sur le plan purement technique. NEWTON ressentait avoir terminé son travail quand il se refusait de modifier le scholie terminant sa théorie lunaire que COTES voulait encore changer. Pourtant le 14 octobre 1712, NEWTON se reprit une dernière fois en envoyant à COTES un texte sur la théorie des Comètes ainsi que la conclusion générale du LIVRE III juste avant le scholie général qu'il lui fit parvenir le 2 mars 1713. La correspondance entre COTES et NEWTON reprit à ce sujet et fait preuve de multiples versions que ce dernier avait proposées et dont les différences étaient quelquefois minimales. Le passage le plus célèbre et remanié à plusieurs tours est sans doute celui où NEWTON parle d'abord de la nature de la gravitation pour enchaîner ensuite sur sa conception de philosophie des Sciences : *«Je n'ai pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité, et je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse : et les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale. Dans cette philosophie, on tire les propositions des phénomènes et on les rend ensuite générales*

par induction. C'est ainsi que l'impénétrabilité, la mobilité, la force des corps, les lois du mouvement, et celles de la gravité ont été connues. Et il suffit que la gravité existe, qu'elle agisse selon les lois que nous avons exposées, et qu'elles puissent expliquer tous les mouvements des corps célestes et ceux de la mer» [1, 86].

COTES termina l'index en avril 1713 et il essaya d'avoir l'approbation de NEWTON pour la préface qu'il se proposait d'ajouter à la deuxième édition des «PRINCIPIA» et sur laquelle nous reviendrons par la suite. Ce fut Samuel CLARKE, le familier de NEWTON et son porte-parole dans sa querelle avec LEIBNIZ, qui la lut et la retourna à COTES avec ses commentaires. Finalement COTES pouvait informer ce dernier que l'impression était terminée le 18 juin 1713. L'édition était tirée probablement à 750 exemplaires. Les relations entre NEWTON et COTES prirent une fin plutôt abrupte car le premier n'envoya même pas une lettre de remerciements au second. Par contre il examina la deuxième édition terminée pour trouver quelque vingt fautes et il reprochait quasiment à COTES de ne pas les avoir repérées. COTES était plutôt mécontent de cette attitude et il le signala d'ailleurs à NEWTON [99]. Quelles sont maintenant les modifications les plus importantes dans cette deuxième édition vis à vis de la première? La seconde édition changeait peu dans le LIVRE I où, sur base des faits connus en astronomie, la loi de l'attraction suivant l'inverse des carrés de la distance était bien établie. Les démonstrations classiques de NEWTON des lois de KEPLER, données déjà dans la première édition, n'appelaient pas à une révision. Tel ne fut plus le cas pour le LIVRE II et sa section VII qui retardaient l'avancement de la deuxième édition de plus d'une année. Il en était de même du LIVRE III dont la forme définitive restait encore à concevoir. NEWTON voulait afficher ici ses convictions profondes qui postulaient que des relations quantitatives pouvaient être dérivées à partir de faits observés. Seule cette construction mérite le nom de science selon son expression «*Si l'histoire de la nature pouvait fournir des matériaux pour la philosophie de la nature, elle n'en était pourtant pas de la philosophie*» [100].

Ainsi le LIVRE III débute avec une déclaration de principes philosophiques concernant la nouvelle manière de philosopher et NEWTON distingue ici des «*règles pour philosopher, des hypothèses et des phénomènes*». Ainsi NEWTON formule la troisième règle, peut-être sa plus importante constatation épistémologique, dans les termes suivants : «*Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenant à tous les corps en général*» [1]. Cette règle opposée aux cartésiens, aux adeptes de la philosophie mécaniste, mais aussi à LEIBNIZ, faisait la distinction claire et nette entre la philosophie hypothétique de ses adversaires et la sienne.

NEWTON ajouta un nouveau scholie à la PROPOSITION IV traitant de la gravitation de la Lune vers la Terre. Cet ajout fit la corrélation entre l'orbite que décrit cette dernière et l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre. NEWTON y vit la preuve décisive pour la réalité de la force gravitationnelle et il conclut : «*Donc la force qui retient la Lune dans son orbite est celle-là même*

que nous appelons gravité ... » [1]. Il faut rappeler que dans la première édition, NEWTON était bien moins formel car il trouva que l'accélération centripète de la Lune différa de 0.5% de la valeur théorique, valeur qu'il corrigea à 0.025% dans l'édition de 1713 sans pour autant dire comment il était arrivé à ce résultat. Nous y reviendrons dans la suite.

NEWTON entrevoyait encore une autre possibilité pour prouver l'exactitude de son système au moyen de la théorie de la précession des équinoxes. A cette fin il avait ajouté plusieurs corollaires, dont le septième est le principal, à la PROPOSITION LXVI du LIVRE I qui est le théorème central de la théorie newtonienne des trois corps. En admettant le troisième corps non pas comme un corps séparé, mais comme un anneau de matière, NEWTON arriva à un résultat de $49'58''$ pour la précession, une excellente approximation aux $50''$ déduits des observations. Or il est certain aujourd'hui que NEWTON a manipulé les chiffres [101] tout comme il le fit dans le cas de l'accélération gravitationnelle.

La précession des équinoxes est due à une perturbation occasionnée par la non sphéricité de la Terre qui est en rotation autour d'un axe fixe. N'étant pas encore en possession du théorème des moments cinétiques qui est le pendant de la deuxième loi de NEWTON, celui-ci fut contraint à une série d'expédients en vue de résoudre ce problème. Ainsi il analysa d'abord le mouvement des nœuds lunaires et il estima l'action du Soleil pour changer la place de l'orbite lunaire à $20^{\circ}11'46''$ par année. Finalement après des considérations d'ordre géométrique NEWTON calcula l'action du Soleil sur la précession des équinoxes égale à $9'7''20^{IV}$ par an. Or l'attraction de la Lune sur la Terre est bien plus importante pour la détermination de la précession des équinoxes que celle du Soleil. Afin de déterminer celle-là, il se basa sur le rapport des marées basses et des marées hautes. De ce rapport il conclut que la force gravitationnelle de la Lune est de $61/3$ fois plus grande que celle du Soleil et il trouva dans la première édition des «PRINCIPIA» le chiffre excellent déjà cité de $49'58''$.

Or, lors des travaux préparatoires pour la deuxième édition, NEWTON découvrit une erreur dans le lemme I du LIVRE III, introduisant l'anneau de matière et il se devait de le remplacer par deux nouveaux lemmes qui, malheureusement, allaient perturber ses résultats antérieurs et auraient donné un résultat de 50% plus grand pour la valeur de la précession. Il se mettait alors à corriger le rapport des forces attractives du Soleil et de la Lune en reconsidérant la théorie des marées. La correspondance entre NEWTON et COTES en 1711 [99] reflète en détail ces différents essais auxquels les deux hommes étaient mêlés. COTES, dans son travail d'édition, évaluait l'incidence de toutes les propositions faites par NEWTON sur l'ensemble des théorèmes du LIVRE III. Finalement NEWTON parvenait à justifier la valeur de $4\frac{1}{2}$ pour le rapport tant discuté des forces gravitationnelles de la Lune et du Soleil et à l'aide de ce nouveau chiffre parvenait à calculer la précession des équinoxes à une «exactitude» de 1 : 3000. Ce résultat peut paraître ambitieux en se rappelant les fondations de la théorie sur des mesures exécutées pendant la seule année 1667 [102, 103] et entachées d'inexactitudes de tout genre.

C'est seulement après avoir réglé le problème de la précession des équi-

noxes que COTES et NEWTON vinrent à la discussion de la théorie de la Lune condensée dans les PROPOSITIONS XXV à XXXV du LIVRE III. Aussi dans la deuxième édition, NEWTON était incapable de présenter une théorie cohérente du problème. En effet les principes généraux de perturbation sont présentés dans la fameuse section XI du LIVRE I, notamment la PROPOSITION LXVI et ses 22 corollaires, même si NEWTON ne se réfère pas ici expressément au cas spécifique de la théorie lunaire. C'est cette proposition qui documente le mieux l'essentiel de la théorie newtonienne des trois corps s'attirant suivant la loi des carrés inverses même si NEWTON y introduit la restriction que deux des trois corps ont une petite masse vis à vis du troisième. La solution de NEWTON tient compte des mouvements en latitude et en longitude et en particulier de l'équation annuelle. Elle parle également du mouvement de la ligne des apsides, du mouvement des nœuds, de l'évection, du changement de l'inclinaison de l'orbite lunaire et de la précession des équinoxes. Ces résultats purement théoriques sont appliqués dans le LIVRE III dans lequel les propositions et théorèmes déjà cités, décrivent le mouvement de la Lune. Il y a une nette progression des résultats entre la première et la deuxième édition des «PRINCIPIA» même si, encore dans cette dernière, NEWTON est loin de résultats définitifs. Un résultat important fut l'augmentation de la PROPOSITION XXIX sur la variation, mais l'ajout le plus important fut sans doute le scholie suivant la PROPOSITION XXXV. Ce nouveau texte attire une attention particulière car NEWTON y fait un compte rendu de ses recherches lunaires, mentionne les équations qu'il a ajoutées à la deuxième édition et rappelle le texte qu'il a fait publier par GREGORY en 1702 sur la théorie du mouvement de la Lune [96]. NEWTON écrit : «*J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvements de la Lune qu'on pouvait les déduire de la théorie de la gravité . . .* » [1] et il insiste sur le fait que sa théorie lunaire est en réalité une théorie physique, basée sur une loi, physique elle aussi, qui la distingue des théories tabulaires utilisées jusqu'à son époque. Nous allons revenir en détail sur la théorie de la Lune de NEWTON dans un prochain chapitre.

En octobre 1712 NEWTON ajouta encore un texte sur la théorie des comètes et la conclusion générale du LIVRE III juste avant le scholie général. En même temps, il demanda encore des corrections à la PROPOSITION X du LIVRE II traitant du mouvement à un corps dans un milieu résistant dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Cette correction était la conséquence de la visite de Nicolas BERNOULLI en automne de cette année. Celui-ci avait soumis à NEWTON une autre démonstration de cette proposition qui avait donné un résultat différent de celui trouvé par lui [104]. NEWTON, à son tour, fournit une démonstration avec le résultat exact. Dans la même lettre NEWTON annonçait à COTES l'envoi d'un scholie général terminant le LIVRE III qu'il transmettra à COTES le 2 mars 1713 [99]. La correspondance consécutive à cet envoi entre COTES et NEWTON fait preuve des multiples versions que ce dernier avait proposées et dont les différences étaient quelquefois minimes. Le passage le plus célèbre et remanié à plusieurs tours est sans doute celui où NEWTON parle d'abord de la nature de la gravitation pour enchaîner ensuite sur sa conception de philosophie des sciences : «*Je n'ai pu encore parvenir à déduire*

des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité, et je n'imagine point d'hypothèses. Car tout ce qui ne se déduit point des phénomènes est une hypothèse : et les hypothèses, soit métaphysiques, soit physiques, soit mécaniques, soit celles des qualités occultes, ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale. Dans cette philosophie, on tire les propositions des phénomènes et on les rend ensuite générales par induction. C'est ainsi que l'impénétrabilité, la mobilité, la force des corps, les lois du mouvement, et celles de la gravité ont été connues. Et il suffit que la gravité existe, qu'elle agisse selon les lois que nous avons exposées, et qu'elle puisse expliquer tous les mouvements des corps célestes et ceux de la mer» [1]. Initialement NEWTON avait prévu une préface en vue de remercier «le très savant Roger COTES», son collaborateur qui avait corrigé des erreurs et qui l'avait conseillé en vue de reconsidérer certaines parties de son livre. Mais en automne 1712 il supprima ce texte et la seule mention de COTES dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» est sa préface. Celle-ci est une pièce maîtresse pour l'exposition de la théorie newtonienne. Déjà dans une lettre du 18 février 1713 [99], COTES soumit à l'approbation de NEWTON le projet de la préface qu'il avait été chargé d'écrire. Il pense que «*Outre la présentation du livre et des progrès qu'il apporte, il conviendra d'ajouter quelque chose concernant plus particulièrement le mode de philosopher dont il est fait usage, et ce en quoi il se distingue de celui de DESCARTES et d'autres*» [105] à savoir : démontrer à partir des phénomènes naturels le principe de base c'est-à-dire le principe de la gravitation universelle et non pas se borner à simplement l'affirmer. Pour COTES, cette démonstration devrait être fondée d'abord sur la première loi du mouvement, c'est-à-dire la loi de l'inertie suivant laquelle les corps en mouvement, si aucune force n'agit sur eux, se meuvent en ligne droite, ensuite sur le fait astronomique que les planètes ne suivent pas cette ligne droite mais se meuvent sur des courbes. Elles subissent donc l'action d'une force «*qu'il n'est pas impropre d'appeler centripète sur les corps en révolution et attractive pour les corps centraux*» [99]. Mais il se fait que COTES ressent des difficultés à interpréter le vrai sens de cette force d'attraction. La réaction de NEWTON ne se fait pas attendre. Il expose à COTES le sens du mot «*hypothèse*» puis il dit que l'attraction universelle n'est pas une hypothèse mais une vérité établie par induction, et que l'attraction réciproque et mutuellement égale des corps est une confirmation de la troisième loi fondamentale, celle de l'égalité de l'action et de la réaction.

Samuel CLARKE, chargé par NEWTON, faisait remarquer à COTES, qui lui avait soumis son projet de préface que l'attraction n'était pas une propriété «essentielle». A COTES de répondre : «*Monsieur, je vous remercie de vos corrections à ma préface, et particulièrement de votre avis concernant le passage où je paraissais affirmer que la gravité est essentielle aux corps. Je pense tout à fait comme vous que cela aurait donné matière à chicane ; j'ai donc supprimé le passage dès que le Dr CARMON m'a fait connaître votre objection, de telle sorte qu'il n'a jamais été imprimé. Dans ce passage, mon propos n'était pas d'affirmer que la gravité est essentielle à la matière, mais plutôt que nous ignorons les propriétés essentielles de la matière et que, sans ce rapport de notre*

connaissance, la gravité peut prétendre à ce titre aussi légitimement que les autres propriétés que j'ai mentionnées.» [99] Sur ce, COTES corrigea son texte et énonça que la force attractive était une propriété primordiale de la matière.

COTES dans sa préface insiste d'abord sur le fait que la seconde édition est une édition augmentée et corrigée par l'auteur. Après avoir passé en revue les différentes approches en vue d'expliquer la nature, COTES explique que NEWTON est parti d'observations et qu'il utilise constamment l'Analyse et la Synthèse. *«Avec le secours de la première, de quelques Phénomènes choisis adroitement, ils déduisent les forces de la Nature et les lois les plus simples qui dérivent de ces forces; ils exposent ensuite synthétiquement l'ordre et la disposition des autres qui dépendent immédiatement de ces premières. C'est sans doute la meilleure Philosophie et c'est aussi celle qu'a choisie notre illustre Auteur et qu'il a cru justement préférable à toute autre.»* [1] COTES vient alors à parler de la gravitation comme qualité essentielle de la matière. Il établit alors la réciprocité des forces gravitationnelles et dit que cette force est proportionnelle à la quantité de matière que les corps contiennent ou que l'accélération est la même dans le vide pour chaque corps lourd. La loi de la pesanteur régit tous les corps sur la Terre.

Dans les cieux, il faut d'abord citer la loi de l'inertie : *«C'est une loi de la Nature reçue de tous les Philosophes, qu'un corps restera toujours en repos, ou continuera de se mouvoir en ligne droite, tant qu'il ne sera point soumis à l'action des forces étrangères qui l'obligent de changer de situation.»* [1] On peut conclure de cette loi que les planètes qui se meuvent sur des courbes sont bien soumises à l'action d'une force qui leur est perpétuellement appliquée. Tout en suivant l'exposition générale des «PRINCIPIA», COTES vient à parler de la deuxième loi de KEPLER : *«Les Planètes principales décrivent autour du Soleil des aires proportionnelles au temps.»* [1] La force en jeu est la force attractive du corps central. Est alors introduite la troisième loi de KEPLER : *«De plus, il est pareillement démontré géométriquement que si plusieurs corps se meuvent uniformément dans des cercles concentriques, de manière que les carrés des temps périodiques soient entre eux comme les cubes des distances au centre commun, les forces de chacun de ces corps seront réciproquement comme les carrés de ces mêmes distances.»* [1] Comme, suivant les observations des astronomes, toutes les planètes suivent ces deux lois de KEPLER, elles sont attirées par le Soleil suivant la loi des carrés inverses. COTES mentionne alors le mouvement des apsides des planètes mais surtout de celui de la Lune pour en faire une démonstration implicite de la loi de la gravitation. *«En effet, quoique la Loi de la force centripète de la Lune qui est la plus sujette à être troublée dans ses mouvements, surpasse un peu le rapport de la raison doublée; néanmoins elle en approche soixante fois d'avantage que la raison triplée. On peut encore réfuter cette objection plus solidement en soutenant, comme il est démontré dans cet Ouvrage, que ce mouvement des apsides ne vient pas de ce que l'intensité des forces centripètes s'éloigne de la raison doublée, mais qu'il dépend réellement d'une cause totalement différente»* [1]. COTES parle ensuite des satellites des planètes, puis des comètes pour reconnaître l'universalité de la

loi des carrés inverses : «*Il faut reconnaître maintenant d'après tout ce que l'on vient de voir, que la Terre, le Soleil et tous les corps célestes qui accompagnent le Soleil ont une gravitation réciproque les uns sur les autres, par laquelle ils paraissent s'attirer*» [1].

COTES entre alors dans la discussion sur les qualités prétendument occultes de la gravitation et il souligne fermement que cette force n'est précisément pas une qualité occulte, car son existence est démontrée par l'expérience, même si l'on ignore la cause exacte de cette même gravité. Mais elle n'est pas non plus un effet surnaturel ou un miracle perpétuel qu'il faudrait rejeter de l'explication physique. Par contre COTES identifie toutes les propriétés d'une qualité occulte dans les tourbillons de DESCARTES et il montre l'insuffisance et même la fausseté de la théorie cartésienne. La réfutation de celle-ci constitue la plus grande partie de sa Préface. COTES termine celle-ci en remerciant Richard BENTLEY pour toutes les peines qu'il avait eues en persuadant NEWTON d'entreprendre cette deuxième édition des «PRINCIPIA».

Tout comme la première édition, quelques vingt années plus tôt, cette deuxième fut présentée et évaluée dans les journaux savants de l'époque. Ainsi «*le Journal des Scavans*» de 1715 [106] publia une critique très positive.

Ainsi l'auteur de l'article a complètement compris que dans les deux premiers livres «*NEWTON a traité les mouvements des corps avec la précision des Géomètres, de sorte néanmoins qu'on applique les principes établis à plusieurs problèmes de physique*» [86], tandis que dans le LIVRE III, il démontra «*par les mêmes principes le système du monde*» [86]. Ensuite l'auteur donne une description assez détaillée du traité et termine par une énumération des principales différences entre la première et la deuxième édition.

La présentation dans les «*Mémoires*» [107] en février 1718 était plus critique. Elle parlait d'abord du contraste entre la réception de l'ouvrage par les géomètres et par les physiciens. Chez ces derniers «*la réputation de cet ouvrage est contestée*» [107]. Comme le livre de GREGORY [97], basé sur la théorie newtonienne venait d'être discuté dans la même publication, l'auteur se dispensait d'une revue détaillée et écrivait tout simplement que «*cette nouvelle édition n'est augmentée que de deux ou de trois éclaircissements*» [107]. Par contre l'auteur discute la preuve de la loi de l'attraction sur la base du test de la Lune et de la PROPOSITION IV du LIVRE III : «*La preuve semblera aller jusqu'à la conviction, si l'expérience peut montrer qu'en effet la Terre et la Lune sont, pour ainsi parler, en commerce d'attraction. Toutefois ce raisonnement, qui d'abord paraît plausible, ne prouve pas, parce que cette conformité entre le mouvement de la Lune et celui des corps pesants ne se rencontrant que dans l'arc proposé LC, c'est d'un cas particulier tirer une conclusion générale*» [107]. Inutile de dire que ce jugement de l'auteur montre d'une façon voyante son incompréhension totale de la philosophie newtonienne des sciences.

La revue de la deuxième édition des «PRINCIPIA» dans les «*Acta Eruditorum*» de 1714 [108] est d'une toute autre qualité. L'auteur anonyme, qui aurait bien pu être LEIBNIZ en personne, fait d'abord un relevé détaillé de toutes les modifications intervenues dans la deuxième édition et il commente les consé-

quences des changements sur l'appareil démonstratif de l'ouvrage. Il s'arrête à plusieurs endroits de l'exposé de NEWTON. Ainsi il annote le lemme II du LIVRE II dans le sens que LEIBNIZ avait communiqué à NEWTON ses résultats concernant le nouveau calcul analytique mais que celui-ci préférerait garder sa propre technique. L'auteur vient alors à l'épisode de la PROPOSITION X du LIVRE II relaté déjà plus haut et il expose amplement le rôle de Jean BERNOULLI dans la formulation exacte de ce théorème presque à la dernière minute. Aussi le changement de dénomination de «*hypothèse*» en «*règle*» lui paraît significatif; aussi il souligne l'importance de la nouvelle Règle III et énumère aussi les autres amendements du troisième livre. La critique se termine sur l'affirmation de NEWTON : qu'il n'a «*pu encore parvenir à déduire des phénomènes la raison de ces propriétés de la gravité, et je n'imagine point d'hypothèses*» [1] «*qui ne doivent pas être reçues dans la philosophie expérimentale*» [1] pour ajouter qu'il est à craindre que la plupart des gens préféreraient des hypothèses à l'esprit subtil de NEWTON qui n'arrive pas à séparer sa conception de celles de l'éther et de la matière subtile des cartésiens. Cette remarque, qui a dû profondément offenser NEWTON, trouvera un écho dans l'ouvrage «*Commercium epistolicum*» [55] probablement dû à NEWTON et paru en 1713.

En 1723, dans sa 81^{ème} année, NEWTON prit la décision de préparer une troisième édition révisée des «*PRINCIPIA*». Sans doute NEWTON était-il stimulé par la chance de disposer d'un éditeur compétent prêt à faire ce travail pénible en la personne du Dr Henry PEMBERTON. Celui-ci, aujourd'hui connu pour son association avec NEWTON pour la troisième édition des «*PRINCIPIA*», avait fait initialement des études de médecine à Leyden, puis allait à Paris pour se perfectionner en anatomie et s'intéressa aux mathématiques. A son retour à Londres, il connut des familiers de NEWTON et eut la possibilité de faire valoir sa grande habileté dans la résolution de problèmes mécaniques et mathématiques. Pendant environ 27 mois, NEWTON et PEMBERTON collaborèrent ensemble et dans la préface que le premier ajouta à la troisième édition, cette collaboration est bien décrite : «*Dans cette troisième édition, dont a eu soin Monsieur PEMBERTON, Docteur en médecine, très habile dans ces matières, on explique tout au long quelques points concernant la résistance des milieux, et on a ajouté quelques nouvelles expériences sur la chute des graves dans l'air. On explique aussi avec plus de détails dans le LIVRE III, la démonstration qui prouve que la Lune est retenue dans son orbite par la force de la gravité ...* » [1]. Même si NEWTON dans sa préface utilise le pronom «*on*», il est probable que la plupart des modifications et amendements cités sont dus à PEMBERTON, quoique basés sur des propositions de NEWTON que celui-ci avait écrites en relisant la deuxième édition. Mais d'abord PEMBERTON prit très à cœur son activité d'éditeur en proposant maintes reformulations stylistes, maintes clarifications du texte afin de le rendre plus lisible. Et à l'encontre de COTES il consultait NEWTON même pour les changements mineurs.

Contrairement à la deuxième édition des «*PRINCIPIA*», la troisième édition ne présente pas d'innovations majeures, abstraction faite de deux propositions ajoutées au LIVRE III sur le mouvement de la ligne des nœuds de la Lune et

dues à J. MACHIN. NEWTON les introduit dans un scholie par les mots : «*J. MACHIN, professeur d'astronomie à GRESHAM et Henry PEMBERTON M.D. ont trouvé chacun de leur côté le mouvement des nœuds par une autre méthode que la précédente, et on a fait mention de cette autre méthode dans un autre lieu. Les écrits de l'un et de l'autre que j'ai vus, contenaient chacun deux propositions et s'accordaient parfaitement. Je joindrai ici l'écrit du Docteur MACHIN parce qu'il m'est tombé plus tôt entre les mains.*» [1] Une autre modification fut la reformulation de l'expérience 14 dans le scholie à la fin de la section VII du LIVRE II sur l'écoulement des fluides. Mais la plus grande attention fut portée à la reformulation du scholie dite «*de LEIBNIZ*» à la suite du lemme II dans le deuxième livre. En effet si dans la première édition des «PRINCIPIA», NEWTON écrivit : «*Dans des lettres échangées entre le géomètre talentueux G.-W. LEIBNIZ et moi-même, il y a dix ans, où je lui signifiais que je possédais une méthode pour déterminer les maxima et minima, pour tracer des tangentes à des courbes etc, méthode s'appliquant à des quantités tant rationnelles qu'irrationnelles . . . , cet homme éminent me répondait qu'il avait trouvé une méthode analogue et il me communiqua celle-ci qui ne fut guère différente de la mienne sauf en ce qui concerne le langage et les symboles. . . »* [85] Dans la troisième édition cette référence explicite à LEIBNIZ fut remplacée par le texte suivant : «*En expliquant dans une lettre à D.-J. COLLINS le 10 décembre 1672, la méthode des tangentes que je soupçonne être la même que celle de SLUSIUS qui ne m'avait pas encore été communiquée, j'ajoutai, cela est plutôt un corollaire particulier d'une méthode générale qui s'étend, sans calcul embarrassant, non seulement à mener des tangentes à des courbes quelconques, soit géométriques, soit mécaniques, ou relatives d'une façon quelconque à des lignes droites ou courbes, mais aussi à résoudre d'autres espèces de problèmes très difficiles touchant les courbures, les quadratures, les rectifications, les centres de gravité des courbes, etc. Et elle n'est pas restreinte (comme la méthode des maximis et minimis de HUDDE) aux seules équations qui ne contiennent point de quantités irrationnelles. J'ai emmêlé cette méthode à cette autre par laquelle je détermine les racines des équations en les réduisant à des séries infinies.*» [1] La guerre entre LEIBNIZ et NEWTON avait éclaté en 1711 par une lettre du premier à Hans SLOANE sur la question de priorité dans l'invention de l'analyse. Les péripéties de cette querelle sont bien documentées [55] ainsi que leur prolongation par-delà la mort de LEIBNIZ en 1716. La conséquence ultime fut la disparition du nom de LEIBNIZ en 1726 de la troisième édition des «PRINCIPIA».

Celle-ci fut imprimée en 1250 exemplaires et la page de titre indiquait que cette édition était «*licenciée et munie du privilège royal pour une période de quatorze années*» avec la date du 26 mars 1726. Elle contenait en frontispice un portrait de NEWTON peint en 1725 par John VANDERBANK et gravé par G. VERTUE. NEWTON mourut le 20 mars 1727.

Tout comme pour la deuxième édition, les Acta Eruditorum de LEIBNIZ publièrent une revue de cette troisième édition [109]. La plus grande partie de cet article consistait dans un relevé détaillé des modifications de cette édition vis à vis de la précédente. L'auteur consacra une attention particulière aux

informations nouvelles sur les comètes et aux expériences de DESAGULIER de 1719. Bien entendu l'auteur commentait la reformulation du «*scholie de LEIBNIZ*» et il écrivit : «*Le scholie concernant LEIBNIZ et qui fut mentionné dans les Acta Eruditorum de 1714 a été supprimé et à sa place un autre est inséré basé sur une lettre que NEWTON écrivit à COLLINS en 1670 et dans laquelle il exposait qu'il possédait une méthode générale qui, sans calculs pénibles, permet de tracer des tangentes à des courbes tant géométriques que mécaniques et de résoudre d'autres problèmes concernant des courbures, des surfaces limitées par des lignes courbes, la détermination de centres de gravité, etc.*». Pas d'autres commentaires de la part de l'auteur. La revue se termine par la présentation de la nouvelle règle IV ainsi que par celle des informations toutes récentes sur la masse des planètes et des propositions de MACHIN concernant le calcul du mouvement de la ligne des nœuds de la Lune.



LES «*Philosophia Naturalis Principia Mathematica*» sont composés de cinq parties disposées en trois livres. Les deux premières parties sont placées en préambule avant le LIVRE PREMIER et sont intitulées respectivement «*Définitions*» et «*Axiomes aux lois du mouvement*». Ces rubriques regroupent principalement huit définitions et trois lois du mouvement qui constituent le socle de l'édifice déductif. La mécanique rationnelle y reçoit ses fondements et le reste de l'ouvrage n'est composé en quelque sorte que des développements et applications de ces définitions et axiomes. Force est donc d'analyser ces deux parties dans les détails.

Les huit définitions sont d'abord celles de la masse et de la quantité du mouvement ; puis celles de la force d'inertie et de la force imprimée ; celles enfin de la force centripète et de ses trois «*mesures*». Ainsi NEWTON stipule :

«*La quantité de matière se mesure par la densité et le volume pris ensemble ... Je désigne la quantité de matière par les mots de «corps» ou de «masse».*» [1]

La quantité de mouvement est définie de la façon suivante : «*La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse.*» [1]

Les définitions suivantes introduisent ensuite la «*force*» notion centrale de la science newtonienne du mouvement. NEWTON définit d'abord la «*force interne de la matière*» :

«*La force interne de la matière (vis in sita) est le pouvoir de résistance, par lequel chaque corps persévère autant qu'il est en lui de le faire dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.*» [1] La définition ainsi formulée présuppose le principe d'inertie introduit seulement comme axiome dans la section ultérieure. Tel est aussi le cas pour la définition suivante :

«*La forme imprimée est une action exercée sur le corps, qui a pour effet de changer son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme.*» [1]

NEWTON fait suivre cette définition par le commentaire suivant :

« Cette force consiste dans l'action seule, et elle ne persiste pas dans le corps dès que l'action vient de cesser. En effet le corps persévère dans son nouvel état par la seule force d'inertie ... » [1]

Par ce commentaire, NEWTON se démarque de la théorie de l'impétus encore en vogue chez ses contemporains tout comme chez GALILEI. En outre, il considère la force imprimée comme une action par laquelle un nouvel état est acquis et c'est la force d'inertie qui permet au corps de persévérer dans celui-ci. Ainsi tout mouvement est causé par une force ou une combinaison de forces.

Une des causes principales susceptible de provoquer un changement d'état d'un corps reste bien la «force centripète» introduite par HUYGENS [45]. Elle fait l'objet de la définition suivante :

« La force centripète est celle par laquelle des corps sont tirés, poussés ou tendent de quelque façon que ce soit vers quelques points, comme vers un centre. » [1]

NEWTON donne en exemple la gravité par laquelle les corps tendent vers le centre de la Terre et fait ainsi ressentir que cette force, par laquelle les planètes sont continuellement retirées de leur mouvement inertiel rectiligne, est au centre des développements des «PRINCIPIA». Il continue de s'occuper de la force centripète dans les trois définitions suivantes qui traitent de la mesure de cette force. Il définit ainsi la quantité absolue, la quantité accélératrice et la quantité motrice de ladite force. Si par quantité absolue, NEWTON entend : *« La mesure de celle-ci selon l'efficacité de la cause »* [1], les deux autres notions appellent un commentaire plus explicite. En effet pour NEWTON, la force n'est pas une grandeur simple mais elle donne lieu à un dédoublement en deux quantités : la quantité motrice et la quantité accélératrice qui constituent toutes deux des «mesures» suivant les définitions. Or par «mesure» NEWTON entend plutôt une façon de percevoir la grandeur d'une force qu'un nombre exprimant l'intensité de celle-ci. La «quantité motrice» est proportionnelle au mouvement qu'elle engendre dans le corps auquel elle est imprimée. Pour un corps donné possédant une masse définie, vitesse et quantité de mouvement sont proportionnelles. La «quantité accélératrice» est proportionnelle à la vitesse engendrée par l'impression de la force. Si cette vitesse s'ajoute à une vitesse que le corps a déjà, elle devient une accélération d'où son qualificatif. Dans les deux cas l'effet est le même et il est impossible de distinguer les deux aspects de la force. A première vue le dédoublement de la force semble être entièrement superflu et il ne prend son sens que dans le cas où au moins deux corps agiraient l'un sur l'autre. La force accélératrice et la force motrice ne représentent que la grandeur de la force imprimée, déterminée respectivement par la vitesse et par le mouvement engendré dans le corps.

Il est vrai que dans l'ensemble des huit définitions on ne retrouve pas le concept explicite de la vitesse et NEWTON ne se limite pas à la cinématique comme le fit GALILEI. Il termine la première partie par un long et très importants scholie introduisant les célèbres définitions de l'espace et du temps absolus qui méritent d'être citées textuellement vu qu'elles ont fait l'objet des

critiques les plus vives depuis Georges BEKERLEY [110] jusqu'à Ernst MACH [111].

- I. *«Le temps absolu vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle «durée». Le temps relatif, apparent et vulgaire, est cette mesure sensible et externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise de mouvement : telles sont les mesures d'heures, de jours, de mois, etc... dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai.»*
- II. *«L'espace absolu sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile. L'espace relatif est cette mesure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par la relation aux corps, et que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par exemple, qu'un espace, pris au-dedans de la Terre ou dans le ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la Terre.»*
«L'espace absolu et l'espace relatif sont les mêmes d'espèce et de grandeur ; mais ils ne le sont pas toujours de nombre ; car, par exemple, lorsque la Terre change de place dans l'espace, l'espace qui contient notre air demeure le même par rapport à la Terre, quoique l'air occupe nécessairement les différentes parties de l'espace dans lesquelles il passe, et qu'il change réellement sans cesse.»

NEWTON continue en donnant les définitions du lieu absolu et relatif ainsi que du mouvement relatif et absolu :

- III. *«Le lieu est la partie de l'espace occupé par un corps et par rapport à l'espace, il est ou relatif ou absolu ... »*
- IV. *«Le mouvement absolu est la translation des corps d'un lieu absolu dans un autre lieu absolu, et le mouvement relatif est la translation d'un lieu relatif dans un autre lieu relatif ... » [1]*

Avec ses définitions et le scholie général, NEWTON prend résolument le contre-pied de la conception cartésienne. DESCARTES voit le mouvement comme essentiellement relatif. Un corps qui se meut, pour DESCARTES, ne le fait que par rapport à un autre corps, lequel n'est en repos que parce qu'on le considère comme tel. Le repos résulte d'un décret toujours révocable ou d'un simple préjugé [112]. NEWTON par contre introduit un espace qu'il qualifie d'absolu et dont il prétend qu'il est le vrai. Un corps donné en occupe à un moment donné, une partie qu'il appelle «*lieu*». Et si ce corps occupe continuellement le même lieu absolu, il est en repos absolu, sinon il est en mouvement absolu. Mais si le mouvement se produit par rapport à un référentiel, il est qualifié de «*relatif*». Plus généralement, tout corps solide en mouvement absolu permet de définir, grâce à un référentiel à lui lié, un espace relatif, constitué de lieux tout aussi relatifs qu'il entraîne avec lui [113].

NEWTON oppose «*absolu*» à «*relatif*», «*vrai*» à «*apparent*» quand il qualifie espaces, lieux et mouvements. Et il distingue à travers ces oppositions deux à deux les vues scientifiques de celles populaires. Étrangement le texte proprement dit des «*PRINCIPIA*» ne fait plus guère référence à ces lourdes distinctions. Il est sous-entendu que NEWTON a en vue d'une façon générale l'espace absolu

et le mouvement dans cet espace qualifié alors de mouvement vrai.

NEWTON affirme d'ailleurs qu'il est possible de distinguer mouvements absolus et relatifs par l'observation des forces et il se réfère à l'expérience du seau tournant. Il écrit : *«Les effets par lesquels on peut distinguer le mouvement absolu du mouvement relatif, sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement; car dans le mouvement circulaire purement relatif, ces forces sont nulles, et dans le mouvement circulaire vrai et absolu, elles sont plus ou moins grandes selon la quantité du mouvement.»* [1]

À côté des espaces absolus et relatifs, NEWTON introduit dans le premier paragraphe de son scholie le concept des temps absolu et relatif. Cette distinction n'a guère de portée dans les «PRINCIPIA» et on peut penser que NEWTON, en introduisant les deux temps, avait plus en vue de compléter un système référentiel pour une science mécanique moderne que d'assouvir un besoin philosophique réel. Néanmoins force est de constater que l'introduction de l'espace absolu et du temps absolu constitue le vrai passage de la cinématique galiléenne à la dynamique newtonienne. Il ne lui reste plus qu'à greffer la notion de «force» sur les définitions de la première partie du «Préambule». Et il le fait dans la deuxième intitulée *«Axiomes ou lois du mouvement»*.

NEWTON y réunit les trois grandes lois de la mécanique rationnelle dont nous reconnaissons encore aujourd'hui l'essence et l'actualité. Elle tourne autour du concept de la force : les forces sont les causes des mouvements absolus. L'espace absolu, à son tour, est à l'origine de celles-là. La dynamique, science des mouvements dans leurs rapports aux forces, se démarque de la cinématique de GALILEI précisément par l'affirmation d'un espace absolu dans la conception de NEWTON. Il faut d'abord préciser que NEWTON arriva à débarrasser la notion de «force» des multiples désignations que beaucoup de savants d'alors employaient selon la nécessité de leurs propres conceptions. Mais, même théorisé par NEWTON, le concept de force mettra encore longtemps à se fixer dans son état actuel et le statut ontologique, quant à lui, avait encore plus de difficultés à s'imposer dans la mécanique rationnelle jusqu'au XIX^e siècle.

La première des trois lois newtoniennes traite du cas de l'absence d'une force et exprime le principe d'inertie ou de la conservation du mouvement rectiligne et uniforme *«Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme à moins que des forces imprimées ne le contraignent à changer son état.»* [1]

Le mouvement inertiel correspond donc dans l'espace absolu, à l'absence de force imprimée due à l'interaction avec d'autres corps. Et la cause de ce mouvement inertiel ne peut être que l'espace absolu puisque c'est le seul objet en présence duquel se trouve le corps matériel. En contrepartie, l'action de l'espace absolu doit être considérée comme résultant d'une force dont la nature est nécessairement distincte de celle des forces imprimées. L'espace absolu est donc distinct de l'espace géométrique et il représente une entité physique.

NEWTON annonce sa seconde loi du mouvement sous la forme suivante :

«Le changement de mouvement est proportionnel à la force motrice imprimée, et il se fait selon la ligne droite selon laquelle elle est imprimée.» [1]

Encore une fois, Définitions et Axiomes se reprennent mutuellement et il y a relation entre la seconde loi et la définition IV. Néanmoins cette loi est encore aujourd'hui la relation fondamentale de la dynamique. NEWTON l'accompagne du commentaire suivant :

«*Si une certaine force engendre un certain mouvement, une force double engendra un mouvement double, une force triple, un mouvement triple, qu'elle soit imprimée simultanément et en une fois, ou bien graduellement et successivement.*» [1]

Dans les commentaires à la Définition IV, NEWTON avait déjà mentionné qu'une force peut être imprimée lors d'une action instantanée comme le choc, phénomène qui a suscité tant d'intérêt au XVII^e siècle, tout comme par une action continue telle que la pression ou la gravitation. La loi II s'applique-t-elle alors tant aux phénomènes du choc qu'à ceux de la gravitation ? Il faut décider de cette question avec prudence en tenant compte à la fois des concepts d'instantanéité et de continuité. La portée de la loi II est donc assez vaste. Considérons d'abord un corps en repos. «*Une action exercée sur lui, l'impression d'une force, donc, y engendre une vitesse et, par là même, une quantité de mouvement à quoi est proportionnelle la force motrice. Une fois l'impression réalisée, le corps conserve, d'après la Loi I, ce mouvement acquis. Supposons maintenant que le corps a, préalablement à l'impression de la force, un mouvement rectiligne et uniforme, ayant même direction et même sens que la force. Autrement dit, on pousse le corps par-derrière. La Loi II dit que la quantité de mouvement est augmentée, et la vitesse avec elle bien sûr. Elles sont diminuées si la force est imprimée dans le sens contraire du mouvement initial. Dans ces deux cas la Loi II relie la grandeur de la force au changement du mouvement qu'avait le corps, sans ambiguïté.*»

Si maintenant la force est imprimée obliquement par rapport au mouvement primitif de ce corps, ce n'est pas ce mouvement-ci, à proprement parler, qui change. On peut même dire qu'il ne change nullement. Soit un mouvement de A vers B considéré comme mouvement initial. Celui-ci se produirait pendant un temps donné si la force F n'était pas imprimée en A . A l'instant où le corps passe en A , l'impression de la force F se traduit par la génération d'un second mouvement, ceci d'après le **Corollaire** I des Lois qui dit :

«*Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il aurait parcouru ses côtés séparément.*» [1]

Si ce mouvement existait seul, le corps irait de A dans la direction de la nouvelle force imprimée. Le corps a finalement deux mouvements en lui ; le mouvement primitif et le mouvement acquis en A . Par adjonction, NEWTON obtient le mouvement global : «*... le corps va de A sur la diagonale construite avec les deux forces. Le mode de composition des mouvements permet de dire que le mouvement primitif continue d'exister virtuellement mais qu'il se réalise conjointement avec celui imprimé en A .*» [113]

NEWTON utilise la Loi II et le **Corollaire** I aux Lois pour résoudre le problème de la composition des mouvements en partant de celles de leur cause :

«Et de là s'ensuit clairement la composition de la force directe AD , à partir des deux forces quelconques obliques AB et BD , et inversement la résolution d'une force quelconque directe AD en obliques quelconques AB et BD . Cette composition et cette résolution reçoivent une abondante confirmation de la mécanique.» [1]

Les autres corollaires se rapportent à l'étude des chocs, à l'extension du principe d'inertie à des systèmes de corps et à l'introduction des repères inertiels. Avant l'exposition de ces corollaires, NEWTON donne sa troisième loi, celle de l'action et de la réaction :

«Loi III : l'action est toujours égale et opposée à la réaction : c'est à dire que les actions mutuelles de deux corps sont toujours égales et dirigées en sens contraire.» [1]

Cette troisième loi, non encore présente dans le «*De motu*» [87] de 1685 permet à NEWTON dans le LIVRE III de formuler dans toute son extension la loi de la gravitation universelle.

Dans le scholie qui clôt la seconde partie des «PRINCIPIA», NEWTON rappelle quelques exemples relevant de l'analyse tant mathématique qu'expérimentale relative à la mise en œuvres des «*Axiomes ou lois du mouvement*».

Il mentionne GALILEI, qui en appliquant les deux premières lois du mouvement et les deux premiers corollaires aurait découvert que «*la descente des graves est en raison doublée du temps, et que les projectiles décrivent une parabole.*» [1]. Un peu plus loin il poursuit : «*Par ces mêmes lois le chevalier Christophe WREN, J. WALLIS et Chr. HUYGENS, qui sont sans contredit les premiers géomètres des derniers temps, ont découvert, chacun de leur côté, les lois du choc et de la réflexion des corps durs.*» [1]

NEWTON ne fait aucune tentative pour expliquer davantage la nature et l'arrière fond de ses définitions et lois qui pour lui relèvent complètement de l'expérience et d'une généralisation inductive de celle-ci.

Sur cette base, il va alors démontrer les propositions des LIVRES I et II et donner une existence mathématique au mouvement des corps sous l'action des forces. A cette fin, NEWTON utilise les méthodes mathématiques de la géométrie euclidienne, complétées par le savoir d'APPOLONIUS pour la théorie des sections coniques et par ses propres recherches dans la théorie des fluxions.

Le LIVRE I est composé de 14 sections.

Dans la première section de ce Livre, NEWTON se met à forger les notions mathématiques dont il a besoin pour compléter les méthodes géométriques si celles-ci doivent s'appliquer à la description du mouvement. Elle se compose de 11 lemmes et de deux scholies et présente la méthode dite des «*premières et dernières raisons*» mais donne, d'autre part des résultats importants pour la construction des forces centrales en élaborant des outils pour traiter de l'action continue de la force. Dans le scholie cloturant cette première section, NEWTON justifie sa méthode qui lui évite de déduire de longues démonstrations à l'absurde et en même temps croit pouvoir se passer «*des indivisibles*» qui, quoique donnant «*des démonstrations plus courtes*» sont trop modernes et «*peu géométriques*». Il commente finalement son choix [114] :

«J'ai mieux aimé employer celle des premières et dernières raisons des quantités qui naissent et s'évanouissent ; et j'ai commencé par faire voir, le plus brièvement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indivisibles ; mais en ayant prouvé le principe, je m'en servirai avec plus de sécurité.» [1]

Pour l'essentiel, la méthode des premières et dernières raisons va servir comme outil majeur dans l'organisation déductive des «PRINCIPIA» et permettre à NEWTON d'éviter de longues démonstrations rigoureuses purement géométriques et de contourner les pièges des indivisibles se manifestant dans les paradoxes de ZÉNON D'ELÉE. «Par une approche empreinte de lucidité rationnelle, NEWTON place d'emblée sa démarche dans le cadre d'une physique mathématique toute à la fois féconde et consciente des impératifs de la rigueur mathématique.» [114]

Dans la deuxième section, NEWTON retourne au sujet de sa démarche : le traitement mathématique du problème des forces centrales, c'est-à-dire des forces qui sont toujours dirigées vers un point fixe, appelé centre de force. Il emploie une méthode synthétique difficilement compréhensible. Il démontre d'abord que les orbites de corps sous l'influence des forces centrales sont planes et que la loi des aires s'applique. Puis il conclut que «La vitesse d'un corps attiré vers un centre immobile dans un espace non résistant, est réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps se trouve.» [1]

On trouve le centre de force si l'on fait la diagonale d'un parallélogramme sur les cordes de deux arcs successivement parcourus par le même corps en temps égaux tout en diminuant les arcs à l'infini. Finalement les forces centrales agissant en deux points sont entre elles dans la dernière raison des diagonales lorsque les arcs diminuent à l'infini. En dernier lieu NEWTON remarque que ses propositions restent vraies «lorsque les plans dans lesquels les corps se meuvent et les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, se mouvront uniformément en ligne droite.» [1]

NEWTON retourne alors à sa proposition en postulant que le mouvement d'un corps matériel possédant une orbite plane et obéissant à la loi des aires se fait nécessairement sous l'influence d'une force centrale : «La force centripète d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan, et qui parcourt autour d'un point immobile, ou mut uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.» (PROPOSITION II **Théorème II**) [1]. NEWTON n'oublie pas de remarquer que la force centripète incriminée peut bien être composée de plusieurs forces mais que la résultante de celles-ci est toujours une force centrale.

NEWTON a forgé ainsi un outil pour juger si dans un mouvement curviligne la déperdition du mouvement rectiligne est bien due ou non à l'influence d'une force centrale.

Il se tourne alors vers l'examen des forces centrales et établit la loi à laquelle ces forces obéissent. Pour le mouvement circulaire uniforme avec le centre

comme source de la force, NEWTON établit facilement la formule de HUYGENS : $p = v^2/r$ et il démontre sa déduction à l'aide des **Théorèmes** I à III précédents. En admettant la troisième loi de KEPLER que les temps périodiques «sont en raison sesquiplée des rayons, et que par conséquent les vitesses soient réciproquement en raison sous doublée des rayons ; les forces centripètes seront réciproquement comme les carrés des rayons : et au contraire» (**Corollaire** 6 de la PROPOSITION IV) [1]. Dans le scholie suivant la PROPOSITION IV, NEWTON précise que «Le cas du **Corollaire** 6 est celui des corps célestes (comme nos compatriotes HOOK, WREN et HALLEY l'ont chacun conclu des observations) c'est pourquoi j'expliquerai tout au long dans la suite de cet ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripète qui décroît en raison doublée des distances au centre.» [1]. Il est intéressant de constater que ce scholie est un des endroits très rares où NEWTON cite le nom de HOOK, devenu son ennemi personnel depuis déjà la préparation du «*De motu*» [44] comme nous l'avons déjà vu.

NEWTON rappelle aussi la relation existant entre la force centripète et la gravité. «Car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la Terre par la force de la gravité, la gravité sera la force centripète ... » [1]

Afin de trouver l'expression de la force centripète dans le cas d'autres trajectoires pour des centres de forces librement admis, NEWTON est d'abord obligé de démontrer un théorème auxiliaire, la PROPOSITION VI. Celle-ci précise que, dans le cas d'une orbe quelconque PQ et en désignant la flèche de l'arc parcouru dans un temps infinitésimal par Pv , la force centripète au milieu de cet arc est directement proportionnelle au carré du temps de parcours. NEWTON a donc démontré que la force centripète est proportionnelle à Pv/t^2 . Or le temps t peut être mesuré suivant la loi des aires par la surface balayée par le rayon vecteur pendant le temps t . En désignant le rayon vecteur par SP , et la distance de Q au rayon vecteur QT , des relations élémentaires de la géométrie du triangle permettent d'écrire la proportionnalité Pv/t^2 par l'expression $Pv/SP^2 \cdot QT^2$, éliminant ainsi le temps t .

NEWTON possède maintenant l'outil géométrique pour traiter le mouvement d'un point sous l'action d'une force centripète, le centre de force n'étant alors considéré que comme point mathématique et il faut attendre la section IX pour voir NEWTON s'attaquer au problème des deux corps. Après quelques digressions mathématiques, NEWTON examine le mouvement d'un corps sur des orbites elliptiques où le rayon du vecteur de la force pointe vers le centre de la conique. La PROPOSITION X, Problème V pose la question : «Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette ellipse» [1]. En utilisant l'expression générale donnée, NEWTON trouve que l'expression de la force centripète est proportionnelle à la distance au centre du corps en mouvement.

La troisième section constitue une des pièces de résistance du LIVRE I et traite du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques. Ainsi la PROPOSITION XI Problème VI formule le problème central traité dans le «*De motu*» et se lit :

«Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la

force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.» [1]

En partant de sa formule générale, NEWTON démontre que cette force est inversement proportionnelle au carré de la distance du mobile au foyer de l'ellipse. Nous reviendrons au détail de la démonstration, ainsi qu'à celles pour des trajectoires paraboliques et hyperboliques au chapitre suivant. Dans cette troisième section NEWTON vient alors aux mouvements paraboliques et la PROPOSITION XIII Problème VIII et il demande : *«Supposez qu'un corps décrive une parabole, ou demande la loi de la force centripète qui tend au foyer de cette courbe»* [1]. Sa démonstration montre que, dans ce cas aussi, la force centripète est inversement proportionnelle au carré de la distance. NEWTON utilisera dans le LIVRE III, ce résultat dans son traitement des orbites des planètes. Dans la PROPOSITION XV **Théorème** VII, NEWTON relève encore la validité de la troisième loi de KEPLER pour le mouvement elliptique quand il écrit *«Les mêmes choses étant posées, les temps périodiques dans les ellipses sont en raison sesquiplée de leurs grands axes»* [1] et il souligne que *«Les temps périodiques sont donc les mêmes dans les ellipses, et dans les cercles, dont les diamètres sont égaux aux grands axes des ellipses.»* [1]

Dans les sections IV et V, NEWTON analyse dans une perspective strictement mathématique les propriétés des diverses coniques. Il distingue la détermination des orbes elliptiques, paraboliques et hyperboliques, lorsque l'un des foyers est donné du cas lorsque aucun des foyers n'est donné. NEWTON donne dans ces deux sections certains théorèmes qu'on trouve chez PASCAL et anticipe sur les travaux de PONCELET. [115]

La section VI porte sur la détermination des mouvements dans des orbes données. Cette question est une application de la loi des aires et se réduit à un problème de mathématiques que NEWTON résout pour le cas de la parabole et de l'ellipse.

Dans la section suivante VII est traité le mouvement ascensionnel et descensionnel des corps. NEWTON y étudie en particulier le mouvement de chute libre d'un corps soumis à l'action d'une force centrale ainsi que celui d'un corps jeté.

Dans la section VIII, NEWTON se propose de résoudre le problème inverse des forces centrales. Il veut trouver la courbe que décrit un corps lancé dans une direction avec une vitesse donnée et soumis à une force centrale agissant suivant une loi d'une expression définie. La résolution de ce problème est délicate car NEWTON ne peut pas donner une solution sous forme d'une équation algébrique, mais réussit seulement à décrire une construction point par point d'après laquelle le lieu d'un corps peut être trouvé à chaque instant pourvu que la quadrature de la courbe cherchée est possible. Les difficultés que NEWTON ressentait pour la solution du problème inverse étaient les mêmes que d'autres mathématiciens éprouvèrent avec la méthode inverse des tangentes respectivement avec l'intégration des équations différentielles. La solution générale de ce problème est due à Jean BERNOULLI en 1710. [116]

La section IX avec le titre de *«Du mouvement des corps dans les orbes mobiles, et du mouvement des apsides»* se rapporte aux repères tournants et à

la loi de la gravitation applicable dans ce cas. En effet NEWTON avait montré que pour les corps qui se meuvent sur une ellipse et qui obéissent à la loi des aires, la force gravitationnelle est proportionnelle à d^{-2} . Or cette démarche ne peut être réitérée pour la Lune et NEWTON pose dans cette section les premiers éléments de sa théorie de la Lune. La PROPOSITION XLIII Problème XXX est énoncée de la façon suivante : «*On demande quelle est la force qui pourrait faire décrire à un corps une trajectoire mobile autour du centre de cette force, en supposant que cette trajectoire mobile soit parcourue dans le même temps, et suivant les mêmes lois que si elle était immobile.*» [1]. NEWTON montre d'abord qu'un corps qui décrit sous l'effet d'une force centrale une orbite, peut décrire la même orbite dans un plan qui tourne autour du centre de force si cette force est modifiée par une quantité qui est inversement proportionnelle au cube de la distance du centre de force au mobile. Si l'orbite tourne dans le même sens que le corps en mouvement, la nouvelle force s'ajoute à la force centrale ; dans le cas contraire, elle est retranchée. NEWTON se limite dans le restant de la section IX au cas de corps qui se meuvent sur des ellipses de forme peu différente de cercles. Ainsi dans la PROPOSITION XLV Problème XXXI «*on demande le mouvement des apsides dans des orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires.*» [1]. Au traitement de ce problème NEWTON adjoint deux corollaires dont le premier est le plus important : «*Si la force centripète est comme quelque puissance de la hauteur, on peut trouver cette puissance par le mouvement des apsides, et réciproquement. Supposons, par exemple, que tout le mouvement angulaire par lequel le corps retourne à la même apside soit au mouvement angulaire d'une révolution, ou de 360° comme un nombre quelconque ou, à un autre nombre n , et qu'on nomme la hauteur A : la force sera comme la puissance $n^2/m^2 - 3$ de la hauteur A ...* » [1]

A la fin de la section, NEWTON applique sa théorie au mouvement des apsides de la Lune. Il ôte à la force $1/A^2$ une nouvelle force exprimée par cA , la force restante sera alors $A - cA^4/A^3$ et il trouve que l'angle de la révolution entre les apsides est de

$$180^\circ \cdot \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} \quad (2.9)$$

La valeur de la constante c est déterminée en supposant que la nouvelle force cA est de 357,45 parties moindres que la première par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse (cA représente l'effet moyen du Soleil sur la Lune que NEWTON estime à peu près proportionnel à la distance Terre-Lune). Lorsque $A = 1$, c devient $200/35745$ et l'angle de la révolution entre les apsides est égal à $180,7623$ ou $180^\circ 45'44''$. L'apside la plus haute a alors pendant chaque révolution un mouvement angulaire de $1^\circ 31'28''$. NEWTON commente ce résultat par la seule remarque que ce résultat est à peu près la moitié du mouvement de l'apside de la Lune. Il sait que ses résultats sont faux et s'il revient dans sa théorie de la Lune dans le LIVRE III au mouvement des apsides, il reste vague. Et CLAIRAUT à travers la plume de M^{me} DU CHÂTELET [98] de commenter : «... on ne peut sans artifices nouveaux et peut être aussi

difficiles à trouver que la détermination entière de l'orbite de la Lune, employer la proposition de Monsieur NEWTON sur les apsides en général au cas de la Lune... »

La section X prolonge ses études : «*Nous avons traité jusqu'à présent des mouvements des corps dans des orbites dont les plans passent par le centre de force : nous allons à présent examiner leurs mouvements dans des plans excéntriques.*» [1]. NEWTON y traite également les «*oscillations des corps suspendus par des fils*» [1].

L'étude de pendules présentée par NEWTON est plus générale que les résultats de HUYGENS, car il fait intervenir la conception de la force centrale et il rend attentif qu'il considère dans ses investigations la forme réelle de la Terre et il trouve la cycloïde comme la courbe clé dans ses différents théorèmes.

C'est dans la XI^{ème} section «*Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripètes*» que le problème des deux corps est enfin abordé et que NEWTON formule ainsi le très difficile problème des trois corps. Il écrit dans l'introduction à cette section : «*J'ai traité jusqu'ici des mouvements des corps attirés vers un centre immobile, tel qu'il n'en existe peut être aucun dans la nature ; car les attractions ont continué de se faire vers des corps, et les actions des corps qui attirent et qui sont attirés sont toujours mutuelles et égales par la troisième loi. Si l'on ne considère, par exemple, que deux corps, ni le corps attiré, ni le corps attirant ne seront en repos ; mais ils feront l'un et l'autre, par leur attraction mutuelle, leur révolution autour de leur centre commun de gravité ; s'il y a plusieurs corps qui soient tous attirés vers un seul qu'ils attirent aussi, ou bien qui s'attirent tous mutuellement, ils doivent se mouvoir entre eux de sorte que leur centre commun de gravité soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite.*» [1]

Dans les PROPOSITIONS LVII à LXIII, NEWTON expose le problème des deux corps. La PROPOSITION LVII **Théorème XX** explique que «*Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, et autour l'un de l'autre, des figures semblables.*» [1]

Dans la proposition suivante, NEWTON pratique un changement de coordonnées en considérant l'un des corps comme origine fixe. Alors (PROPOSITION LVIII **Théorème XXI**) «*Etant donnée la loi des forces avec lesquelles deux corps s'attirent mutuellement, on peut, en supposant que l'un de ces corps soit fixe, donner telle impulsion à l'autre qu'il décrive autour de lui une courbe égale et semblable à celles que ces deux corps décrivent l'un autour de l'autre lorsqu'ils sont tous deux mobiles autour de leur centre commun de gravité.*» [1]

La proposition suivante : PROPOSITION LX **Théorème XXIII** tire les conclusions pratiques de ce changement de coordonnées et montre que l'ellipse que l'un des deux corps décrit autour de l'autre peut être assimilée à une ellipse que ce corps décrit autour du centre de gravité des deux corps considérés. Dans les trois propositions suivantes, NEWTON s'occupe de la détermination des orbites dans le cas de deux corps et il montre comment on peut déterminer celles-ci si l'on connaît soit les lieux, soit les directions et les vitesses.

Les PROPOSITIONS LXVI à LXIX renferment le premier essai pour appli-

quer le principe de la gravitation universelle au mouvement des trois corps. L'objet de la PROPOSITION LXVI **Théorème XXVI** est de prouver que si trois corps inégaux s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances, et si l'on considère d'abord séparément l'action des deux petits, en supposant qu'ils tournent autour du plus grand, le corps intermédiaire décrira autour du corps principal, comme foyer des aires qui seront plus près d'être proportionnelles au temps et une orbite plus sensiblement elliptique, si le corps central est en effet, comme on le suppose, soumis à l'attraction des deux autres, que dans le cas où il ne le serait pas ou le serait suivant une loi différente. [117]

NEWTON considère d'abord dans sa démonstration le cas particulier des trois corps situés dans le même plan. Il décompose alors les forces attractionnelles en deux composantes dont l'une dirigée parallèlement à la distance d'un des corps vers le corps central, l'autre qui va du corps central au corps extérieur et parvient à tirer, à l'aide de considérations géométriques, des conclusions qui valent également dans le cas où les trois corps ne sont pas dans le même plan.

C'est dans les 22 corollaires qui suivent cette proposition que NEWTON analyse, en restant strictement dans les limites de l'appareil géométrique, les effets divers qui résultent de l'attraction réciproque de trois corps. Il examine séparément les variations qui en résultent dans chaque élément et cherche à suivre toutes les circonstances de celles-ci.

NEWTON, dans le scholie terminant la section, revient à la signification physique de sa théorie et ce qui la distingue d'une simple théorie mathématique. Il se défend une fois de plus de vouloir élucider les causes premières de l'attraction : *«Je me sers ici du mot attraction pour exprimer d'une manière générale l'effort que font les corps pour s'approcher les uns des autres, soit que cet effort soit l'effet de l'action des corps, qui se cherchent mutuellement, où qui s'agitent l'un l'autre par des émanations, soit qu'il soit produit par l'action de l'Ether, de l'air, ou de tel autre milieu qu'on voudra, corporel ou incorporel, qui pousse l'un vers l'autre d'une manière quelconque les corps qui y nagent.»* [1]. NEWTON se défend également de défendre la nature de la force mais il se limite à leur seule description par la quantité. Il pense pouvoir les décrire par leurs proportions qu'il veut, sur le plan physique, comparer avec les phénomènes *«afin de connaître quelles sont les lois des forces qui appartiennent à chaque genre de corps attirants.»* [1]

Dans la section XII sont introduits les résultats relatifs à l'attraction entre les sphères pleines et creuses homogènes ou hétérogènes. Ainsi NEWTON montre dans la PROPOSITION LXXI **Théorème XXXI** qu'«un corpuscule placé en dehors de la surface sphérique est attiré par cette surface en raison renversée du carré de la distance de ce corpuscule au centre» [1], et puis dans la PROPOSITION LXXV **Théorème XXXV**, il établit le résultat essentiel, jouant un rôle central dans le développement de la mécanique rationnelle au XVIII^e siècle et qu'il formule de la façon suivante : *«Si à tous les points d'une sphère donnée tendent des forces centripètes égales, qui décroissent en raison doublée des distances à ces points, cette sphère exercera sur une autre sphère quelconque composée de parties homogènes entre elles une attraction qui sera en raison*

renversée du carré des distances de leurs centres.» [1]. L'attraction exercée entre deux sphères est équivalente à celle exercée entre leur centre si leur masse y est concentrée.

Prolongeant ces études, la section XIII porte sur les «*forces attractives des corps qui ne sont pas sphériques*» et la dernière section du LIVRE I a comme sujet «*le mouvement des corpuscules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque*». Cette section traite pour l'essentiel du mouvement de très petits corpuscules sur lesquels s'exercent des forces engendrées par des corps plus massifs. [114]. Ici NEWTON rejoint ses réflexions sur l'optique qu'il publiera plus tard [46] et le contenu de la section devrait être replacé dans la perspective de la conception corpusculaire de la lumière que NEWTON avait adoptée plus tôt. Dans un scholie il précise d'ailleurs : «*On peut appliquer ces recherches sur l'attraction à la réflexion de la lumière et à sa réfraction qui se fait, comme SNELLIUS l'a découvert en raison donnée des sécantes et par conséquent en raison des sinus, ainsi que DESCARTES l'a fait voir*» [1].

Le LIVRE II abandonne le mouvement dans le vide et s'occupe du mouvement des corps dans les milieux résistants et inaugure par là une science qui deviendra plus tard la mécanique des fluides [118]. Il est composé de neuf sections. Vu l'intérêt plutôt indirect pour l'introduction du concept newtonien de la gravitation, le commentaire qui va suivre se limitera à l'essentiel.

Dans les trois premières sections, NEWTON examine les trajectoires décrites par des corps lorsque la résistance exercée par le milieu est, soit proportionnelle à la vitesse, soit proportionnelle au carré de la vitesse, soit proportionnelle à la combinaison des deux. NEWTON commence par définir la résistance qu'un mouvement rencontre et qui se manifeste par une perte de vitesse, qui est en fait une vitesse en sens contraire du mouvement. Il part d'abord d'un mouvement uniforme qui est anéanti petit à petit par cette résistance du milieu. Dans la deuxième section traitant d'une résistance du milieu proportionnelle au carré de la vitesse, NEWTON donne d'abord une courte introduction à son calcul des fluxions qu'il ne publiera que bien plus tard [119] et traite ensuite l'équation du jet avec une force résistante qu'il cherche à résoudre par la méthode des quadratures. A partir de la section IV : «*Du mouvement circulaire des corps dans les milieux résistants*», NEWTON introduit une démarche menant à la fin du LIVRE II à la critique des tourbillons cartésiens et il introduit à cette fin, d'abord au début de la section V, le concept d'un fluide : «*Les corps fluides sont ceux dont les parties cèdent à toute espèce de force qui agit sur eux, et qui se meuvent très facilement entre eux.*» [1]. Puis il établit divers principes et résultats généraux de l'hydrostatique dont celui-ci : «*Toutes les parties d'un fluide immobile et homogène enfermé dans un vase quelconque immobile dans lequel il est comprimé de toutes parts, sont également pressées de tous les côtés et chacune reste dans son lieu sans que cette pression produise aucun mouvement*» [1].

La section VI porte sur le mouvement des corps oscillants dans les milieux résistants. Ainsi la PROPOSITION XXIV **Théorème XIX** donne la loi des mouvements pendulaires, et dans un corollaire à cette proposition, NEWTON

montre comment il devient possible de comparer les «*quantités de matière*» et d'estimer ainsi la variation de la gravité avec le lieu. En effet, comme pour des pendules de longueurs égales qui se meuvent sous l'effet de forces centrales dans l'espace vide, les masses sont proportionnelles au produit des poids avec les carrés des périodes d'oscillation, il est possible d'utiliser ces pendules pour déterminer les quantités de matière mais aussi la variation de la gravité en divers endroits de la Terre. Dans le cas où il n'y a pas de vide, il faut introduire au lieu du poids, le poids relatif et la résistance. Dans ce cas aussi, les mouvements cycloïdaux de pendules restent isochrones au cas où la résistance au mouvement est proportionnelle à la vitesse. Tel n'est plus le cas quand cette résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Toutefois, même dans ce cas l'isochronisme est garanti dans le cas de petites oscillations. NEWTON affirme ainsi que par des expériences pendulaires, il a trouvé que la quantité de matière est toujours proportionnelle au poids d'un corps. Ce n'est pas ici l'endroit de discuter la cohérence du concept de masse et de la quantité de matière dans la réflexion newtonienne, ni de faire la distinction entre masse inertielle et masse gravitationnelle. La première est représentée par le coefficient qui intervient dans la seconde loi du mouvement. La loi de la gravitation newtonienne fait, elle aussi, intervenir des coefficients qui sont des mesures à la quantité de matière des corps qui s'attirent mutuellement. Il n'y a de prime abord aucune raison pour que ces coefficients qui, d'un côté quantifient la résistance au mouvement et de l'autre côté sont liés au pouvoir d'attraction, soient égaux, si ce n'est le point de vue purement expérimental d'interpréter d'une façon simple la loi de la chute des graves. La relativité générale donnera bien plus tard toute la signification théorique à cette égalité.

La section VII du LIVRE II est consacrée à l'hydrodynamique ou au mouvement des fluides. NEWTON dégage en particulier deux problèmes importants qui marqueront le développement futur de cette science : le problème du solide de moindre résistance et celui de l'intégration de la loi d'écoulement par un petit orifice, la loi de TORRICELLI. Il se rend compte que la théorie telle qu'il l'a développée donne un résultat différent de celui trouvé par l'observation et il en donne la raison. En effet le jet subit une contraction car les filets d'eau ne peuvent passer d'une façon perpendiculaire au fond du réservoir par l'ouverture, mais y arrivent sous un certain angle. Il faut donc pratiquer une sorte d'intégration sur les différentes directions des filets élémentaires et NEWTON indique un facteur correctif de 5.5/6.5 pour le débit calculé suivant la formule de TORRICELLI.

La section VIII «*De la propagation du mouvement dans les fluides*» est, une fois de plus, une brillante confirmation du génie de NEWTON, qui à travers des hypothèses bien choisies et une analyse mathématique adéquate donne une description du jet de corpuscules qui forme la lumière tout en formulant certaines objections quant à la propagation rectiligne de celle-ci. Une réponse valable aux objections formulées par NEWTON ne sera fournie qu'au XIX^e siècle avec la mise en œuvre du principe de FRESNEL et d'un traitement mathématique plus poussé.

La section IX «*Du mouvement circulaire des fluides*» est la dernière du LIVRE II et en même temps la plus compliquée. Elle porte sur le mouvement tourbillonnaire que DESCARTES a exposé dans les «*Principes de philosophie*» [112]. Après avoir formulé l'hypothèse suivant laquelle : «*la résistance qui vient du défaut de lubricité des parties d'un fluide doit être, toutes choses égales, proportionnelle à la vitesse avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être séparées les unes des autres*» [1]. NEWTON développe avec force détails une analyse précise des conditions d'évolution d'un fluide tourbillonnant. Il constate d'abord que «*tout mouvement propagé dans un fluide s'éloigne de la ligne droite dans des espaces immobiles*» [1]. Les hypothèses de DESCARTES concernant le mouvement tourbillonnaire sont donc toutes fausses, car elles ne sont pas compatibles avec la propagation en ligne droite des rayons lumineux. Il élargit et généralise ce problème en étudiant ses différents cas en calculant les effets de telle ou telle disposition, mais le rejet des tourbillons est pour lui un sous-produit d'une recherche positive qui mène obligatoirement à des résultats incompatibles avec les données astronomiques fermement établies. Le mouvement circulaire des fluides qui se déroule dans un milieu infini ou dans un fluide enfermé dans un récipient, appliqué à la réalité cosmique, signifie que le système solaire manquerait de stabilité et se désintégrerait si quelque force, non introduite dans la théorie cartésienne, ne le «réfrénait». NEWTON peut conclure dans le scholie qui clôt le LIVRE II : «*Il est donc certain que les planètes ne sont point transportées par des tourbillons de matière. Car les planètes qui tournent autour du Soleil selon l'hypothèse de COPERNIC, font leurs révolutions dans des ellipses qui ont le Soleil dans un de leurs foyers, et elles parcourent des aires proportionnelles en temps. Mais les parties d'un tourbillon ne peuvent se mouvoir ainsi ... Ainsi l'hypothèse des tourbillons répugne à tous les phénomènes astronomiques, et paraît plus propre à les troubler qu'à les expliquer. Mais on peut comprendre par ce qui a été dit dans le premier Livre comment ces mouvements peuvent s'exécuter sans tourbillons dans des espaces libres. Et cela sera encore mieux expliqué dans le troisième Livre.*» [1]

En effet le troisième Livre qui décrit «*Le système du Monde*» est le premier ouvrage qui développe les théories fondamentales de la mécanique rationnelle et qui postule l'existence d'espaces libres ou vides. Le livre lui-même n'est pas divisé en sections comme les deux premiers. Il a comme but l'application des résultats mathématiques obtenus auparavant sur l'ensemble des phénomènes célestes et terrestres : le mouvement des planètes et des comètes, le mouvement des marées et la forme de la Terre en mettant au centre de ses réflexions la loi de la gravitation universelle.

Au début du livre, NEWTON annonce ses intentions après avoir mis en avant une quasi-excuse pour son traitement trop mathématique des lois de la nature : «*J'avais d'abord traité l'objet de ce troisième Livre par une méthode moins mathématique, afin qu'il pût être à la portée de plus de personnes. Mais de crainte de donner lieu aux chicanes de ceux qui ne voudraient pas quitter leurs anciens préjugés, parce qu'ils ne sentiraient pas la force des conséquences que je tire de mes principes, faute d'avoir assez médité les Propositions que j'ai données*

dans les Livres précédents ; j'ai rédigé ce Livre en plusieurs Propositions, selon la méthode des Mathématiciens, pour ceux qui auront lu les deux premiers Livres, car c'est pour eux que ce troisième Livre est destiné ; et comme il y a dans les deux premiers Livres plusieurs Propositions qui pourraient arrêter longtemps, même les Mathématiciens, je ne prétends pas exiger qu'ils lisent ces deux premiers Livres entiers ; il leur suffira d'avoir lu attentivement les Définitions, les Lois du Mouvement, et les trois premières Sections du premier Livre, et ils pourront passer ensuite à ce troisième Livre, qui traite du Système du Monde, et avoir soin seulement de consulter les autres Propositions des deux premiers Livres lorsqu'ils les trouveront citées et qu'ils en auront besoin.» [1].

La note liminaire citée est suivie par un groupe de quatre «Règles qu'il faut suivre dans l'étude de la physique» [1] et qui sont :

- «Règle première : Il ne faut admettre de causes, que celles qui sont nécessaires pour expliquer les Phénomènes.»
- «Règle II : Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause.»
- «Règle III : Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.»
- «Règle IV : Dans la Philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomènes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, jusqu'à quelques autres phénomènes les confirment entièrement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions.»

Comme nous l'avons vu auparavant, le nombre et la dénomination de ces Règles ont été modifiés à travers les différentes éditions des «PRINCIPIA». Il faut souligner pourtant que la Règle IV révèle l'approche épistémologique inductive que NEWTON pratique dans sa philosophie naturelle. En effet, pour lui, une hypothèse ne peut affaiblir les raisonnements fondés sur l'induction tirée de l'expérience. Cette conviction est en même temps la raison pour justifier l'analyse de l'orbite de la Lune dont le calcul à l'aide de la loi de la gravitation et la comparaison avec les résultats observationnels, dans le cas où il y a égalité entre les deux résultats, justifient en même temps la loi de la gravitation universelle en tant que telle.

Les «Règles» sont suivies par des faits expérimentaux qui serviront de base aux Propositions plus théoriques qui vont suivre. Le «Phénomène I» draine d'abord des résultats observationnels concernant les satellites de Jupiter et fait voir que ceux-ci suivent les deuxième et troisième loi de Kepler. Le «Phénomène II» établit le même résultat pour les satellites de Saturne. Le phénomène suivant porte sur les mouvements planétaires : «Les cinq principales planètes Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne enferment le Soleil dans leurs orbes.» [1]. Le «Phénomène IV» fait mention de la troisième Loi de KEPLER tout en faisant référence à ce dernier : «Les temps périodiques des cinq principales planètes autour du Soleil, et celui de la Terre autour du Soleil, ou du Soleil

autour de la Terre (en supposant les étoiles fixes en repos) sont en raison sesquiplée de leur moyenne distance au Soleil.» [1]. Le «Phénomène V» établit le bien-fondé du système héliocentrique : «Si on prend la Terre pour centre des révolutions des planètes principales, les aires qu'elles décrivent ne seront point proportionnelles aux temps ; mais si on regarde le Soleil comme le centre de leurs mouvements, on trouvera alors leurs aires proportionnelles aux temps» [1]. Finalement le «Phénomène VI» porte sur le mouvement de la Lune : «La Lune décrit autour de la Terre des aires proportionnelles au temps.» [1]. NEWTON admet dans son commentaire que les mouvements de la Lune sont à la vérité un peu troublés par l'action du Soleil, mais il veut, à ce stade négliger «les petites erreurs insensibles» [1] dues à cette perturbation. Ce n'est qu'à la PROPOSITION XXV Problème VI qu'il revient à la question quand il demande de «trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvements de la Lune.» [1]

Dans les six Propositions qui suivent les «Phénomènes», NEWTON déduit les forces en jeu à partir de ceux-ci. NEWTON montre que cette force est bien la force gravitationnelle qui retire les satellites et les planètes de leurs mouvements rectilignes et les retient sur leurs orbites respectives. Cette force est dirigée vers le corps central et elle est inversement comme les carrés des distances de leurs lieux au centre du corps central respectif. Dans la PROPOSITION VII **Théorème VII**, NEWTON annonce alors la loi de la gravitation universelle : «La gravité appartient à tous les corps, et elle est proportionnelle à la quantité de matière que chaque corps contient.» [1]. Et, en se référant au **Corollaire 3** de la PROPOSITION LXXIV du premier Livre, NEWTON dit au **Corollaire 2** de la PROPOSITION VII : «La gravité vers chaque particule égale d'un corps, est réciproquement comme le carré des distances des lieux de ces particules.» [1]. Nous allons analyser dans les détails la démarche de NEWTON pour introduire la loi de la gravitation au chapitre suivant.

Une fois acquis son résultat, NEWTON peut le mettre en œuvre afin de résoudre divers problèmes astronomiques. En effet, l'introduction de la force de la gravité comme cause principale du mouvement des corps célestes lui permet de déduire leurs orbites. Et c'est précisément cette application qui validera son principe de la gravitation universelle.

Il faut distinguer dans la démarche newtonienne deux côtés : un aspect philosophico-physique et un aspect mathématico-astronomique. Le premier visait surtout la cause des phénomènes et les forces y sous-jacentes expliquant ceux-ci. Jusqu'au temps de NEWTON, la théorie cartésienne, purement qualitative, avait suffi aux besoins explicatifs. Mais pour la génération des scientifiques naissant avec KEPLER, ces explications n'étaient plus suffisantes parce qu'elles n'étaient point fondées sur une loi mathématique. Cette nouvelle génération avait même une certaine tendance à se désintéresser des grands principes explicatifs et se contentait avec les lois purement quantitatives permettant la prévision des phénomènes dans le temps en tenant compte de toutes les contraintes extérieures. NEWTON avait lui aussi cette ambition comme déjà les différentes visions du «*De motu*» le prouvent, et il fut pour lui absolument nécessaire de montrer que sa théorie était apte à donner ces informations mathématico-

astronomiques. Il ne visait pas seulement les orbites elliptiques des planètes qui obéissent aux lois simples de KEPLER, mais se faisait fort d'expliquer aussi les perturbations de ces orbites et surtout aussi les inégalités dans le mouvement de la Lune. NEWTON devait donc montrer que son principe de la gravitation universelle expliquait toutes les perturbations dans les mouvements des planètes, satellites et de la Lune et c'est là précisément le but qu'il poursuit avec les développements du LIVRE III.

Celui-ci expose d'abord un ensemble de propositions relatives à l'étude précise des mouvements planétaires, à la précession des équinoxes ainsi qu'à la figure de la Terre qu'il trouve «*un peu plus haute à l'équateur qu'aux pôles*» [1] et il en déduit la variation du poids d'un corps pesé en diverses régions de la Terre. Il parle également de la question du flux et du reflux de la mer causés par les actions de la Lune et du Soleil sur les eaux des océans. Une série de propositions donne une analyse du difficile problème des trois corps dans un style purement géométrique. Les propositions suivantes portent sur les inégalités de la Lune qui peuvent malgré leur complexité être : «*déduites de la théorie de la gravité*» [1] comme l'écrit NEWTON. Les dernières Propositions du LIVRE III sont consacrées au mouvement des comètes et NEWTON les accompagne d'un très grand nombre de résultats d'observation. Il tire la conclusion : «*que les comètes sont du genre des planètes et qu'elles tournent autour du Soleil dans des orbes très excentriques.*» [1]

Un «*scholie général*» clôt le LIVRE III en ouvrant la «*Philosophie naturelle*» sur des perspectives métaphysiques et théologiques : «*Cet admirable arrangement du Soleil, des planètes et des comètes, ne peut être que l'ouvrage d'un être tout puissant et intelligent. Et si chaque étoile fixe est le centre d'un système semblable au nôtre, il est certain, que tout portant l'empreinte d'un même dessein, tout doit être soumis à un seul et même Être : car la lumière que le Soleil et les étoiles fixes se renvoient mutuellement est de même nature. De plus, on voit que celui qui a arrangé cet Univers, a mis les étoiles fixes à une distance immense les unes des autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur gravité. Cet Être infini gouverne tout, non comme l'âme du monde, mais comme le Seigneur de toutes choses.*» [1]. Pour NEWTON il n'y a pas de plus belles preuves de la présence de Dieu et de sa toute puissance que celles qui se tirent de l'harmonie et de la régularité du système du monde telles qu'il les a exposées dans le LIVRE III.

L'œuvre de NEWTON contient tellement de facettes riches et originales qui ne peuvent être relatées que très imparfaitement dans un résumé même assez détaillé. Il faut entrer dans le texte lui-même, ce que nous allons faire pour les Propositions consacrées à la loi de la gravitation universelle, au problème des trois corps et la théorie de la Lune. L'importance accordée dans les «PRINCIPIA» à la nécessité démonstrative et à la construction mathématique, à partir de quelques principes et concepts bien dégagés, scelle maintenant de façon exemplaire, par-delà la remarquable formulation de l'hypothèse de la loi de la gravitation universelle, l'acte de naissance de la physique mathématique [114].

-III-

Nous avons accompagné la genèse de la pensée de NEWTON et sa réflexion sur la forme et la nature de la force de gravitation depuis 1660 à 1726. Nous avons écrit que le traité «*De Motu*» constituait un changement fondamental de paradigme et il devient dès lors nécessaire de rappeler encore le cheminement de la réflexion newtonienne en comparant son exposé des années 1684 à la première édition des «PRINCIPIA». En effet il faut de prime abord se rendre compte que les sept problèmes et quatre théorèmes du traité «*De Motu*» dépassaient de loin en ampleur la réponse à la simple question de HALLEY sur la forme de la trajectoire d'un corps attiré par une force centrale. Et la même différence, à la fois quantitative et qualitative, apparaît lors de la comparaison des deux œuvres de NEWTON de 1684 et 1687.

Le LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» traite du mouvement dans le vide, tout comme il fut le cas pour les quatre premiers problèmes et théorèmes du traité original de 1684. Ces théorèmes et problèmes énoncés dans «*De Motu*» ont été incorporés dans les sections deux et trois du LIVRE I des «PRINCIPIA». Ainsi la deuxième section débute avec la démonstration du théorème premier du «*De Motu*» : «*Tous les corps qui tournent, décrivent par les rayons menés au centre des aires proportionnelles au temps.*» [44]

Cette deuxième loi de KEPLER revient dans la PROPOSITION I **Théorème** I de la seconde section du LIVRE I : «*Dans les mouvements curvilignes des corps, les aires décrites autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, et sont proportionnelles au temps.*» [1]. Cette formulation légèrement différente de celle de 1684, introduit la forme passive de «*mouvements curvilignes*» au lieu de «*tous les corps qui tournent*» et NEWTON utilise cette même forme dans les problèmes à la suite de cette PROPOSITION I. Si la forme active est neutre, il n'en est pas ainsi pour la formulation passive qui peut présupposer un agent extérieur provoquant ce mouvement. Mais en dehors de toute intuition métaphysique, la formulation adoptée dans les «PRINCIPIA» contient une information supplémentaire en précisant que les mouvements sont fixés dans un plan mobile. La section III du premier Livre se termine avec la solution du Problème IV énoncé dans le «*De Motu*» dans la formulation suivante : «*Supposant que la force centripète est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre, et connaissant la quantité de cette force, on demande l'ellipse qu'un corps décrira s'il est lancé d'un lieu donné, avec une vitesse donnée, le long d'une ligne droite donnée.*» [44]

Dans les «PRINCIPIA» ce même problème apparaît comme PROPOSITION XVII Problème IX. La formulation est presque identique dans les deux cas sauf que NEWTON élargit la possibilité des trajectoires en parlant de «*courbes*» au lieu «*d'ellipses*», tout en maintenant cette généralité plus grande aussi dans le développement de sa démonstration.

La version élargie du traité initial dans les sections II et III des «PRINCIPIA»

est précédée d'un ensemble étendu de définitions, lois du mouvement et lemmes dont certains proviennent du traité de 1684. Mais seulement les définitions III et V des «PRINCIPIA» trouvent leur contrepartie dans celles du «*De Motu*». Ainsi correspond à la définition trois la définition deux du «*De Motu*» sous la forme : *«Force du corps, ou force inhérente au corps, celle par laquelle celui-ci s'efforce de persévérer dans son mouvement selon une ligne droite.»* [44] Cette loi de l'inertie trouve la formulation suivante dans les «PRINCIPIA» : *«La force qui réside dans la matière (vis insita) est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévère de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.»* [44] La définition première du traité de 1684 qui avait dans celui-ci la forme : *«Force centripète, celle par laquelle un corps est attiré ou poussé vers un point quelconque considéré comme un centre»* [44] devient la définition cinq des «PRINCIPIA» : *«La force centripète est celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, soit qu'ils soient tirés ou poussés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque.»* [1] NEWTON explicite dans son ouvrage de 1687 cette notion de force centripète en introduisant les concepts de quantité absolue, de quantité accélératrice et de quantité motrice dans les définitions VI, VII et VIII.

Dans les «PRINCIPIA», NEWTON présenta après les définitions les «*Axiomes ou lois du mouvement*» dont on retrouve également les traces dans le «*De Motu*». Ainsi l'hypothèse II de ce traité devient trois ans plus tard la loi première. L'hypothèse II s'énonce : *«Tout corps par sa seule force inhérente, s'avance uniformément selon une ligne droite à l'infini, à moins que quelque chose d'extérieur ne l'en empêche.»* [44]. Cette transcription de la définition deux devient dans les «PRINCIPIA» : *«Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état.»* [1]. NEWTON, dans la deuxième version, est plus explicite en précisant que la perturbation extérieure est obligatoirement une force, concept qu'il affine encore dans la deuxième loi en précisant que *«Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice, et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.»* [1].

L'hypothèse III du «*De Motu*» introduit la composition vectorielle des forces et se lit : *«Un corps, dans un temps donné, est porté par plusieurs forces réunies au même lieu où il serait porté successivement par ces forces divisées en des temps égaux»* [44] se retrouve dans le **Corollaire** I suivant les lois du mouvement avec la formulation : *«Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il aurait parcouru ses côtés séparément.»* [1]. Cette formulation quoique contenant la même information que la précédente, a gagné en clarté tout en préservant l'hypothèse newtonienne que la force est mesurée par le déplacement qu'elle produit dans un intervalle de temps donné.

Finalement l'hypothèse IV du «*De Motu*» est reprise dans le lemme 10 de la section première des «PRINCIPIA» qui se lit : *«Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée*

et immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps.» [1]. Ici aussi il y a une généralisation dans le sens que le concept de «force centripète» est remplacé par la «force finie» notion plus générale.

Dans la section II des «PRINCIPIA» on retrouve encore des formulations déjà énoncées dans le «*De Motu*». Le **Théorème** I du premier traité a été déjà discuté plus avant : il faut se pencher sur les autres reprises. Ainsi le théorème deux du «*De Motu*» : «*Si des corps tournent uniformément sur des circonférences de cercle, les forces centripètes sont comme les carrés des arcs décrits en même temps, divisés par les rayons des cercles.*» [44]. La version étendue de ce théorème repris comme PROPOSITION IV **Théorème** IV dans les «PRINCIPIA» a la forme suivante : «*Les corps qui parcourent uniformément différents cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles, et qui sont entre elles comme les carrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.*» [1]. L'énoncé du théorème retient que les forces centripètes sont dirigées vers le centre du cercle de référence, information seulement implicitement comprise dans la version de ce même théorème dans le «*De Motu*». Dans le scholie suivant ce théorème, NEWTON déclare vouloir donner une explication plus détaillée de toutes les questions concernant la force centripète et, en fait, il revient à ses notes dans le «*Waste book*» d'avant 1669 et sa discussion du mouvement circulaire uniforme [80]. Il profita également de l'occasion pour ajouter à ce scholie un paragraphe clamant ses droits de priorité sur HOOK concernant l'ensemble des questions. Le texte de la PROPOSITION VI **Théorème** V des «PRINCIPIA» est quasiment identique à celui du **Théorème** III du «*De Motu*», sauf quelques révisions intervenues toujours dans le sens de donner une généralité plus grande à ses affirmations.

Le problème I du «*De Motu*» se retrouve dans la PROPOSITION VII Problème II des «PRINCIPIA». Dans le traité antérieur, NEWTON demande : «*Un corps tourne sur la circonférence d'un cercle. Trouver la loi de la force centripète qui tend vers un point de la circonférence*» [44] tandis qu'il formule en 1687 : «*Trouver la loi de la force centripète qui tend à un point donné, et qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle*» [1]. Les deux textes sont pratiquement identiques.

Le problème II du «*De Motu*» est repris dans la PROPOSITION X Problème V des «PRINCIPIA». Si dans le premier traité, il est dit : «*Un corps tourne sur l'ellipse des Anciens : trouver la loi de la force centripète tendant au centre de l'ellipse*» [44], NEWTON formule dans les «PRINCIPIA» : «*Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette ellipse*» [1]. Ici aussi les deux formulations sont quasiment identiques.

La section III des «PRINCIPIA» traite du cas du mouvement des corps dans les sections coniques excentriques et contient la réponse à la question que HALLEY avait posée en 1684 à NEWTON. Si en 1684, il avait condensé sa réponse à cette question dans le Problème III : «*Un corps tourne sur une ellipse. Trouver la loi de la force centripète qui tend vers le foyer de l'ellipse*» [44], il adopte dans la PROPOSITION XI Problème VI une formulation passive en écrivant :

«Un corps faisant sa révolution dans une ellipse; on demande la loi de la force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers» [1]. Pour le restant les deux assertions sont identiques mot pour mot.

La troisième loi de KEPLER donnée dans le **Théorème IV** du «*De Motu*» sous la forme : «*Si l'on suppose que la force centripète est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre, les carrés des temps périodiques sont comme les cubes des axes transverses*» [44] est reprise comme PROPOSITION XV **Théorème VII** sous la forme : «*Les mêmes choses étant posées, les temps périodiques dans les ellipses, sont en raison sesquiplée de leurs grands axes*» [1]. Il faut noter que la démonstration de ce théorème dans les «PRINCIPIA» est plus simple et plus élégante que celle purement géométrique dans le «*De Motu*».

Finalement le Problème IV du «*De Motu*», la formulation newtonienne du problème inverse, dans lequel il demande de déterminer : «*L'ellipse qu'un corps décrira*» [44], est repris sous une forme plus générale avec les mots : «*Supposant que la force centripète soit réciproquement proportionnelle au carré de la distance au centre, et que la quantité absolue de cette force soit connue, on demande la courbe qu'un corps décrit en partant d'un lieu donné, avec une vitesse donnée suivant une ligne droite donnée.*» [1]

Les problèmes VI et VII du traité de 1684 sont le point de départ du LIVRE II des «PRINCIPIA».

Cette comparaison rapide des deux textes a montré encore une fois que NEWTON a accompli en trois ans une œuvre immense, que le XVIII^e siècle aura pour tâche de comprendre, de développer et de vérifier. Les véritables contemporains de NEWTON sont CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, IndexLa-grange et finalement LAPLACE.

2.4 La loi de la gravitation universelle d'après les « Principia »

NEWTON s'intéresse au phénomène de la gravitation dès l'année 66, l'année de la grande peste en Angleterre qu'il fuit à Cambridge pour retourner à Woolsthorpe dans la maison familiale et le foyer maternel. Et ce serait pendant l'automne de cette année, où assis rêveur sous un pommier, qu'il aurait eu l'intuition de l'égalité de la force qui fait tomber une pomme sur la Terre et celle qui retient la Lune dans son orbite. Plus de cinquante années plus tard NEWTON écrit : «*En novembre (1665), j'avais la méthode directe des fluxions et l'année suivante en janvier j'avais la théorie des couleurs et en mai j'accédais à la méthode inverse des fluxions. La même année, j'ai commencé à penser à l'extension de la gravitation à l'orbite de la Lune, et de la loi de KEPLER égalant la période des planètes à la proportion sesquialtère de leurs distances du centre de leurs orbites, je déduisais que les forces qui maintiennent les planètes sur leurs orbites doivent être inversement proportionnelles au carré de leurs distances aux centres autour desquels elles tournent. Et en comparant la force*

nécessaire pour retenir la Lune sur son orbite avec la force de la gravité à la surface de la Terre, je trouvais une très bonne concordance ... » [35].

Même si NEWTON a fondé dès le début de sa carrière une légende qu'il activera dans sa vieillesse lors de son combat avec LEIBNIZ pour la priorité de l'invention du calcul différentiel et intégral, qu'il avait donc tendance à placer ses intuitions géniales le plus tôt possible dans sa vie, nous avons vu que l'idée de la loi de la gravitation universelle est à dater au moins vingt années plus tard.

En effet ce fut VOLTAIRE dans ses *«Lettres philosophiques»* [120] qui, non seulement montrait que NEWTON a anéanti la physique cartésienne, mais qu'il découvrit le principe de la gravitation : *«S'étant retiré en 1666 à la campagne près de Cambridge, un jour qu'il se promenait dans son jardin, et qu'il voyait des fruits tomber d'un arbre, il se laissa aller à une méditation profonde sur cette pesanteur, dont tous les philosophes ont cherché si longtemps la cause en vain, et dans laquelle le vulgaire ne soupçonne pas même de mystère. Il se dit à lui-même : De quelque hauteur dans notre hémisphère que tombassent ces corps, leur chute serait certainement dans la progression découverte par GALILEI ; et les espaces parcourus par eux seraient comme les carrés des temps. Ce pouvoir qui fait descendre les corps graves est le même, sans aucune diminution sensible, à quelque profondeur qu'on soit de la Terre, et sur la plus haute montagne. Pourquoi ce pouvoir ne s'étendrait-il pas jusqu'à la Lune ? Et s'il est vrai qu'il pénètre jusque là, n'y a-t-il pas grande apparence que ce pouvoir la retient dans son orbite et détermine son mouvement ? Mais si la Lune obéit à ce principe quel qu'il soit, n'est-il pas encore très raisonnable de croire que les autres planètes y sont également soumises ?»* [120]

VOLTAIRE poursuit son récit : *«Voilà comment Monsieur NEWTON raisonna. Mais on n'avait alors en Angleterre que de très fausses mesures de notre globe ; on s'en rapportait à l'estime incertaine des pilotes qui comptaient soixante miles d'Angleterre pour un degré, au lieu qu'il en fallait compter près de soixante-dix. Ce faux calcul ne s'accordant pas avec les conclusions que Monsieur NEWTON voulait tirer, il les abandonna. Un philosophe médiocre et qui n'aurait eu que de la vanité eût fait cadrer comme il eût pu la mesure de la Terre avec son système. Monsieur NEWTON aima mieux abandonner alors son projet. Mais depuis que Monsieur PICARD eût mesuré la Terre exactement, en traçant cette méridienne qui fait tant d'honneur à la France, Monsieur NEWTON reprit ses premières idées, et il trouva son compte avec le calcul de Monsieur PICARD ; c'est une chose qui me paraît toujours admirable qu'on ait découvert de si sublimes vérités avec l'aide d'un quart de cercle, et d'un peu d'arithmétique»* [120].

VOLTAIRE conclut finalement : *«Etant donc démontré que la Lune pèse sur la Terre, qui est le centre de son mouvement particulier, il est démontré que la Terre et la Lune pèsent sur le Soleil, qui est le centre de leur mouvement annuel. Les autres planètes doivent être soumises à cette loi générale, et si cette loi existe, ces planètes doivent suivre les règles trouvées par KEPLER. Toutes ces règles, tous ces rapports sont en effet gardés par les planètes avec la dernière*

exactitude, donc le pouvoir de la gravitation fait peser toutes les planètes vers le Soleil, de même que notre globe ... » [120].

Après cette description romancée revenons aux faits. Quels furent les calculs de NEWTON ? David GREGORY, dans son compte-rendu de la visite qu'il fit à NEWTON à Cambridge en 1694 notait : «*J'ai vu un manuscrit rédigé avant l'année 1669 (l'année où l'auteur fut promu «Lucasian Professor of Mathematics») dans lequel toutes les bases de sa philosophie furent indiquées : en particulier la gravité de la Lune vers la Terre et des planètes vers le Soleil. Et en fait ces phénomènes sont sujets à une vérification par le calcul. Je voyais également dans ce manuscrit le principe de l'isochronie d'une pendule suspendu entre des cycloïdes et cela avant la publication de l'«Horologium Oscillatorium» de Huygens*» [82]. Puis il fit la description suivante des réflexions de NEWTON :

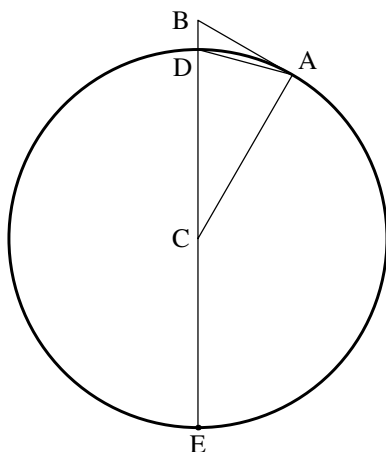


Fig. 2.4-1

Soit $DAED$ l'orbite circulaire décrite par la Lune ayant le rayon R (Fig. 2.4-1) et soit v la vitesse uniforme autour du centre de la Terre en C . Et soit A le lieu instantané de la Lune déplacé d'une distance infinitésimale de D en B , un point sur la prolongation de CD que la Lune atteindrait si l'attraction terrestre faisait défaut pendant un temps dt .

En appelant a_{cc} l'attraction gravitationnelle à laquelle la Lune est soumise, il s'ensuit de la loi de GALILEI :

$$\frac{1}{2}a_{cc}(dt)^2 = BD \quad (2.10)$$

La période de révolution de la Lune étant :

$$\frac{dt}{T} = \frac{AD}{2\pi R} \quad (2.11)$$

donc :

$$\frac{1}{2}a_{cc} = \frac{(2\pi R)^2}{T^2} \cdot \frac{BD}{AD^2} \quad (2.12)$$

De la géométrie élémentaire on déduit :

$$AB^2 = BD \cdot BE \sim 2 \cdot BD \cdot R \quad (2.13)$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}a_{cc} = \frac{(2\pi R)^2}{2R} \cdot \frac{1}{T^2} \quad (2.14)$$

ou bien

$$a_{cc} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (2.15)$$

En appliquant cette dernière formule au système Terre–Lune et en introduisant les valeurs connues actuellement pour R et T , on obtient :

$$a_{cc} = \frac{39.48 \cdot 3.84 \cdot 10^{10}}{(27.32 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \simeq 0.272 \quad (2.16)$$

Et l'accélération gravitationnelle à la surface de la Terre devient :

$$g = 9.80 = 3602 \cdot a_{cc} \quad (2.17)$$

Or NEWTON trouva :

$$g \approx 4000 \cdot a_{cc} \quad (2.18)$$

La différence entre ~ 3600 et ~ 4000 et plus ne correspondait pas à l'attente de NEWTON et le découragea de poursuivre ses investigations.

Cette différence fut expliquée par l'hypothèse erronée de NEWTON quant à la longueur d'un degré de latitude qu'il avait admis égal à 60 au lieu de 69.5 miles ainsi que par l'usage de 5000 pieds au lieu de 5280 pieds pour une mile. En tenant compte de ces fausses valeurs, NEWTON arriva au résultat :

$$g \cong 3600 \cdot \left(\frac{69.5 \cdot 5999}{60 \cdot 5280} \right)^2 \cong 4332 \quad (2.19)$$

qu'il arrondit alors à la valeur en 2.18. Il faut noter que, utilisant :

$$dt = \frac{AD}{v} \quad (2.20)$$

remplaçant la relation 2.11, NEWTON aurait obtenu :

$$a_{cc} = 2 \frac{BD}{AD^2} v^2 = \frac{v^2}{R} \quad (2.21)$$

qu'il introduisit plus tard dans les «PRINCIPIA», mais qu'il n'entrevoit pas encore lors de la rédaction de son premier manuscrit. D'une façon plus explicite, de l'équation :

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad (2.22)$$

et de la deuxième loi de KEPLER :

$$T \sim R^{3/2} \quad (2.23)$$

on déduit :

$$v^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \sim \frac{1}{R} \quad (2.24)$$

et avec 2.21

$$a_{cc} \sim \frac{1}{R^2} \quad (2.25)$$

En trouvant un résultat 2.19 passablement erroné, NEWTON délaissa la théorie pendant vingt ans jusqu'à l'élaboration de la première édition des «PRINCIPIA»[1]. Dans la PROPOSITION IV du LIVRE III, il entreprit de montrer la corrélation entre l'accélération gravitationnelle et l'accélération centripète de la Lune. Il écrit : «*La Lune gravite vers la Terre et par la force de la gravité, elle est continuellement retirée du mouvement rectiligne et retenue dans son orbite*» [1]. Cette proposition est précédée dans la troisième édition de 1727 par la PROPOSITION III **Théorème III**, qu'il énonce dans la formule suivante : «*La force qui retient la Lune dans son orbite, tend vers la Terre, et est en raison réciproque du carré de la distance des lieux de la Lune au centre de la Terre.*» [1]

Avec les deux propositions, NEWTON a formulé sa démonstration de la validité de sa loi de la gravitation à travers l'orbite lunaire.

Les deux théorèmes sur la Lune sont précédés par deux propositions ayant comme sujet la gravitation en général. Ainsi NEWTON énonce la PROPOSITION I **Théorème I** de la façon suivante : «*Les forces par lesquelles les satellites de Jupiter sont retirés perpétuellement du mouvement rectiligne et retenus dans leurs orbites, tendent au centre de Jupiter et sont en raison réciproque des carrés de leurs distances à ce centre.*» [1]

Pour «prouver» son assertion, NEWTON renvoie d'abord au phénomène 1 au début du LIVRE III, décrivant le système de Jupiter, puis aux seconde et troisième propositions du premier Livre. Ces propositions relient le mouvement suivant la loi des aires à la présence d'une force centrale. La PROPOSITION II **Théorème II** extrapole les acquis du théorème précédent au système planétaire «*Les forces par lesquelles les planètes principales sont perpétuellement retirées du mouvement rectiligne, et retenues dans leurs orbites, et tendent au Soleil, sont réciproquement comme le carré de leurs distances à son centre.*» [1]. NEWTON renvoie au Phénomène V postulant la conformité de la loi des

aires avec le mouvement des planètes autour du Soleil, ainsi qu'à la seconde proposition du LIVRE I déjà évoquée à propos des mouvements des satellites de Jupiter. Il renvoie également au Phénomène IV qui n'est rien d'autre que l'énoncé de la troisième loi de KEPLER, et à la PROPOSITION IV du premier livre traitant des forces centripètes. Finalement NEWTON mentionne pour prouver sa loi d'attraction, la fixité des aphélie des orbites planétaires : «*Car pour peu que les planètes s'écartassent de cette loi, le mouvement des apsides serait remarquable à chaque révolution, et deviendrait très considérable au bout de plusieurs révolutions.*» [1]. Nous reviendrons de suite à cette question en commentant la PROPOSITION III **Théorème III** qui déjà a été introduite plus haut. Ici aussi NEWTON renvoie d'abord aux phénomènes énoncés au début du LIVRE III, et au phénomène 6 : «*La Lune décrit autour de la Terre des aires proportionnelles aux temps*» [1], ainsi qu'aux **Théorèmes II et III** du premier livre qu'il avait déjà introduits lors de la discussion des deux premières propositions concernant l'attraction. Le mouvement très lent de l'apogée lunaire, implicitement introduit dans la deuxième partie de la PROPOSITION III, mérite plus d'attention et sera donc discuté plus en détail.

En effet, l'apogée de la Lune fait une lente rotation qui est de $3^{\circ}3'$ pour une révolution complète, phénomène dont l'explication formera quelques décennies plus tard, le sujet principal des théories de la Lune de CLAIRAUT et de D'ALEMBERT comme nous allons le voir. NEWTON, lui, admit deux possibilités, toutes les deux ad hoc et il les avait explorées dans la célèbre PROPOSITION XLV du LIVRE I. La première possibilité consistait pour lui de prendre la rotation de la ligne des apsides comme un fait brut et de rechercher la loi de l'attraction correspondante. La deuxième était de rechercher des perturbations externes telles qu'un effet de marée dû au Soleil et d'en déterminer la grandeur.

Considérons maintenant la première alternative. Dans l'exemple II adjoint à la PROPOSITION XLV, NEWTON considère un corps décrivant une orbite mobile qui retourne à la même direction de la ligne des apsides après m révolutions tandis que le corps parcourt n fois l'orbite considérée comme étant fixe. Il détermine la force centripète, dans le cas où les orbites sont très peu différentes d'une orbite circulaire, à :

$$FC \simeq r^{n^2/m^2-3} \quad (2.26)$$

Dans le cas de la Lune on a :

$$n : m = 360 : 363 = 120 : 121 \quad (2.27)$$

Voilà pourquoi :

$$\frac{n^2}{m^2} - 3 = -\frac{29523}{14641} = -2 \cdot \frac{4}{243} \quad (2.28)$$

et la loi de l'attraction devient :

$$r^{-2-4/243} = r^{-2.0165} \quad (2.29)$$

NEWTON remarque que cette loi est : «*en une raison un peu plus grande que la raison doublée inverse de la distance, mais qui approche plus de 59 3/4 parties de la doublée que de la triplée; et comme la différence de cette force à celle qui serait exactement en raison inverse du carré, vient de l'action du Soleil, (comme je l'expliquerai dans la suite) on peut la négliger ici.*» [1]. La seconde possibilité est, pour NEWTON la recherche d'une force due à l'effet de marée solaire. Pour ce faire, il retourne l'argument du **Corollaire II** de la PROPOSITION XLV du LIVRE I. Ici NEWTON avait postulé que l'effet de marée du Soleil pouvait être modélisé par une force proportionnelle à la distance. Ainsi la somme des forces attractives serait de la forme

$$FC \simeq r^{-2} - cr \quad (2.30)$$

avec une constante c à déterminer. Une telle force produit un angle de rotation de :

$$180^{\text{deg}} \cdot \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}} \simeq 180^{\text{deg}} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}c\right) \quad (2.31)$$

Avec l'estimation réaliste :

$$c = \frac{100}{35745} \quad (2.32)$$

il trouva que la ligne des apsides avancerait de $1^{\circ}31'28''$ pendant une période et NEWTON de conclure laconiquement que cette valeur «*est à peu près la moitié du mouvement de l'apside de la Lune*» [1]. Il se voit donc contraint de doubler la valeur 2.32 et «*elle est à la force centripète de la Lune comme 2 à 357.45 à peu près, ou comme 1 à $178 \cdot 29/40$. Et en négligeant cette petite action du Soleil, la force restante par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, sera réciproquement comme D^2 , ce qui paraîtra clairement en comparant cette force avec la force de la gravité, comme dans la proposition suivante (c'est-à-dire la PROPOSITION IV, le test de la Lune).*» [1]

NEWTON veut nous faire comprendre que les deux formules pour la force centripète :

$$\left. \begin{aligned} FC &\simeq r^{-2.0165} \\ FC &\simeq r^2 - 0.005595r \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

sont des hypothèses alternatives, mais ad hoc, pour expliquer le mouvement de la ligne des apsides de la Lune. Or il se rend compte que les expressions 2.33 ne constituent en aucune façon une théorie de l'orbite de la Lune consistante [121].

Et c'est d'une façon quelque peu résignée qu'il conclut dans le corollaire à la PROPOSITION III : «*Si la force centripète médiocre par laquelle la Lune est retenue dans son orbite est premièrement augmentée dans la raison de $177 \cdot 29/40$ à $178 \cdot 29/40$, et ensuite en raison doublée du demi-diamètre de la Terre à la moyenne distance du centre de la Lune au centre de la Terre : on aura la*

force centripète de la Lune près de la surface de la Terre en supposant que cette force, en descendant vers la surface de la Terre, augmente continuellement en raison doublée inverse de la hauteur.» [1]

La PROPOSITION IV **Théorème** IV est, pour NEWTON, la vraie démonstration de sa théorie de la gravitation universelle et se démarque favorablement de ces premières considérations faites lors des années de la grande peste. Comme cette question était de la plus extrême importance pour sa physique, on comprend que NEWTON voulait une précision parfaite entre les valeurs de g déterminées à la surface de la Terre et à partir de l'accélération lunaire. Ainsi, après avoir énuméré toutes les valeurs connues de son temps pour la distance moyenne de la Lune à la Terre, NEWTON choisit pour son calcul les chiffres suivants : «*Prenons 60 demis-diamètres de la Terre pour la distance moyenne dans les syzygies ; et supposons que la révolution de la Lune autour de la Terre, par rapport aux étoiles fixes, s'achève en 27 jours 7 heures 43 minutes, comme les Astronomes l'ont déterminé : enfin prenons 123 249 600 pieds de Paris pour la circonférence de la Terre, suivant les mesures prises en France ...* » [1]

L'arc S que la Lune décrit dans son orbite en une minute est alors :

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{39343} \text{ radians} \quad (2.34)$$

en transformant la période de révolution de 27d7h43' en minutes. La descente de la Lune vers la Terre en une minute devient alors :

$$D = (60 \cdot \text{rayon de la Terre}) \cdot \frac{1}{2} \delta\theta \quad (2.35)$$

En introduisant les valeurs indiquées, NEWTON obtient pour D :

$$D = 15 \cdot \frac{1}{120} \text{ pieds de Paris} \quad (2.36)$$

Il s'ensuit qu'à la surface de la Terre, où la gravité est de $60 \cdot 60 = 3600$ fois plus grande, un corps parcourrait en une seconde la même distance de $15 \frac{1}{120}$ pieds de Paris, «*ou plus exactement 15 pieds 1 pouce et $1 \frac{4}{9}$ lignes. Et c'est en effet l'espace que des corps décrivent dans une seconde en tombant vers la Terre.*» [1]

Il reste à comparer cette descente, prédite par des observations astronomiques avec la chute en ligne droite sous l'influence de la gravité, d'un corps à la surface de la Terre. NEWTON le fait en se référant à HUYGENS, qui a calculé la période d'oscillation d'un pendule en fonction de sa longueur par [45] :

$$T^2 = \frac{\pi^2 l}{g} \quad (2.37)$$

La longueur du pendule qui bat la seconde est alors donnée par :

$$l = \frac{g}{\pi^2} \quad (2.38)$$

tandis que la loi de GALILEI donne [81] :

$$g = 2S \quad (2.39)$$

En éliminant g de 2.38 et 2.39, il devient :

$$S = \frac{1}{2}l\pi^2 \quad (2.40)$$

C'est cette relation que NEWTON utilisa en se référant à l'autorité de HUYGENS qui avait trouvé :

$$l = 3 \text{ pieds de Paris } 8 \text{ lignes et demi} \quad (2.41)$$

et il obtient :

$$S = \left(15 + \frac{1.16}{12}\right) \text{ pieds de Paris} \quad (2.42)$$

En comparant ce résultat à 2.36, NEWTON conclut : «*Donc la force par laquelle la Lune est retenue dans son orbite, serait égale à la force de la gravité ici-bas, si la Lune était près de la surface de la Terre, donc (selon les Règles 1 et 2) c'est cette même force que nous appelons gravité. Car si cette force était autre que la gravité, les corps en s'approchant de la Terre par ces deux forces réunies descendraient deux fois plus vite, et ils parcourraient en tombant pendant une seconde un espace de 301/6 pieds de Paris : ce qui est entièrement contraire à l'expérience.*» [1]. La référence que NEWTON fait dans ce texte se rapporte aux «*Règles qu'il faut suivre dans l'étude de la physique*» tout au début du LIVRE III et commentées plus avant.

On peut se demander si la preuve que NEWTON prétendit avoir donnée n'est pas manipulée [122] ? Ressentant lui-même cette faille, NEWTON voulait ajouter dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» un scholie au **Théorème IV** qu'il envoya à R. COTES. Celui-ci avait vite compris l'arrière pensée de NEWTON qui consistait à arranger tacitement la distance moyenne Terre-Lune, la longueur du pendule battant la seconde et la valeur de 1° de longitude à la latitude de Paris, tout en considérant la distance lunaire comme variable libre. Il proposait d'ailleurs à NEWTON d'arranger d'une façon optimale les nombres afin d'arriver au meilleur résultat [99]. Finalement NEWTON abandonna l'idée du scholie destiné à expliquer la corrélation des deux résultats obtenus dans la PROPOSITION IV et il inséra ce texte dans la PROPOSITION XXXVII Problème XVIII sur les marées qui compare la force attractive du Soleil à celle de la Lune. Cette proposition a l'énoncé suivant : «*Trouver la force de la Lune pour mouvoir les eaux de la mer*» [1]. A ce théorème s'ajoute une série de corollaires ayant principalement comme sujet le calcul des densités comparatives de la Lune et de la Terre afin d'en déduire leurs masses. Il est intéressant d'examiner plus en détail le **Corollaire VII** qui, en fait, est le calcul de la distance moyenne Terre-Lune à partir de la valeur de g . Dans la PROPOSITION IV **Théorème IV**, NEWTON avait admis que la Lune gravite autour du centre de la Terre.

Maintenant il corrige la distance séparant les deux corps célestes en tenant compte du centre de la gravité commun des deux corps, et adopte $60 \frac{2}{5}$ (à partir de la troisième édition) comme rayon maximal de la Terre. C'est alors que $1/2 g$ revient à la valeur de 15 pieds 1 pouce $4 \frac{1}{11}$ lignes à la latitude de Paris de $\sim 45^\circ$. En augmentant la valeur de $1/2g$, afin de tenir compte de la force centripète à la latitude de Paris, NEWTON obtient la valeur de 15 pieds 1 pouce et $1 \frac{1}{2}$ lignes. «*Or on fait voir dans les PROPOSITIONS IV et IXX que les graves parcourent en effet cet espace en une seconde à la latitude de Paris*» [1]. Mais que NEWTON a-t-il prouvé au juste ? Il a montré qu'il arrivait à calculer la distance de la Lune à partir de la valeur de l'accélération terrestre et que ce calcul pouvait être basé sur une valeur de g à choisir librement car il employait auparavant des résultats obtenus de calculs plus que douteux sur les marées. Pour le reste la démonstration ne prouve rien de plus. Car pour être véridique, la corrélation aurait dû partir de deux quantités mesurées d'une façon vraiment indépendante c'est-à-dire la distance Terre-Lune et l'accélération g . Il est vrai que HUYGENS avait mesuré assez exactement la valeur de g . Mais pour la distance Terre-Lune, NEWTON avait un choix qu'il mentionnerait d'ailleurs dans sa démonstration de la PROPOSITION IV. Il fit ce choix parmi les possibilités présentées par les Astronomes, mais il est difficile de croire que, dans sa décision, il ne fut influencé par le résultat qu'il comptait atteindre pour sa «*preuve*» de sa loi de la gravitation. Et, en effet, il ne mentionnait pas explicitement la relation étroite entre la valeur de la distance Terre-Lune et la valeur de l'accélération, laissant ainsi un effet de vérité qui n'en est pas un.

Revenons au texte ! La PROPOSITION V **Théorème V** est la première émergence de la loi newtonienne de la gravitation universelle. En effet elle postule : «*Les satellites de Jupiter gravitent vers Jupiter, et ceux de Saturne vers Saturne, et les planètes principales vers le Soleil, et c'est par la force de leur gravité que ces corps révolants sont retirés à tout moment de la ligne droite et qu'ils sont retenus dans des orbites curvilignes.*» [1]

Les révolutions des satellites joviens et saturniens ainsi que des planètes intérieures autour du Soleil sont des phénomènes de la même espèce, tout comme il est le cas de la révolution de la Lune autour de la Terre. Et voilà pourquoi NEWTON se sent le droit de faire usage de sa deuxième règle : «*Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause,*» [1] d'autant plus qu'ils sont toujours régis par la même loi : celle qu'il avait postulée comme étant la loi centrale de la gravitation universelle. NEWTON devient encore plus explicite dans les corollaires à la suite de sa PROPOSITION V. Ainsi il dit dans le **Corollaire I** : «*Toutes les planètes sont donc pesantes. Car personne ne doute que Venus, Mercure et toutes les autres planètes ne soient des corps du même genre que Jupiter et Saturne. Et comme toute attraction est mutuelle par la troisième loi du mouvement, Jupiter doit graviter vers tous ses satellites, Saturne vers tous les siens, la Terre vers la Lune, et le Soleil vers toutes les planètes principales.*» [1]

Dans le **Corollaire II**, NEWTON poursuit : «*La gravité vers chaque planète est réciproquement comme le carré de la distance à son centre.*» [1]. Pour

arriver à la conclusion générale dans le **Corollaire III**, «*Par les **Corollaires I et II** toutes les planètes gravitent les unes vers les autres, ainsi Jupiter et Saturne en s'attirant mutuellement, troublent sensiblement leurs mouvements vers leur conjonction, le Soleil trouble ceux de la Lune, et le Soleil et la Lune ceux de notre mer, comme je l'expliquerai dans la suite.*» [1]. Afin d'être sûr d'avoir été compris, NEWTON ajoute à la fin de la PROPOSITION V un scholie dont la formulation est la suivante : «*Nous avons appelé jusqu'ici la force qui retient les corps célestes dans leur orbite force centripète. On a prouvé que cette force est la même que la gravité, ainsi dans la suite nous l'appellerons gravité. Car la cause de cette force centripète, qui retient la Lune dans son orbite, doit s'étendre à toutes les planètes par les Règles 1, 2 et 4*» [1]. Nous rappelons encore l'énoncé de la Règle IV : «*Dans la philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomènes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce quelques autres phénomènes les confirment ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions*» [1]. Le moins que l'on puisse dire est que ces idées sont assez près de celles de K. POPPER [123] émergées trois cents années plus tard.

La PROPOSITION VI **Théorème VI** est vouée à la confirmation de l'égalité des masses inertielles et gravitationnelles sur la base des données astronomiques et le théorème en question est en quelque sorte la partie centrale des arguments de NEWTON pour l'universalité de la loi de la gravitation. NEWTON formule : «*Tous les corps gravitent vers chaque planète, et sur la même planète quelque leurs poids, à égale distance du centre, sont proportionnels à la quantité de matière que chacun d'eux contient*» [1]. NEWTON dans ses explications à la suite de cette affirmation, parle d'abord de ses expériences avec des pendules qu'il avait déjà exposées dans le scholie général à la fin de la sixième section du LIVRE II prouvant que la masse d'un corps est indépendante de son volume : «*J'en ai fait l'expérience avec des pendules d'or, d'argent, de plomb, de verre, de sable, de sel commun, de bois, d'eau et de froment. Pour y réussir, je fis faire deux boîtes de bois rondes et égales, j'en remplis une de bois, et je mis un poids égal d'or dans l'autre, en le plaçant aussi exactement que je le pus dans le point qui répondait au centre d'oscillation de la première boîte. Ces boîtes étaient suspendues à deux fils égaux de 11 pieds chacune, ainsi j'avais par là deux pendules entièrement pareils, quant au poids, à la figure, et à la résistance de l'air. Ces pendules, dont les poids étaient placés à côté l'un de l'autre firent des oscillations qui se suivirent pendant un très long temps. Donc, la quantité de matière de l'or, était à la quantité de matière du bois comme l'action de la force motrice sur tout l'or à cette même action sur tout le bois, c'est-à-dire, comme le poids au poids. Il en fût de même dans les autres pendules. Dans ces expériences une différence d'un millièmme dans la matière des corps de même poids était aisée à apercevoir*» [1].

Après cette digression assez longue sur ces expériences de pendules qu'il avait déjà présentées dans la PROPOSITION XXIV du LIVRE II, il formule une affirmation assez dogmatique précisant : «*Il n'y a donc aucun doute que la nature de la gravité ne soit la même dans les planètes et sur la Terre.*»

Pour NEWTON la raison en est claire : le test de la Lune de la PROPOSITION IV **Théorème IV** est le résultat qu'il avait obtenu sur l'égalité de la force inertielle et gravitationnelle par ses expériences sur la longueur de la pendule battant la seconde. Mais en plus de la «*preuve par la Lune*» il y a les satellites de Jupiter qui «*font leurs révolutions autour de cette planète dans des temps qui sont en raison sesquiplée de leurs distances à son centre, leurs gravités accélératrices vers Jupiter seront réciproquement comme le carré de leurs distances à son centre ; et par conséquent, à égales distances de Jupiter, elles seront égales. Ainsi ils parcourraient des espaces égaux en temps égaux en tombant vers Jupiter de hauteurs égales ; comme il arrive aux graves sur notre Terre. Et par le même raisonnement les planètes qui tournent autour du Soleil étant abandonnées à la force qui les porte vers cet astre, parcourraient en descendant vers lui des espaces égaux en temps égaux si elles tombaient de hauteurs égales. Or les forces qui accélèrent également des corps inégaux sont comme ces corps ; c'est-à-dire, que les poids des corps sur les planètes sont comme la quantité de matière qu'il contiennent. De plus, les poids de Jupiter et de ses satellites sur le Soleil sont proportionnels à leur quantité de matière, c'est ce qui est prouvé par le mouvement très régulier des satellites de Jupiter ; car si l'un des satellites était plus attiré que les autres vers le Soleil, parce qu'il contient plus de matière, le mouvement des satellites serait dérangé par cette inégale attraction*» [1].

Pour justifier cette partie de son texte, NEWTON se réfère au **Corollaire II** de la PROPOSITION LXV **Théorème XXV** du LIVRE I qui est une preuve de l'existence de la loi de la gravitation formulée par lui. En effet ce corollaire postule que : «*Ces mouvements seront très fortement troublés, si les attractions accélératrices des parties de ce système (c'est-à-dire, comme le théorème lui-même le décrit : «Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, et décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu près proportionnelles au temps*» [1].) vers le plus grand corps ne sont plus entre elles réciproquement comme le carré des distances à ce grand corps ; surtout si l'inégalité de la proportion de cette attraction est plus grande que l'inégalité de la proportion des distances au grand corps» [1].

Si donc il y avait d'autres différences dans les forces gravitationnelles sur les différents corps que celles dues à leurs quantités de matière, le mouvement des satellites de ces corps serait gravement perturbé. NEWTON explique dans ses commentaires au **Théorème VI** : «*Donc, si, à distances égales du Soleil, la gravité accélératrice d'un satellite quelconque vers le Soleil était plus grande ou plus petite que la gravité accélératrice de Jupiter vers le Soleil, seulement de la millième partie de sa gravité totale, la distance du centre de l'orbe du satellite au Soleil serait plus ou moins grande que la distance de Jupiter au Soleil de 1/2000 partie de la distance totale, c'est-à-dire, de la cinquième partie de la distance du satellite le plus éloigné du centre de Jupiter, ce qui rendrait cet orbe très sensiblement excentrique. Mais les orbes des satellites sont concentriques à Jupiter, ainsi les gravités accélératrices de Jupiter et de ses satellites vers le Soleil sont égales entre elles.*» [1]

Plus avant dans le texte, NEWTON avait fait référence à des calculs qu'il avait faits pour prouver l'exactitude de ses affirmations concernant Jupiter et ses satellites. Mais quels étaient ses calculs ? Dans les «PRINCIPIA» il n'y a pas les moindres détails si ce n'est que son exposé relatif à l'attraction mutuelle de trois corps qu'il traite d'une façon exclusivement géométrique dans le LIVRE I.

Les propositions : PROPOSITION LXVI **Théorème** XXVI, PROPOSITION LXVII **Théorème** XXVII et la PROPOSITION LXVIII **Théorème** XXVIII du LIVRE I renferment le premier essai de NEWTON pour appliquer sa loi de la gravitation à un système composé de plus de deux corps [117]. L'objet du premier théorème est de prouver que si trois corps inégaux s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances, et en supposant d'abord que les deux plus petits tournent autour du plus grand, le corps intermédiaire décrira autour du corps principal, comme foyer, des aires qui seront plus près d'être proportionnelles au temps, et une orbite plus sensiblement elliptique, si le corps central est soumis à l'attraction des deux autres, que dans le cas où il ne le serait pas ou le serait suivant une loi différente.

C'est précisément ce théorème, qu'il a prouvé à l'aide de considérations purement géométriques, qui sert à NEWTON pour justifier la validité empirique de sa loi de la gravitation en l'appliquant aux résultats des observations astronomiques soit des satellites de Jupiter, soit des planètes du système Soleil.

La démonstration par la géométrie de la PROPOSITION LXVI **Théorème** XXVI est conduite par NEWTON de la façon suivante : il suppose d'abord les trois corps dans le même plan et puis décompose l'attraction du corps extérieur sur le corps intermédiaire en deux composantes ; l'une, dirigée parallèlement à la distance de celui-ci au corps central, ne change pas la loi des aires, mais déforme l'ellipse en rendant la loi de la force centrale différente de celle de l'inverse du carré des distances ; l'autre composante, dirigée suivant la ligne qui va du corps central au corps extérieur, change à la fois la proportionnalité des aires au temps et la nature de l'orbite, ceci pour une double raison que NEWTON explique. Mais si le corps central est également soumis à l'action du corps extérieur, ce ne sera plus que la différence entre cette action et la seconde composante qui produira une perturbation dans cette direction. Ainsi plus cette différence sera petite, plus l'ellipticité sera approchée, et elle le sera le plus possible quand l'attraction qu'éprouve le corps central, suivant la même loi que celle du corps intermédiaire, sera égale à la moyenne de toutes celles qu'éprouve celui-ci dans la révolution autour du premier. Le même procédé conduit à une conclusion semblable dans le cas où les trois corps ne sont pas dans le même plan.

NEWTON développe alors un nombre appréciable de conséquences découlant de son théorème dans 22 corollaires, ce qui fait que cette proposition devient la plus conséquente de tous les développements des «PRINCIPIA». Tous les effets qui résultent de l'attraction dans le système des trois corps sont évalués. Les considérations principales de NEWTON sont consacrées aux modifications des éléments d'une orbite keplerienne causées par la présence d'une force perturbatrice extérieure. Et le choix de NEWTON dans la représentation géométrique du

système des trois corps : l'orbite non perturbée du corps P est admise comme étant circulaire et coplanaire à celle du deuxième corps T , le troisième S étant fort éloigné, fait de la PROPOSITION LXVI un prélude à sa théorie de la Lune. Reste l'abstraction poussée des énoncés des 22 corollaires et le discours concis dans lequel ils sont exprimés. Celle-ci ne s'explique que par la connaissance par NEWTON des formules qui expriment les dérivées des éléments elliptiques d'une planète en fonction des composantes de la force perturbatrice, suivant le rayon vecteur, la perpendiculaire au rayon vecteur dans le plan de l'orbite, et la normale à ce plan. TISSERAND [124] se dit persuadé de la vérité de cette supposition et il pense avoir trouvé des indications soutenant son hypothèse dans le catalogue de la collection Portsmouth [125] qui fait mention de résultats non publiés de NEWTON sur la théorie de la Lune et spécialement de deux lemmes que NEWTON utilisa pour trouver analytiquement le mouvement horaire du périégée. Ces résultats newtoniens rejoignent ceux de CLAIRAUT.

CHANDRASEKHAR, en utilisant la théorie laplacienne [126] du problème des trois corps, arrive à transcrire en langage de l'analyse l'énoncé de la plus grande partie des corollaires qui suivent la PROPOSITION LXVI [121].

Regardons maintenant de plus près ces corollaires. Le premier est un cas particulier du théorème général. Il dit que «*Si plusieurs petits corps P , S , R etc. font leurs révolutions autour d'un grand T , le mouvement du plus intérieur P sera le moins troublé qu'il est possible par les attractions des corps extérieurs ...* » [1]. Ce corollaire suit du fait que les forces perturbatrices agissant sur chacun des corps sont directement proportionnelles au rayon de leur orbite autour de T .

Dans les corollaires qui suivent, NEWTON explique les modifications des éléments de l'orbite P dues à la présence du troisième corps S . Les résultats newtoniens deviennent compréhensibles à travers les équations différentielles de la variation des éléments d'une orbite keplerienne telles que publiées par LAGRANGE ou par EULER quelques dizaines d'années plus tard. Si NEWTON les posséda effectivement, comme les **Corollaires** II à XII le suggèrent, nous sommes devant la présence d'un signe supplémentaire de sa génialité. Le **Corollaire** II dit : «*Dans le système composé de trois corps, T , P , S , si les attractions accélératrices de deux quelconques sur le troisième, sont réciproquement entre elles comme le carré des distances, les aires que le corps P décrira autour du corps T seront plus accélérées auprès de la conjonction A et de l'opposition B qu'auprès des quadratures C et D* » [1]. Ceci est une conséquence de ce que dans une orbite perturbée la constante des aires varie le long du parcours et n'est pas fixe comme dans le problème de KEPLER. En effet on trouve par l'analyse les expressions suivantes :

$$h_1 = \langle h \rangle \left(1 + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \right) \quad (2.43)$$

pour la constante des aires h_1 dans les syzygies et

$$h_2 = \langle h \rangle \left(1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \right) \quad (2.44)$$

pour la constante des aires h_2 dans les quadratures $\langle h \rangle$ étant la valeur de cette constante dans le cas non perturbé avec :

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{\text{période}} \\ N &= \sqrt{\frac{GM_{\odot}}{R^3}} m = \frac{N}{m} \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Le **Corollaire** III s'énonce : «*Et par le même raisonnement, il est clair que le corps P , toutes choses d'ailleurs égales, se meut plus vite dans la conjonction et dans l'opposition, que dans les quadratures*» [1].

En effet on arrive à prouver que la vitesse varie le long de l'orbite et que celle-ci est dépendante d'une expression

$$\frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m} \quad (2.46)$$

qui s'ajoute dans les syzygies et se retranche dans les quadratures.

NEWTON continue son énumération des modifications de l'orbite de P autour de T dues à la présence du corps S . Ainsi le **Corollaire** IV précise : «*L'orbe du corps P , toutes choses d'ailleurs égales, est plus courbe dans les quadratures que dans la conjonction et l'opposition*» [1]. C'est la conséquence du fait que l'orbite initialement circulaire de P se transforme en ellipse avec un rayon de courbure plus petit aux quadratures qu'aux syzygies. Une conséquence supplémentaire de cette situation est relevée dans le **Corollaire** V suivant : «*De là le corps P , le reste étant égal, s'écartera plus du corps T dans les quadratures que dans l'opposition et la conjonction*» [1]. L'orbite circulaire dans le cas non perturbé devient ovale parce que les forces centripètes varient le long de l'orbite. Cette variation de la force centripète est l'objet du **Corollaire** VI suivant. Après des considérations géométriques plutôt compliquées NEWTON conclut : «*... le temps périodique augmentera et diminuera dans la raison composée de la raison sesquiplée du rayon et de la raison sous-doublée de la proportion suivant laquelle cette force centripète du corps central T augmente et diminue par l'incrément ou le décrement de l'action du corps éloigné S* » [1]. En vue de reconstruire cette affirmation par la méthode analytique, on ne peut se contenter des perturbations du premier orbe seul, mais il faut tenir compte d'une équation variationnelle du second ordre pour le grand axe a . L'énoncé de ce corollaire est une autre preuve de l'entendement profond que NEWTON possédait de la dynamique du problème des trois corps.

Dans les **Corollaires** VII et VIII, NEWTON revient au problème de la rotation de la ligne des apsides qu'il avait déjà traité dans la PROPOSITION XLV de la section IX sur les orbes en rotation dans le cas d'un espace relatif. Le Corollaire constate : «*... il suit que l'axe de l'ellipse décrite par le corps P , ou la ligne des apsides, avance ou rétrograde tour à tour d'un mouvement angulaire, de façon cependant que le mouvement en avant est le plus fort, et qu'à*

la fin de chaque révolution de P , la ligne des apsides s'est mue en conséquence» [1].

CHANDRASEKHAR trouve par l'analyse de l'équation de la variation de la longitude du périhélie que la ligne des apsides tourne vers l'avant avec une amplitude moyenne de :

$$\frac{3}{4}m^2\sqrt{1-e^2} \quad (2.47)$$

résultat conforme à celui que NEWTON avait déduit dans la PROPOSITION XLV. Or NEWTON sûrement tient compte encore de la variation des forces appliquées au corps P et il analyse l'effet des différentes composantes de celles-ci. Il trouve que la force centripète dans les quadratures devient :

$$F_0 = -k \left(\frac{1}{r^2} + m^2 r \right) \quad (2.48)$$

et dans les syzygies :

$$F_1 = -k \left(\frac{1}{r^2} - 2m^2 r \right) \quad (2.49)$$

Voilà pourquoi NEWTON peut statuer que cette force «*décroît moins que*» et «*plus que le carré de la distance PT* » [1] aux quadratures et aux syzygies respectivement. Dans la PROPOSITION XLV la rotation de la ligne des apsides fut déterminée sous l'action d'une force centripète de la forme :

$$-k \left(\frac{1}{r^2} - cr \right) \quad (2.50)$$

égale à

$$\simeq 180^{\text{deg}} \cdot \left(1 + \frac{3}{2}c \right) \quad (2.51)$$

et l'angle de la révolution se détermine à

$$180^{\text{deg}} \cdot \left(1 - \frac{3}{2}m^2 \right) \quad (2.52)$$

aux quadratures et à

$$180^{\text{deg}} \cdot (1 + 3m^2) \quad (2.53)$$

aux syzygies de façon que l'apside supérieure rétrograde aux quadratures et avance aux syzygies. NEWTON ne mentionne plus la différence existant entre la valeur calculée et celle observée dans le cas de la Lune. Le **Corollaire VIII** est une conséquence directe du précédent. NEWTON dit à la fin : «... *il est clair que les apsides étant dans leurs syzygies avanceront le plus vite ... et que dans leurs quadratures elles rétrograderont le plus lentement ...* » [1] Ce résultat est

obtenu en écrivant l'expression de la force centripète en fonction de l'angle du rayon vecteur.

Dans les **Corollaires IX à XI**, NEWTON revient à la variation de l'excentricité, de l'inclinaison et de la direction du nœud ascendant. Ainsi le **Corollaire IX** conclut : «... *La raison de tout l'incrément et de tout le décrement (de la force centripète) dans le passage entre les apsides est donc la moindre dans les quadratures et la plus grande dans les syzygies; et par conséquent dans le passage des apsides des quadratures aux syzygies, elle augmentera perpétuellement, et elle augmentera l'excentricité de l'ellipse; mais dans le passage des syzygies aux quadratures, elle diminuera continuellement, et l'excentricité diminuera aussi.*» [1]. Ce corollaire se déduit aisément à partir des expressions pour les forces centripètes et il est probable que NEWTON fit cette déduction aussi.

Dans le **Corollaire X**, NEWTON décrit la variation de l'inclinaison du plan de l'orbite de P . Il la trouve proportionnelle à

$$i - i_0 \simeq \frac{3}{8} m \sin i \cos 2U \quad (2.54)$$

avec U étant l'angle entre la ligne des nœuds et le rayon ou vecteur à S . Il écrit dans ce corollaire : «... *Elle sera donc (ie l'inclinaison) la plus grande, lorsque les nœuds sont dans les syzygies. Dans leur passage des syzygies aux quadratures, elle diminuera à chaque fois que le corps parviendra aux nœuds et elle deviendra la plus petite, lorsque les nœuds seront dans les quadratures, et le corps dans les syzygies; et elle croîtra ensuite par les mêmes degrés par lesquels elle avait diminué auparavant; et lorsque les nœuds arriveront aux syzygies prochaines, elle reviendra à sa première grandeur*» [1]. Le **Corollaire XI** traite de la variation de la direction du nœud ascendant. A partir des équations variationnelles il peut être démontré que la valeur pour ω est de

$$\Omega \simeq -\frac{3}{4} m^2 n t + \frac{3}{8} m \sin 2U \quad (2.55)$$

Il y a donc une régression des nœuds de $2\pi \left(\frac{3}{4} m^2\right)$ par mois nodal à côté d'une variation d'amplitude de $\frac{3m}{8}$ radions avec une période d'une demi-année nodale. NEWTON retient que : «*Les nœuds étant dans les quadratures rétrograderont donc toujours; dans les syzygies, où rien ne trouble le mouvement en latitude, ils seront au repos; et dans les lieux intermédiaires où ils participeront de l'une et l'autre condition, ils rétrograderont plus lentement. Ainsi étant toujours stationnaires ou rétrogrades, ils seront portés en antécédence à chaque révolution.*» [1]

Le **Corollaire XII** suivant est le plus court des 22 corollaires. Il stipule : «*Tous les dérangements dont on a parlé dans ces corollaires sont un peu plus grands dans la conjonction des corps P et S , que dans leur opposition, parce que les forces ... qui les causent sont plus grandes.*» [1]. Il est probable qu'à ce stade de ses investigations, NEWTON avait clairement entrevu que les équations variationnelles du premier ordre étaient à compléter par des termes du second

ordre. Mais il comprit en même temps la complication énorme qui serait causée par ces nouveaux termes.

A partir des corollaires suivants, NEWTON se tourne vers des questions connexes. Ainsi dans le **Corollaire XIII**, il remarque que les conclusions de la proposition principale, étant indépendantes de la grandeur du corps extérieur, s'appliquent aussi au cas où les deux autres tournent autour de lui. Dans le **Corollaire XIV** suivant, NEWTON indique pour la première fois dans le contexte de la PROPOSITION LXVI, que le facteur qui apparaît dans la fonction perturbatrice est égal à $\frac{GM_{\odot}}{R^3}$ quand il écrit : «*Il est clair que tous ces effets seront à peu près en raison composée de la raison directe de la force absolue du corps S et de la raison triplée inverse de la distance ST* » [1]. D'une façon similaire, NEWTON dans le **Corollaire XV** montre la proportionnalité de la force perturbatrice au rayon r de l'orbite de P autour de T en remarquant : «*La force du corps T , par laquelle le corps P décrit l'orbite PAB et la force du corps S qui fait écarter le corps P de cette orbite agissent toujours de la même manière et dans la même proportion*» [1]. Pour conclure «*que toutes les altérations linéaires (c'est-à-dire la fonction perturbatrice) soient comme les diamètres des orbites, que les angulaires soient les mêmes qu'auparavant, et que les temps des dérangements linéaires semblables ou des angulaires égaux soient comme les temps périodiques des orbites*» [1].

NEWTON, dans le **Corollaire XVI** revient à l'égalité, au signe près, du mouvement moyen de la ligne des apsides et de la régression des nœuds ascendants pour exposer encore une autre explication de cette égalité, et il conclut : «*Et ainsi le mouvement moyen des apsides sera en raison donnée au mouvement moyen des nœuds, et l'un et l'autre mouvement seront comme le carré du temps périodique du corps T inversement. En augmentant ou diminuant l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite PAB , les mouvements des apsides et des nœuds ne changeront pas sensiblement, à moins que les changements de l'excentricité et de l'inclinaison ne fussent fort grands.*» [1]

Le **Corollaire XVII** traite de la force moyenne avec laquelle T est retenu dans son orbite autour de S . NEWTON la détermine étant égale à $\frac{GM_{\odot}}{R^2}$ tandis que la force moyenne qui retient P est de $\frac{GM_T}{r^2}$. Leur rapport est donc :

$$\left(\frac{GM_{\odot}}{R^3}\right) R / \left(\frac{GM_T}{r^3}\right) \cdot r = \frac{N^2}{n^2} \cdot \frac{ST}{PT} \quad (2.56)$$

où N^2 et n^2 sont les carrés des périodes de révolution et ST et PT sont respectivement la grandeur de la force attractive de S sur T et le rayon vecteur de la Terre à la planète. Avec ce Corollaire, NEWTON a terminé l'analyse des perturbations d'une orbite keplerienne qu'il avait exposée dans les corollaires qui suivent sa présentation d'ensemble du problème général des trois corps. La compréhension détaillée des multiples aspects de ce problème extrêmement compliqué, dont il fit preuve par la formulation des corollaires, faisait penser à LAPLACE que cette partie des «PRINCIPIA» était de loin la plus importante de l'œuvre newtonienne. [126].

Avec le **Corollaire XVII**, l'analyse des perturbations de l'orbite keplérienne par un troisième corps S éloigné est terminée. Les corollaires qui suivent sont plutôt dédiés à des questions connexes comme la théorie des marées et au problème pourquoi des corps subissant une attraction gravitationnelle tendent à adopter la forme sphérique en l'absence de forces perturbatrices.

La théorie des marées, reprise par NEWTON dans la PROPOSITION XIV du LIVRE III, est l'objet du **Corollaire XVIII**. Il présente un modèle tenant compte d'un anneau continu de particules qui, tel que P , évoluent autour de T en concordance avec la loi de la gravitation. NEWTON, en vue de démontrer l'assistance interne de son modèle, le lie avec les autres corollaires déjà énoncés en particulier avec les **Corollaires III, V, X et XI**.

Le **Corollaire XIX** affine encore le modèle introduit dans le corollaire précédent. NEWTON imagine que le globe T est formé de matière solide et s'étend jusqu'à l'anneau introduit précédemment et que T est muni d'un canal creusé autour de lui. T tournant autour de son axe uniformément, l'eau dans le canal est accélérée et retardée tour à tour, comme le cas exposé au corollaire précédent.

Dans le **Corollaire XX**, NEWTON considère l'application du **Corollaire XI** traitant de la régression des nœuds et du **Corollaire X** sur la variation de l'inclinaison à son modèle introduit pour modéliser les marées : *«Si on suppose ensuite que le globe ait le même axe que l'anneau, qu'il achève ses révolutions dans le même temps, qu'il le touche, et lui soit attaché par sa superficie intérieure ; le globe participant du mouvement de l'anneau, ils oscilleront ensemble, et les nœuds rétrograderont. Car le globe est également susceptible de recevoir toutes sortes d'impressions.»* [1]. NEWTON considère ensuite les variations du nœud, corrélées à celles de l'inclinaison qu'il a traitée auparavant. Il conclut : *«Le plus grand mouvement de l'inclinaison décroissante se fait dans les quadratures des nœuds, et le plus petit angle d'inclinaison se fait dans les octants après les quadratures ; le plus grand mouvement de reclinaison est dans les syzygies, et le plus grand angle dans les octants prochains»* [1].

Mais l'objet principal des considérations newtoniennes est tout autre : il applique son modèle à *«... un globe qui n'a point d'anneau, et qui est un peu plus élevé, ou un peu plus dense vers l'équateur que vers les Pôles ; car cette protubérance de matière dans les régions de l'équateur lui tient lieu d'anneau, et quoiqu'en augmentant d'une façon quelconque la force centripète de ce globe, toutes ces parties soient supposées tendre en bas, de même que les parties gravitantes de la Terre, cependant les phénomènes dont on a parlé dans ce corollaire et dans le précédent, en seront à peine altérés ... »* [1]

Le **Corollaire XXI** revient encore aux conclusions du **Corollaire XIX** citées plus haut et il résume : *«Par la même raison que la matière redondante placée à l'équateur fait rétrograder les nœuds, et les fait rétrograder d'autant plus qu'elle est en plus grande quantité, il s'ensuit, que si on la diminue, la rétrogradation diminuera aussi ; que si on la détruit entièrement, il n'y aura plus de rétrogradation ... »* [1]. La fin du corollaire est une prise de position dans la question de la forme du globe terrestre que les cartésiens considéraient

allongé vers les pôles.

En effet, NEWTON a démontré par son modèle que le globe doit avoir un plus grand diamètre à l'équateur. Il écrit : «*que si on élevait du globe plus que cette matière redondante, qu'on le rendit allongé vers les pôles, ou plus rare vers l'équateur, les nœuds seraient mus en conséquence*» [1]. Nous sommes en présence d'une preuve supplémentaire de l'exactitude de la loi de la gravitation.

Le dernier **Corollaire XXII** est le résumé des idées newtoniennes formulées dans les **Corollaires XVIII à XXII**, ainsi que des conclusions supplémentaires à tirer de sa théorie.

NEWTON conclut d'abord quant à la forme du globe : «*Et réciproquement, par le mouvement des nœuds, on pourra connaître la forme du globe. S'il conserve toujours les mêmes pôles, et que le mouvement des nœuds se fasse en antécédence, la matière du globe sera protubérante vers l'équateur ...*» [1]. Il parle ensuite des autres conséquences que la protubérance occasionne pour conclure : «*Un globe homogène et parfaitement sphérique ne retient donc pas l'impression distincte de plusieurs mouvements différents, mais de tous ces mouvements divers, il naît un mouvement unique, et le globe tend toujours, autant qu'il est en lui, à tourner d'un mouvement simple et uniforme autour d'un seul axe incliné d'une manière invariable.*» [1]. La non-sphéricité du globe terrestre trouble son mouvement, fera changer la position des pôles et crée des libérations de l'axe de rotation : «*Supposez à présent qu'on lui ajoute quelque part entre le pôle et l'équateur une matière nouvelle accumulée en forme de montagne, cette matière, par l'effet continuel qu'elle fera pour s'éloigner du centre de son mouvement, troublera le mouvement du globe, et fera que ses pôles changeront à tout moment de position, et qu'ils décriront perpétuellement des cercles autour d'eux-mêmes et du point qui leur est opposé.*» [1]. Il est remarquable comment NEWTON utilise la symétrie de la sphère afin de tirer de la perturbation de la forme géométrique de celle-ci des conclusions physiques portant très loin.

A côté du **Théorème LXVI** avec ses 22 corollaires, la théorie newtonienne relative à l'attraction mutuelle de trois corps mentionne encore trois autres propositions qu'il est nécessaire de présenter.

Ainsi la PROPOSITION LXVII **Théorème XXVII** cherche à prouver que le corps extérieur S décrit autour du centre de gravité des deux corps intérieurs P et T une orbe plus approchant de la forme elliptique qu'autour du seul corps T le plus intérieur. Nous trouvons ici une première référence à la modification que NEWTON apportera à la troisième loi de KEPLER où il introduit les centres de gravité de deux corps qui s'attirent mutuellement comme point d'attraction et non pas le centre de masse du plus grand, ceci en vue de tenir compte de la troisième loi du mouvement.

Dans la PROPOSITION LXVIII **Théorème XXVIII**, NEWTON continue son raisonnement en précisant que l'introduction du centre de gravité des deux corps intérieurs P et T comme point de référence, approchera plus encore l'orbite du corps extérieur S à une orbite keplerienne. «*Si le centre coïncidait avec le centre commun de gravité de ces deux corps, (c'est-à-dire P et T) et que le*

centre commun de gravité des trois corps fut en repos, le corps S d'une part, et le commun centre de gravité des deux autres corps de l'autre, décriraient autour de ce commun centre de gravité en repos, des ellipses exactes ... » [1]. NEWTON anticipe ici sur sa théorie de la Lune du LIVRE III.

Dans la PROPOSITION LXIX **Théorème XXIX**, NEWTON prouve que les forces absolues de deux corps l'un sur l'autre sont entre elles comme leurs masses. Le facteur de proportionnalité étant la constante gravitationnelle G . Le **Corollaire III** paraît à première vue étrange. Il dit : «*Dans un système de corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances, s'il arrive que les plus petits tournent autour du plus grand dans des ellipses exactes à très peu de choses près, que leur foyer commun soit à peu près dans le centre de ce plus grand corps, et que ces petits corps décrivent autour du plus grand des aires presque proportionnelles au temps ; les forces absolues de ces corps seront entre elles exactement ou à peu près comme ces corps et au contraire.*» [1]. En lisant ce corollaire on a l'impression de lire une description du système solaire et que NEWTON l'a insérée à cette place du LIVRE I uniquement dans le but de formuler d'une façon plus crédible sa loi de la gravitation universelle dans le LIVRE III.

NEWTON termine la section XI du LIVRE I : «*Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripètes*», sans doute la plus importante de ce Livre essentiellement théorique par un scholie dans lequel il cherche à définir le sens de sa philosophie naturelle : «*C'est par les mathématiques qu'on doit chercher les quantités de ces forces et leurs proportions qui suivent des conditions quelconques que l'on a posées : ensuite lorsqu'on descend à la Physique, on doit comparer ces proportions avec les phénomènes ; afin de connaître quelles sont les lois des forces qui appartiennent à chaque genre de corps attirants, c'est alors qu'on peut examiner avec plus de certitudes ces forces, leurs causes, et leurs explications physiques.*» [1]

Après cet aperçu détaillé de la théorie newtonienne des trois corps qui est à la base de sa mécanique gravitationnelle, elle-même complétée par la théorie du potentiel par ses successeurs et qui, dans sa forme analytique, a permis d'obtenir les plus grands succès dans le calcul des orbites des planètes et aussi de l'orbite lunaire, rehaussant la mécanique céleste au rang de la reine incontestée dans la hiérarchie des sciences exactes, nous devons nous repencher sur le restant des théorèmes traitant de la gravitation dans le LIVRE III.

Ainsi il faut d'abord considérer la PROPOSITION VII **Théorème VII** qui, après les préparatifs exposés dans les six premières propositions, est le véritable énoncé de la loi de la gravitation newtonienne. Il dit : «*La gravité appartient à tous les corps, et elle est proportionnelle à la quantité de matière que chaque corps contient.*» [1]. NEWTON explique : «*On a prouvé que toutes les planètes gravitent mutuellement les unes vers les autres : que la gravité vers une planète quelconque, considérée à part, est réciproquement comme le carré de la distance au centre de cette planète : et que par conséquent (PROPOSITION LVIX et ses corollaires du LIVRE I) la gravité dans toutes les planètes est proportionnelle à leur quantité de matière.*» [1]. Et il continue : «*Mais comme toutes les parties*

d'une planète quelconque A pèsent sur une autre planète quelconque B, que la gravité d'une partie quelconque est à la gravité du tout, comme la matière de la partie est à la matière totale, et que, par la troisième loi du mouvement, l'action et la réaction sont toujours égales; la planète B gravitera à son tour vers toutes les parties de la planète A, et sa gravité vers une partie quelconque sera à la gravité vers toute la planète, comme la matière de cette partie à la matière totale.» [1]

Comme CHANDRASEKHAR l'a pertinemment remarqué [121], cette proposition est la seule de celles traitant de la gravitation, que NEWTON a terminée par un C.Q.F.D., marquant ainsi sa conviction intime d'avoir réellement «*démonstré*» sa loi de la gravitation universelle.

Néanmoins il croit bon d'insister encore dans deux corollaires qui se réfèrent déjà aux théorèmes que CHANDRASEKHAR a baptisés : «*superb theorems*» [121] et qui traitent du centre d'attraction d'un corps étendu. NEWTON en parlera d'ailleurs plus en détail dans les théorèmes suivants. Le **Corollaire I** à la PROPOSITION VII stipule : «*La gravité vers toute une planète est donc composée de la gravité vers toutes ses parties. Nous en avons des exemples dans les attractions magnétiques et électriques ...* » [1]. Et en vue d'éviter tout malentendu, il récidive dans le **Corollaire 2** : «*La gravité vers chaque particule égale d'un corps, est réciproquement comme le carré des distances des lieux de ces particules ...* » [1]

La PROPOSITION VIII **Théorème VIII** est une suite logique des théorèmes du LIVRE I traitant de l'attraction de sphères homogènes entre elles sous l'effet de la loi de la gravitation. En effet la proposition dit : «*Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distances de leurs centres, le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le carré de la distance qui est entre leurs centres.*» [1] NEWTON explique à la suite de son énoncé : «*Après avoir trouvé que la gravité d'une planète entière est composée de celles de toutes ses parties, et que la force de chaque partie est réciproquement proportionnelle aux carrés des distances : j'ai voulu savoir si cette proposition réciproque doublée était suivie exactement pour la force totale composée de toutes les forces partiales, ou si elle ne l'était qu'à peu près. Car on pourrait croire que cette proposition, qui est exactement suivie à de grandes distances, devrait souffrir beaucoup d'altération près de la superficie des planètes, à cause de l'inégalité des distances des parties et de leurs différentes positions. Les PROPOSITIONS LXXV et LXXVI du premier Livre et leurs corollaires (c'est-à-dire les «*superb theorems*») m'ont fait voir que cette proportion était encore exactement observée dans le cas dont il s'agit.*» [1]

Dans les corollaires qui suivent la proposition, NEWTON émet une nouvelle idée : il montre comment, à partir des éléments des orbites des planètes et satellites, il est possible de déduire des informations quant à leurs qualités physiques. Dans le premier corollaire, il calcule d'abord la masse d'une planète, ceci en admettant que l'orbite de celle-ci soit circulaire, comme étant proportionnelle à

$$M \sim a^3 \cdot T^{-2} \quad (2.57)$$

(a étant le rayon de l'orbite et T la période de révolution) et il donne les valeurs pour les différentes planètes du système solaire. Au **Corollaire III**, NEWTON détermine la densité moyenne des planètes et satellites, ceci à l'aide de la relation (R étant le rayon de la planète considérée) :

$$\bar{\rho} \sim \left(\frac{a}{R}\right)^3 T^{-2} \quad (2.58)$$

qu'il a déterminée en supposant que le Soleil possède une symétrie sphérique. $\bar{\rho}$, dans ce contexte, est la densité moyenne du corps considéré.

Comme résultat le plus intéressant, NEWTON a déterminé les densités relatives des planètes du système solaire qu'il décrit : *«Le Soleil est donc un peu plus dense que Jupiter, Jupiter l'est plus que Saturne et la Terre l'est quatre fois plus que le Soleil; ce qu'il faut attribuer à la grande chaleur du Soleil, laquelle raréfie sa matière. La Lune est plus dense que la Terre comme on le verra dans la suite.»* [1].

Le **Corollaire IV** est un petit essai de philosophie naturelle dans lequel NEWTON réfléchit quasiment à la place du «grand Architecte de l'Univers» pour démontrer en quelque sorte sa prévoyance : *«... si la Terre était placée à l'orbe de Saturne, notre eau serait perpétuellement gelée, et si la Terre était dans l'orbe de Mercure, toute l'eau s'évaporerait dans l'instant ... »* [1]

La PROPOSITION IX **Théorème IX** ne nécessite aucun commentaire. NEWTON postule que : *«La gravité dans l'intérieur des planètes décroît à peu près en raison des distances au centre.»* [1]

A partir de la PROPOSITION X **Théorème X**, il y a un changement complet de point de vue. NEWTON n'introduit plus de nouvelles informations mais se livre plutôt à une réflexion méditative. Ainsi la PROPOSITION X **Théorème X** retient que : *«Les mouvements des planètes peuvent se conserver très longtemps dans les espaces célestes.»* [1]. NEWTON sait bien que le mouvement ne peut se conserver que dans le vide et après avoir montré que ce vide effectivement existe, il conclut qu'*«Il est donc clair que les planètes pourront se mouvoir très longtemps sans éprouver de résistance sensible dans les espaces célestes vides d'air et d'exhalaisons.»* [1]

NEWTON ensuite émet une «Hypothèse» qui indique ce qui sera à la base du restant du LIVRE III et qu'il formule de la façon suivante : *«Le centre du système du monde est en repos.»* [1]. Il continue : *«C'est ce dont on convient généralement, les uns seulement prétendent que la Terre est ce centre, et d'autres que c'est le Soleil.»* [1] La première conclusion de cette hypothèse est la PROPOSITION XI, **Théorème XI** qui dit : *«Le centre commun de gravité du Soleil, de la Terre, et de toutes les planètes est en repos.»* [1]. On peut se demander ce que voulait NEWTON avec cette proposition. Était-ce pour lui une sorte de limite qu'il voulait tracer autour du système solaire, tout en sachant qu'un mouvement rectiligne uniforme peut se faire sans avoir recours à des forces, ou sommes-nous en présence d'une poussée de ses méditations théologiques

voire mystiques? En optant pour la première explication, nous comprenons que ses affirmations sur le système solaire ne risquent pas d'être relativisées par les profondeurs infinies de l'espace stellaire dont NEWTON était profondément conscient.

La PROPOSITION XII **Théorème XII** examine le mouvement maximal que le Soleil peut subir sous l'influence des forces perturbatrices exercées par les planètes. *«Le Soleil est toujours en mouvement, mais il s'éloigne très peu du centre commun de gravité de toutes les planètes.»* [1]. NEWTON examine d'abord les masses relatives des différentes planètes ainsi que leurs distances au centre du Soleil et il conclut : *«Et en suivant le même calcul on trouvera que si la Terre et toutes les planètes étaient placées d'un même côté du Soleil, le commun centre de gravité de tous ces astres s'éloignerait à peine du centre du Soleil d'un demi-diamètre de cet astre. Comme dans les autres cas la distance entre le centre du Soleil et le commun centre de gravité est encore moindre, et que ce commun centre de gravité est toujours en repos, il arrive que le Soleil, selon la différente position des planètes, se meut successivement de tous les côtés, mais il ne s'écarte jamais que très peu du centre commun de gravité.»* [1]

Dans un corollaire ajouté à la proposition, NEWTON revient encore à la question de la localisation du centre du monde, question qui témoigne aussi de ses intérêts théologiques. Il écrit : *«... ainsi leurs centres mobiles (c'est-à-dire ceux des planètes) ne peuvent être pris pour le centre du monde, qui doit être en repos. Si le corps vers lequel la gravité entraîne plus fortement tous les autres devait être placé dans ce centre (comme c'est l'opinion vulgaire) ce privilège appartiendrait au Soleil; mais comme le Soleil se meut, il faut choisir pour le centre commun un point immobile duquel le centre du Soleil s'éloigne très peu.»* [1]

Avec la PROPOSITION XIII **Théorème XIII**, NEWTON arrive enfin à formuler la partie essentielle de sa théorie de la gravitation qui faisait déjà le sujet du *«De Motu»* [44] : *«Les planètes se meuvent dans des ellipses qui ont un de leurs foyers dans le centre du Soleil, et les aires décrites autour de ce centre sont proportionnelles au temps.»* [1] NEWTON souligne tout de suite la différence essentielle entre les phénomènes connus et discutés jusqu'à maintenant et sa théorie de la gravitation : *«Nous avons discuté ci-dessus ces mouvements d'après les phénomènes. Les principes des mouvements une fois connus donnent les mouvements célestes a priori. Ayant donc trouvé que le poids des planètes sur le Soleil sont réciproquement comme le carré de leurs distances à son centre, il est évident, par les PROPOSITIONS I et XI, et par le **Corollaire I** de la PROPOSITION XIII du LIVRE I, que si le Soleil était en repos, et que les planètes n'agissent point mutuellement les unes sur les autres, tous leurs orbes seraient des ellipses qui auraient le Soleil dans leur foyer commun, et elles décriraient autour de ce foyer des aires proportionnelles au temps. Or les actions mutuelles des planètes les unes sur les autres sont si faibles qu'elles peuvent être négligées, et, par la PROPOSITION LXVI du LIVRE I, elles troublent moins la description de leurs ellipses autour du Soleil lorsqu'on suppose cet astre mobile, que si on le faisait immobile.»* [1]. NEWTON termine avec une remarque

sur les perturbations que les planètes exercent mutuellement : *«Les dérangements qu'éprouvent les orbes des autres planètes par leurs actions mutuelles sont beaucoup moins considérables si on en excepte l'orbe de la Terre que la Lune dérange sensiblement. Le commun centre de gravité de la Terre et de la Lune décrit autour du Soleil une ellipse dont cet astre est le foyer, et dont les aires décrites par ce centre sont proportionnelles au temps : la Terre fait sa révolution autour de ce centre commun dans un mois.»* [1]. La dernière phrase est déjà une introduction à la théorie newtonienne de la Lune qui est l'objet du prochain chapitre.

Mais auparavant, NEWTON résume encore deux des résultats fondamentaux de sa théorie de la gravitation avec la PROPOSITION XIV **Théorème XIV** qui dit : *«L'aphélie et les nœuds des orbites sont en repos.»* [1]. Il indique les propositions antérieures notamment les PROPOSITIONS I et XI du Livre I et fait remarquer que la proposition ne vaut strictement que dans le cas keplerien et que dans le cas où plusieurs corps sont présents : *«... les actions des planètes et des comètes les unes sur les autres, peuvent causer quelques inégalités tant dans les aphélies que dans les nœuds, mais se sont des inégalités assez petites pour qu'il soit permis de les négliger.»* [1]

La théorie de la gravitation newtonienne se termine par un scholie qui précise les inégalités du mouvement des aphélies et de la ligne des nœuds. NEWTON relève encore une fois la petitesse des mouvements qu'il caractérise comme étant *«presque insensibles»* [1]. Les théorèmes suivants sont consacrés à la figure de la Terre et le phénomène des marées avant d'exposer la théorie de la Lune.

Dans le LIVRE III du Traité d'Optique, Question XXXI, [46], NEWTON revient encore au problème des qualités occultes de la gravitation quand il écrit : *«Il semble d'ailleurs que ces Particules ont non seulement une force d'inertie, accompagnée des lois passives du mouvement, qui résultent naturellement d'une telle force ; mais qu'elles sont aussi mues par certains Principes actifs, tel qu'est celui de la Gravité, et celui qui produit la fermentation et la cohésion des Corps. Je ne considère pas ces Principes comme des Qualités occultes qui soient supposées résulter de la forme spécifique des choses, mais comme des Lois générales de la Nature, par lesquelles les Choses mêmes sont formées ; la vérité de ces Principes se montrant à nous par les Phénomènes, quoiqu'on n'en ait pas encore découvert les Causes : car ces Qualités sont manifestes, et il n'y a que leurs Causes qui soient occultes ... »*

Deux aspects semblent encore être intéressants dans le contexte de la théorie de la gravitation. Il y a d'abord l'«*Exposition abrégée du Système du Monde*» [98] écrit quelque vingt années après la parution de la troisième édition des «PRINCIPIA» par la Marquise DU CHÂTELET et sans doute largement inspiré par A.C. CLAIRAUT, le premier savant du Continent qui a attaqué le problème des trois corps par les nouvelles méthodes de l'Analyse. Le premier chapitre de cet exposé fait état de toutes les connaissances de la mécanique céleste vers le milieu du XVIII^e siècle, ceci en citant les propositions importantes à ce sujet de l'œuvre newtonienne. Le second chapitre : *«Comment la théorie de Monsieur NEWTON explique les phénomènes des planètes principales»* parle plus en détail

de la loi de l'attraction toujours en suivant le contexte des «PRINCIPIA».

Ainsi : «*Le premier phénomène qu'il faut expliquer, quand on veut rendre compte des mouvements célestes, c'est celui de la circulation perpétuelle des planètes autour du centre de leur révolution.*» [98]. Et Madame DU CHÂTELET d'expliquer le mouvement inertiel et la présence d'une force qui agisse perpétuellement sur le corps et qui l'empêche de s'échapper par la tangente du cercle qu'il décrit effectivement. Et elle continue en se référant aux premières propositions du LIVRE I : «*Après avoir prouvé que les planètes sont retenues dans leur orbite par une force qui tend vers le Soleil, Monsieur NEWTON démontre, PROPOSITION IV, que les forces centripètes des corps qui décrivent des cercles sont entre elles comme les carrés des arcs de ces cercles parcourus en temps égal, et divisés par leurs rayons; d'où il tire, que si les temps périodiques des corps révolants dans les cercles sont en raison sesquiplée de leurs rayons, la force centripète qui les porte vers le centre de ces cercles, est en raison réciproque des carrés de ces mêmes rayons, c'est-à-dire des distances de ces corps au centre : or par la seconde règle de KEPLER, que toutes les planètes observent, les temps de leurs révolutions sont entre eux en raison sesquiplée de leurs distances à leur centre, donc, la force qui porte les planètes vers le Soleil décroît en raison inverse du carré de leurs distances à cet astre, en supposant qu'elles tournent dans des cercles concentriques au Soleil.*» [98]. La proposition newtonienne est précisée quelques lignes plus tard : «*En partant de cette découverte, Monsieur NEWTON a cherché quelle est la loi de force centripète nécessaire pour faire décrire une ellipse aux planètes, et il a trouvé dans la PROPOSITION XI que cette force doit suivre la proportion inverse du carré des distances du corps au foyer de cette ellipse; mais on vient de voir qu'il avait trouvé dans le **Corollaire** VI de la PROPOSITION IV, que dans les cercles, les temps périodiques des corps révolants étant en raison sesquiplée des distances, la force était inversement comme le carré de ces mêmes distances; il ne restait plus, pour être entièrement sûr que la force centripète qui dirige les corps célestes dans leurs cours suit la proportion inverse du carré des distances, qu'à examiner si les temps périodiques suivent la même proportion dans les ellipses que dans les cercles. Or, Monsieur NEWTON fait voir dans la PROPOSITION XV que les temps périodiques dans les ellipses sont en raison sesquiplée de leurs grands axes; c'est-à-dire, que ces temps sont dans la même proportion dans les ellipses, et dans les cercles dont les diamètres seraient égaux aux grands axes des ellipses.*» [98]. Tout comme NEWTON, Madame DU CHÂTELET vient à parler de la «réciproque» de ces théorèmes newtoniens, proposition qui en fait, est trop restrictive pour pouvoir être considérée comme théorème inverse [124]. Elle écrit : «*Monsieur NEWTON a cherché ensuite PROPOSITION XVII la courbe que doit décrire un corps dont la force centripète décroît en raison inverse du carré des distances, en supposant que ce corps parte d'un point donné avec une vitesse et une direction prises à volonté.*» [98] Après avoir dit que la solution doit être une ellipse, elle poursuit : «*Outre que cette proposition fait un problème intéressant pour la seule géométrie, il est encore très utile dans l'Astronomie; car en découvrant par quelques observations la vitesse et la di-*

rection d'une planète dans quelque partie de son orbite, on peut, à l'aide de cette proposition, trouver le reste de l'orbite, et la détermination de l'orbite des comètes peut être en grande partie fondée sur la même proposition.» [98]

Madame DU CHÂTELET se tourne alors vers le LIVRE III des «PRINCIPIA» pour énoncer tout comme NEWTON les «phénomènes» de la gravitation dans le système solaire. En suivant son arrangement elle conclut : *«Puisqu'il est prouvé par les observations et par l'induction que toutes les planètes ont la force attractive en raison inverse du carré des distances, et que par la seconde loi du mouvement l'action est toujours égale à la réaction, on doit conclure, avec Monsieur NEWTON, que toutes les planètes gravitent les unes vers les autres, et que de même que le Soleil attire les planètes, il est réciproquement attiré par elles; car puisque la Terre, Jupiter et Saturne agissent sur leurs satellites en raison inverse du carré des distances, il n'y a aucune raison qui puisse faire croire que cette action ne s'exerce pas à toutes les distances dans la même proportion; ainsi les planètes doivent s'attirer mutuellement, et on voit sensiblement les effets de cette attraction mutuelle dans la conjonction de Jupiter et de Saturne.»* [98]. Après avoir formulé de cette façon la loi de la gravitation universelle, elle s'interroge sur la cause pour laquelle un corps tourne autour d'un autre. Mais la question ne provoque aucune réponse sur l'essence de cette force gravitationnelle, sans doute dans la lignée de NEWTON et de son *«Je ne feins point d'hypothèses»* [1]. Madame DU CHÂTELET parle uniquement de la masse du corps central : *«Il est aisé, en examinant les corps qui composent notre système planétaire, de soupçonner que cette loi est celle des masses; le Soleil autour duquel tournent tous les corps célestes nous paraît beaucoup plus grand qu'aucun d'eux, Saturne et Jupiter sont beaucoup plus gros que leurs satellites, et que notre Terre l'est plus que la Lune qui tourne autour d'elle.»* [98]. Finalement elle résume la théorie de la gravitation universelle : *«... on peut considérer indifféremment tout corps comme attirant et comme attiré; qu'enfin l'attraction est toujours réciproque entre deux corps, et que c'est la proportion qui est entre leurs masses qui décide si cette double attraction peut être sensible.»* [98].

Le texte que nous venons de commenter est significatif à double raison : d'abord il montre qu'encore au milieu du XVIII^e siècle, NEWTON continue à faire référence. Il n'y a pas un seul savant contemporain ou plus jeune que NEWTON cité dans le texte de Madame DU CHÂTELET. Et elle, tout comme NEWTON, s'en tient à une description purement positiviste de l'attraction gravitationnelle par le calcul d'abord, par les phénomènes gravitationnels ensuite. Il n'y a pas de place pour quelque explication métaphysique.

Le deuxième aspect intéressant dans le contexte de la réception de la loi newtonienne de la gravitation est beaucoup plus récent et date du XIX^e siècle. Il y a d'abord la confrontation de la loi de NEWTON avec les observations, ensuite la question de la vitesse de propagation de l'attraction. [124]

La loi de NEWTON peut être vérifiée en construisant des Tables et en comparant les positions calculées avec des observations dans le passé. Une difficulté se présente de suite : les observations très anciennes rapportées par l'*«Almageste»*

et celles des Arabes sont trop peu précises. Tout ce que l'on peut faire, c'est de montrer que la théorie fondée exclusivement sur des observations modernes vérifie aussi les observations anciennes dans les limites de leur précision. Cette théorie moderne a été imaginée par LE VERRIER. Il introduit d'abord pour chaque planète, six constantes correspondant aux six éléments du mouvement elliptique, puis la masse de cette planète qui, pour quelques planètes peut être déterminée par les observations de leurs satellites, mais qui pour d'autres est une inconnue séparée. En posant la valeur de la masse inconnue d'une planète égale à sa valeur la plus précise à laquelle s'ajoute une petite inconnue de la forme $m\nu^i$, il obtient par un calcul des perturbations du premier ordre des inégalités qui sont fonctions du premier degré des inconnues ν^i . Une vaste réduction des équations ainsi obtenues avec le plus grand nombre d'observations permet de déterminer les résidus dans les éléments et dans les masses. Naturellement LE VERRIER n'arrive pas à expliquer tout les résidus déterminés, et aussi des variations notables dans les valeurs des masses ne parviennent à harmoniser les valeurs observées et calculées. Il découvre notamment le problème de l'avance du périhélie de Mercure avec un excès de déplacement qui s'élève à $38''$ en un siècle et dont l'explication par la mécanique céleste classique aurait supposé des erreurs de plusieurs minutes dans l'estimation des temps des contacts des passages de Mercure sur le Soleil sans omettre en outre que ses erreurs se soient reproduites à diverses époques. L'hypothèse d'une planète intramercurelle pour expliquer cette discontinuité ne mena pas à des résultats concluants et il fallut attendre le XX^e siècle pour que A. EINSTEIN put expliquer l'effet par la méthode de la relativité générale. [127]

Quelques décennies plus tard, M. NEWCOMB, partant des travaux déjà complets de son prédécesseur, entreprit un travail semblable en utilisant un nombre beaucoup plus conséquent d'observations que LE VERRIER. Il en exposa les résultats dans son volume : «*The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy*» [128]. Vu que les difficultés de la détermination de la masse des planètes n'étaient pas encore résolues, NEWCOMB limitait le contrôle efficace de la loi de NEWTON à chercher l'accord entre les valeurs pour les éléments de l'orbite, déduites pour les quatre planètes des équations de condition et des mêmes valeurs calculées par les principes connus, avec les masses admises d'abord pour les quatre planètes intérieures et corrigées ensuite en raison des valeurs trouvées ν^i pour Mercure et Venus. NEWCOMB a affirmé ainsi les résultats de LE VERRIER et ses théories des planètes internes sont encore aujourd'hui utilisées par les astronomes.

Le premier à se poser la question sur la propagation de l'attraction fut LAPLACE [126]. Au courant du XIX^e siècle, il fut suivi par quelques auteurs [124] qui déduisirent des équations du mouvement revenant au même type que les équations modélisant les perturbations.

Un autre courant de réflexion fut l'idée de lier phénomènes gravitationnels et électrodynamiques. Ainsi ZÖLLNER [129] en partant des idées de GAUSS et de WEBER propose une nouvelle loi d'attraction sous la forme :

$$R = \frac{fmm'}{r^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{2}{c^2} r \frac{d^2 r}{dt^2} \right) \quad (2.59)$$

c étant une vitesse qu'il faut déterminer par les observations. TISSERAND démontre [124] que la substitution de cette loi à celle de NEWTON ne produirait aucun changement sensible dans les mouvements des planètes, si ce n'est qu'un petit déplacement proportionnel au temps dans le périhélie de Mercure.

Une approche différente a été faite par RIEMANN en électrodynamique [130] où il introduit une extension de la formule du potentiel sous la forme

$$k^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{D}{c^2} \right) \quad (2.60)$$

où D est une fonction des coordonnées et de leurs vitesses, c est, comme dans le cas de la loi de WEBER, une vitesse à déterminer par les observations. L'application du potentiel 2.60 à l'attraction des corps célestes donne des équations qui peuvent être intégrées rigoureusement. TISSERAND [124] montre que l'application de la loi de RIEMANN au calcul du périhélie de Mercure donnerait un mouvement de 28.44'' par siècle, valeur très approchée de la discontinuité découverte par LE VERRIER. Pour être complet, il faudrait encore faire mention des Lois de GAUSS et de CLAUSIUS [124], toutes deux dérivées des principes de l'électrodynamique. Toute la question est devenue désuète par l'introduction de la théorie de la relativité générale.

Il faut arriver à conclure et nous le faisons avec F. TISSERAND [124] : «*La loi de NEWTON représente, en somme avec une très grande précision les mouvements de translation de tous les corps célestes ... on peut être émerveillé de voir que toutes les inégalités, si nombreuses, si compliquées, et quelques-unes si considérables du mouvement de la Lune, soient représentées comme elles le sont par la théorie ... De même les positions des planètes, pendant un siècle et demi d'observations précises (en 1896), sont représentées à moins de 2'' près ... On éprouve en fin de compte, un sentiment d'admiration profonde pour le génie de NEWTON et de ses successeurs ...*».

2.5 La théorie newtonienne de la Lune

—|—

DEPUIS l'Antiquité la plus reculée, la Lune, par ses phases, par sa révolution constituant une horloge quasiment naturelle, par ses éclipses fournissant une base pour les premiers calendriers, était devenue l'astre le plus intéressant mais aussi le plus intrigant pour l'Homme. Si, à première vue, la Lune semble se déplacer sur un cercle autour de la Terre, déjà les Anciens s'apercevaient que ce mouvement en longitude était beaucoup plus compliqué. Ils parvinrent

à échafauder une théorie géométrique permettant une bonne concordance entre le calcul et l'observation avec les instruments disponibles alors.

La position angulaire de la Lune est définie par sa longitude θ et sa latitude λ mesurées respectivement dans le plan de l'écliptique et perpendiculaire à celui-ci, l'angle θ étant mesuré à partir de la direction de l'équinoxe vernal dans le sens ouest-est. L'angle de la latitude, qui est petit, varie vers le nord ou le sud, compté à partir du plan de l'écliptique. Comme la Lune possède une vitesse presque uniforme en longitude, que les Anciens estimaient même être constante, son mouvement vrai ne diffère jamais beaucoup de son mouvement moyen p qui est égal à une révolution par mois lunaire. Il est exprimé par :

$$\theta = pt \quad (2.61)$$

t étant le temps pour décrire l'angle θ .

La relation 2.61 serait vraie si l'orbite de la Lune était circulaire et si elle se trouvait dans le plan de l'écliptique avec la Terre dans le centre de celle-ci. Mais les mouvements de la Lune étant beaucoup plus irréguliers et donc soumis à des corrections, il se passa beaucoup d'années jusqu'à ce que seulement les plus importantes de ces inégalités dans le mouvement fussent reconnues et condensées dans des formules mathématiques. HIPPARQUE au II^e siècle avant J.-C. remarquait que ni le Soleil, ni la Lune ne possédait une vitesse angulaire constante autour de la Terre. Il chercha à palier à cette situation en supposant que les deux astres décrivaient quand même une orbite circulaire uniforme, mais que la Terre n'était pas au centre de ces orbites. Il appelait ces cercles des excentriques et désignait la distance de leurs centres C à la Terre E par l'« *excentricité* ». L'orientation dans le plan de l'orbite du diamètre sur lequel se trouve E par rapport à la direction du point vernal γ fut déterminée en observant le périhélie P , où le mouvement de l'astre paraît être le plus rapide, et l'apogée A où ce mouvement est le plus lent. Le point P est le point le plus proche vu de la Terre E tandis que A est le point le plus éloigné. Si la longitude de P est désignée par α et celle de la Lune par θ , on arrive après quelques opérations algébriques à la relation [74] :

$$\theta = pt + e \sin(\theta - \alpha) \quad (2.62)$$

Par une transformation géométrique élémentaire, HIPPARQUE arrivait à montrer que le mouvement variable 2.62 peut être exprimé par un mouvement double composé d'un mouvement uniforme d'un rayon vecteur allant de la Terre E vers un point Q sur le cercle orbital, lui même étant le centre d'un petit cercle qui porte la Lune et dont le rayon est égal à la distance EC . Sur ce cercle la Lune se déplace de façon uniforme. HIPPARQUE trouva que le rapport M du rayon du petit cercle à celui du grand cercle était de $\sin 5^\circ 1'$. Ce petit angle est le maximum de l'écart par rapport au mouvement uniforme 2.61 et il satisfait la relation :

$$\theta = pt + M \quad (2.63)$$

HIPPARQUE découvrit aussi que le périée A avançait progressivement d'environ 3° avec chaque révolution lunaire, comme si le cercle excentrique était lui-même mobile avec son centre C se déplaçant uniformément autour de E ensemble avec la ligne des apsides. Transcrit dans le modèle des épicycles, le phénomène s'expliquait par une rotation uniforme et de façon parallèle du rayon du petit cercle épicyclique et de la ligne des apsides d'un montant de 3° tandis que le rayon vecteur faisait une rotation complète. Cela implique que la longueur α du périée était variable. PTOLÉMÉE, dans le deuxième siècle de notre ère, découvrit encore que l'avance progressive de la ligne des apsides était affectée par une autre perturbation périodique qui pouvait être expliquée par un cercle excentrique et un épicycle mobile. Ce modèle confirmait assez bien les observations en longitude, mais n'arrivait pas à expliquer la grandeur de l'angle sous lequel la Lune est vue, et faillit donc à documenter la distance exacte de la Terre à la Lune. Bien plus tard, COPERNIC [9] arrivait à expliquer à la fois la position de la Lune et sa distance à la Terre en utilisant deux épicycles dont le premier avait son centre sur le grand cercle avec un rayon dont la rotation reste toujours parallèle à la ligne des apsides et dont le rayon vecteur porte un deuxième cercle qui, lui, porte la Lune. L'angle formé par le rayon vecteur du premier épicycle et celui du deuxième portant la Lune, est le double de l'angle formé par la direction vers le Soleil et le rayon vecteur du grand cercle. La longitude lunaire était donc :

$$\theta = pt + u_1 + u_2 \quad (2.64)$$

avec u_1 : la correction de HIPPARQUE : «*l'équation du centre*» et « u_2 » : la correction de PTOLÉMÉE appelée plus tard «*évection*». Chacun des termes u_1 et u_2 est une fonction périodique définie exactement par son épicycle et le mouvement de celui-ci.

Tycho BRAHE, à la fin du XVI^e siècle, grâce à ses observations méthodiques, découvrit encore une nouvelle inégalité. Ayant calculé les positions de la Lune pour différentes positions de son orbite, il constata qu'elle était toujours en avance par rapport à son lieu calculé entre les syzygies et les quadratures et qu'elle était en retard entre les quadratures et les syzygies. Le maximum de cette «*variation*» a lieu dans les octants. Tycho BRAHE déterminait le maximum de cette inégalité à $40'30''$, valeur assez proche de celle admise aujourd'hui qui est de $39'20''$.

Tycho BRAHE découvrit encore une autre inégalité appelée «*l'équation annuelle*». Ayant calculé la position de la Lune correspondant à un temps quelconque, il trouva que le lieu observé était en retard vis à vis du lieu calculé quand le Soleil se déplaçait du périée à l'apogée, et en avance dans les autres six mois.

Jusqu'à maintenant il fut seulement tenu compte des inégalités dans la position longitudinale. Mais il y a aussi des perturbations dans la latitude de cet astre dont le plan est incliné environ 5° par rapport au plan de l'écliptique comme HIPPARQUE le constata le premier. Les deux plans se coupent par la

ligne des nœuds commune aux deux plans et la différence entre un arc sur l'orbite lunaire et sa projection sur l'écliptique est une inégalité supplémentaire de la longitude appelée « *réduction* ». HIPPARQUE avait découvert que la ligne des nœuds exécute un mouvement rétrograde dans le plan de l'écliptique et Tycho BRAHE trouva qu'une oscillation de petite amplitude accompagnait cette rétrogradation. Chacune de ces inégalités a un effet sur la longitude de la Lune θ qui en principe peut être modélée par un nombre quelconque d'épicycles de façon à former la série :

$$\theta = pt + \sum_i u_i \quad (2.65)$$

Comparé avec le mouvement moyen de la Lune, la série dans 2.65 donne des valeurs relativement petites.

Or si ces différentes inégalités de la Lune furent connues à la fin du XVI^e siècle avec une précision remarquable, il n'en était pas le cas pour ce qui concerne leurs causes. Vint d'abord KEPLER, que nous avons déjà rencontré dans un chapitre précédent comme étant l'astronome le plus compétent du début du XVII^e siècle, mais qui, en plus de ses travaux purement astronomiques, a conçu et consciencieusement poursuivi le programme de l'unification scientifique du monde astral et du monde sublunaire. Il substitua une dynamique céleste à la cinématique des cercles et des épicycles. Mais il appuya d'abord cette dynamique sur une astrobiologie solaire, en attribuant au Soleil, mais aussi à la Terre des âmes motrices voire sensibles. Bien entendu, la base de sa dynamique resta celle d'ARISTOTE et les forces qui meuvent les planètes et aussi la Lune sont proportionnelles à l'inverse de la distance entre ces corps et le corps central. La question est dès lors de savoir si : « *la cause de cet affaiblissement se trouve dans le corps de la planète, et la force qui y réside, ou bien dans le centre même du monde que l'on a adopté.* » [18] Si cette cause est située dans la planète, on peut imaginer que la planète offre une plus grande résistance à mesure qu'elle s'éloigne. Or cette inertie plus grande, au sens keplérien du terme, devrait être liée à une augmentation du poids ce qui n'est guère imaginable. Une autre explication serait que sa vertu motrice propre pourrait être amoindrie par la variation de la distance. Mais si la vigueur motrice dépendait de la position, elle ne serait pas une âme incorruptible mais changerait avec les aléas de la vie.

Or la régularité répétitive des mouvements planétaires, jointe à l'unicité de la source que leur loi commune conduit à soupçonner, fait pencher KEPLER, très tôt déjà, vers la prise en considération de modèles mécaniques remplaçant les modèles vitaux initialement introduits [131]. Dorénavant le levier sert d'exemple typique pour rendre compte du phénomène du mouvement des planètes et de la Lune, car la statique possédait depuis ARCHIMÈDE une forme mathématique définie et pouvait donc servir de référence. KEPLER écrit dans l'« *Astronomia nova* » [18] : « *Si par conséquent son éloignement du centre du monde rend la planète plus lente, et sa proximité rapide, il est nécessaire que la source de la vertu motrice réside dans le centre du monde qu'on a adopté.* »

Un peu plus loin il poursuit : « *Cela nous fait comprendre que les planètes sont mues à peu près à la manière de la balance ou du levier. Car si la planète à mesure qu'elle s'éloigne du centre est de plus en plus difficile à mouvoir par la vertu centrale, cela revient au même que de dire à propos du poids qu'il s'alourdit en s'écartant du point d'appui –non en lui même, mais en raison de son effet sur le bras sustentateur à la distance concernée* ». Pour KEPLER la balance et le mouvement des planètes suivent les mêmes lois.

Mais il doit expliquer de quelle façon le Soleil joue effectivement le rôle moteur qu'il lui attribue et qu'il veut prouver presque de façon inductive. KEPLER met d'abord la lumière au centre de ses déductions. Il établit que plus la vertu motrice s'éloigne du Soleil, plus elle se disperse ; plus au contraire elle en est proche, plus elle est condensée et plus elle est forte. Et ce comportement est tout à fait le même pour la lumière. Si les deux phénomènes s'accordent donc grandement, il reste des traits qui les distinguent et la vertu motrice ne peut être considérée comme étant transmise par la seule lumière. La vertu motrice se diffuse en cercles alors que la lumière se propage en sphères. Il en résulte que la loi selon laquelle l'émission s'affaiblit à partir de sa source n'est pas du tout la même dans les deux cas : la force motrice diminue proportionnellement à la distance simple, tandis que l'intensité lumineuse baisse en raison du carré de la distance. Pourtant pour KEPLER, les deux entités s'accordent intégralement sur d'autres attributs. Dans les deux cas on a affaire à une émission se propageant en ligne droite à partir de sa source et pouvant indéfiniment poursuivre son chemin. Son affaiblissement avec la distance provient du fait que le rayonnement diminue de densité à mesure qu'il s'éloigne de son origine, l'espace à remplir devenant de plus en plus grand.

KEPLER manque l'occasion de soutirer de ses réflexions et analogies le concept de la force mais subsiste dans l'idée préconçue que la vertu motrice doit obligatoirement être une chose matérielle. Tout se passe comme si les planètes devaient s'imbiber en leurs tréfonds de la vertu motrice ; cette vertu doit donc emprunter un statut de quasichose, qui est celui d'une « *spécies* » [131]. KEPLER croit savoir qu'il faut rendre l'action de cette « *spécies* » proportionnelle à la distance simple ; or l'analogie avec la lumière conduirait plutôt au carré de la distance, hypothèse émise par HOOKE et démontrée finalement par NEWTON.

Or l'analyse keplérienne continua à soulever encore des problèmes et restait insatisfaisante pour un motif évident. En effet, si la force motrice était tout à fait semblable à la lumière, elle devrait agir dans le sens de son émission, c'est-à-dire en ligne droite et son seul effet serait alors d'éloigner les planètes du Soleil. Pour qu'il en aille autrement, il faut que sa source elle-même soit animée d'un mouvement de rotation, qui lui, entraîne tous les rayons de la vertu motrice émis par le Soleil. De là, l'idée keplérienne que le Soleil doit tourner sur lui-même, emmenant le long des rayons de sa « *spécies* » les planètes dans un immense balayage cosmique perpendiculaire à l'axe de la rotation solaire.

KEPLER doit rendre compte de ce qu'est dans la nature intime du Soleil pour entraîner de la façon décrite des corps matériels, à qui il assimile les pla-

nètes, autour de lui. Il admet d'abord que le temps de la rotation du Soleil sur lui-même est à la période de Mercure ce que la rotation diurne de la Terre est à la période de la Lune. Or pratiquement en même temps où KEPLER émet cette conjecture, SCHREINER, suite à son observation des taches du Soleil, en fixa la période de rotation à 25 jours et non pas à trois jours comme KEPLER avait cru déduire de son analogie entre le Soleil et la Terre. Il accepta le fait sans protester tout en maintenant son approche fondamentale en assimilant celle-ci à la théorie du magnétisme de W. GILBERT et de son livre *«De Magnete»* [132]. Parmi les idées dont fourmille ce livre, certaines ont connu une remarquable postérité scientifique. La distinction entre corps électriques et magnétiques, la définition précise et la mesure expérimentale du champ magnétique terrestre, la tentative d'utiliser l'inclinaison magnétique pour trouver la latitude en mer, relèvent d'approches véritablement modernes. En revanche, la tentative de vouloir expliquer la rotation de la Terre et même la précession des équinoxes par le magnétisme tient de l'information gratuite. L'approche explicative de GILBERT fit bondir, dès la publication du livre, Francis BACON, pourtant l'apôtre de la nouvelle science expérimentale, à cause des excès philosophiques auxquels peut mener le *«tout magnétisme»* du premier. D'autres lecteurs, moins rationalistes peut-être, vont pourtant adopter l'idée gilbertienne et même la développer. Ce ne fut que NEWTON qui finalement la rejeta. KEPLER verra dans l'*«âme magnétique»* du Soleil et des planètes une cause de leur attraction réciproque. GILBERT observe comment une aiguille aimantée réagit à un aimant sphérique. Il note que cette aiguille est d'autant plus attirée par lui qu'elle en est plus proche ; il remarque aussi que l'aiguille est diversement inclinée selon sa position par rapport à l'axe des pôles magnétiques, et que, quand elle parvient à l'équateur de l'axe, elle s'oriente parallèlement à ce dernier. KEPLER en conclut que l'aimant sphérique au lieu d'exercer une action attractive dans la position décrite, ne fait subir à l'aiguille qu'une action directionnelle. A partir de cette situation, il construit alors son modèle magnétique : le Soleil n'attire par les planètes, puisqu'elles sont situées près de l'écliptique perpendiculaire à l'axe des pôles magnétiques de celui-ci, mais il ne fait que les orienter. Et c'est par la rotation du Soleil tel un aimant, que celui-ci entraîne dans sa rotation les corps planétaires, eux-mêmes magnétiques, de telle sorte que par rapport à lui, ils conservent leur orientation initiale. KEPLER applique d'ailleurs aussi ce modèle à l'action de la Terre sur la Lune : *«C'est pourquoi il est plausible, comme la Terre entraîne la Lune par une « species », et qu'elle est un corps magnétique ; et que comme elle, le Soleil entraîne les Planètes par une « species » qu'il émet ; que comme elle encore, il soit un corps magnétique»* [18]. Ainsi KEPLER croit avoir résolu la question quant à l'origine physique des mouvements orbitaux.

Après cette longue digression sur les bases de la physique keplérienne, revenons à sa théorie de la Lune. En effet, KEPLER, dès ses débuts, prêta beaucoup d'attention aux mouvements de celle-ci. En 1599, il avait identifié de façon indépendante de Tycho BRAHE, la quatrième inégalité lunaire : l'équation annuelle dont il pensa d'abord qu'elle était causée par la Lune elle-même, et qu'il identifia comme étant égale à environ 11'. Elle augmente l'équation du centre,

ralentissant ou accélérant la marche de la Lune. En février 1601, KEPLER écrivit une lettre à son maître MAESTLIN, résumant ses connaissances d'alors sur l'orbite lunaire et dans laquelle il attribua une trajectoire ovale à la Lune, bien avant qu'il eût pu déterminer la nature de l'orbite martienne [133].

C'est dans son œuvre la plus scientifique : l'«*Epitome*» [134] que KEPLER exposa le plus complètement sa théorie de la Lune, tout en préservant ses idées dynamiques et en postulant une «*âme*» à la Terre. Les LIVRES IV à VI de cette publication exposent la théorie keplérienne de la Lune dont le mouvement diffère de deux façons de celui des planètes. Il se doit d'abord d'expliquer, que non seulement le Soleil, mais aussi des corps beaucoup plus petits, comme la Terre, possèdent les qualités requises pour faire tourner des satellites autour d'eux. Pour ce faire, il utilisa sa théorie physique mais surtout l'analogie magnétique exposée plus haut. Il doit ensuite expliquer les deuxième, troisième et quatrième inégalités de la Lune qui sont inexistantes pour les orbites des planètes.

La rotation diurne de la Terre entraîne la Lune, tout comme le Soleil entraîne les planètes de l'ouest vers l'est. Or il s'avère que l'orbite de la Lune est située très près de l'écliptique et non pas près de l'équateur terrestre où elle devrait se trouver d'après lui et ce qui est le cas pour les satellites des autres planètes. KEPLER expliquait ce fait en disant que la Lune en réalité, orbitait autour du Soleil, quoique de façon erratique et qu'elle n'avait jamais de mouvement rétrograde dans son orbite solaire. Ainsi pour lui, l'influence solaire est prédominante, ce qui explique que l'orbite lunaire est située près de l'écliptique. Cette affirmation keplérienne de considérer le mouvement lunaire non pas par rapport à la Terre, mais par rapport à l'ensemble du système solaire fut foncièrement nouvelle quoiqu'elle n'explique pas pourquoi les perturbations de l'orbite lunaire causées par la Terre par rapport à sa course autour du Soleil seraient confinées au voisinage de l'écliptique.

La théorie de la Lune était donc rendue compliquée pour KEPLER par le fait que le Soleil influence le mouvement de celle-ci. En effet la seconde et la troisième inégalité lunaire, c'est-à-dire l'évection et la variation dépendent de la position du Soleil. KEPLER expliquait ce fait en supposant que la lumière solaire, tout comme elle stimule la croissance des plantes et des animaux sur la surface de la Terre, fait naître également la rotation terrienne et le mouvement de la Lune autour de la Terre. KEPLER distinguait quatre composantes dans le mouvement longitudinal de la Lune autour de la Terre. Il y a pour lui d'abord le mouvement uniforme dû au magnétisme de la Terre, deuxièmement une inégalité due aux fibres magnétiques «*librantes*» tout comme pour les planètes primaires, troisièmement, une irrégularité synodique dans cette dernière, nommée évection, et finalement une «*variation*» dans le mouvement lui-même. En outre KEPLER avait détecté une autre petite inégalité d'une période d'une année anomalistique qu'il attribua non pas au mouvement annuel, mais à la rotation terrestre qu'il nomma «*l'équation annuelle*». Une composante synodique additionnelle affecte aussi le mouvement en latitude de la Lune.

Suivant KEPLER, la Lune a donc deux sources de mouvement : le magné-

tisme terrestre et la lumière du Soleil. Et voilà pourquoi son mouvement possède le double des composantes de celui d'une planète primaire dont la source unique du mouvement est le Soleil. Ainsi toute planète primaire possède un mouvement moyen, mais la Lune possède en plus une équation semi-mensuelle de ce mouvement. En plus, la planète primaire est soumise à une inégalité due à l'excentricité et donc à la forme elliptique de sa trajectoire. La Lune, quant à elle, possède en plus «*l'évection*» qui est une variation de la première inégalité. Toute planète primaire se déplace autour du plan de l'écliptique tandis que la position de la Lune varie en latitude avec la position du Soleil.

Nous savons déjà que la deuxième des inégalités solaires : «*l'évection*» fut connue depuis HIPPARQUE et PTOLÉMÉE. Ce dernier l'avait expliquée d'une manière géométrique par la variation considérable de la distance entre la Lune et la Terre. KEPLER, lui, soutenait qu'il pouvait expliquer cette inégalité sans l'introduction d'un modèle cinématique nouveau et que donc, son explication était purement physique. Celle-ci n'était pas évidente à première vue, car ses tentatives antérieures faisaient état d'une excentricité lunaire variable, dépendant de l'élongation du Soleil et de la Lune. Une analyse plus fouillée l'avait convaincu que l'excentricité était bien constante et que donc, la nature de l'inégalité, telle qu'il l'avait décrite, était purement physique. La Lune accélérât ou décélérât en fonction de sa distance aux syzygies et l'inégalité en question était alors un changement périodique de celle-là, dépendant de l'apogée. En effet, quand l'apogée lunaire est dirigé vers le Soleil, la Lune est éloignée plus de sa position moyenne qu'il est le cas, à la même anomalie moyenne quand l'apogée est en quadrature avec le Soleil. Ceci veut dire que l'inégalité est plus grande quand la ligne des syzygies est voisine de la ligne des apsides.

Utilisant des considérations géométriques sur une figure de cercle excentrique, KEPLER parvient à déduire la formule suivante pour l'anomalie moyenne α , tenant compte de l'équation du centre et de l'évection [135] :

$$\alpha = (\beta + e \sin \beta) + (e \cos \kappa (\sin \eta - \sin \kappa)) \quad (2.66)$$

avec

- κ : l'élongation de la ligne des apsides au temps t ;
- $e \cos \kappa$: l'excentricité variable mensuelle ;
- β : l'anomalie vraie ;
- e : l'excentricité ;
- η : l'élongation de la Lune des syzygies
mesurée à partir du centre de l'orbite.

L'évection a un comportement assez compliqué. Quand l'apogée est situé dans la quadrature par rapport au Soleil, $\kappa = 90^\circ$ et donc $\cos \kappa = 0$ et l'excentricité mensuelle est égale à 0 et le terme donnant l'évection disparaît. Si, par contre l'apogée est situé dans les syzygies, $\kappa = 0$ de façon que l'évection devient égale à $e \sin \beta$, puisque $\eta = \beta$ et l'on obtient pour 2.66

$$\alpha = \beta + 2e \sin \beta \quad (2.67)$$

La différence maximale entre α et β devient alors $2^{\circ}30'$ si l'on utilise la valeur de $e = 0,04362$ pour l'excentricité. Tycho BRAHE avait déjà trouvé que la valeur maximale de l'évection était égale à la moitié de l'équation physique ou de l'inégalité «*soluta*» représentée par le premier terme de la formule 2.66. Dans ses déductions, KEPLER ne tint pas compte que la trajectoire lunaire est en fait une ellipse et non pas un cercle. Mais l'erreur ainsi commise est négligeable.

Quand l'évection est maximale, c'est-à-dire lorsque la ligne des apsides est dans les syzygies, il n'y a pas d'erreur si la Lune est placée sur un cercle. Par contre, quand les apsides sont en quadrature, il y aurait une légère erreur, mais dans ce cas l'évection disparaît.

La troisième inégalité lunaire, la variation ou l'inégalité mensuelle perpétuelle comme Tycho BRAHE la nommait, est toujours positive contrairement aux deux premières qui peuvent être additives ou soustractives. La description keplérienne de cette inégalité est originale. Il la considérait comme étant toujours accélératrice et ne pouvant être éliminée dans le temps. Si, du point de vue mathématique, il était possible de combiner la valeur médiane de la variation avec le mouvement moyen, tout en gardant un reste à caractère périodique, l'inégalité du point de vue physique reste pour KEPLER un phénomène séculaire. Il l'expliquait par la variation de l'intensité des rayons solaires. En effet, pendant le temps que la Terre transporte à elle seule la Lune à travers douze révolutions complètes, la lumière du Soleil «*fortifie*» ce mouvement du supplément de $132,45^{\circ}$ qui est la différence entre une année sidérale et douze mois synodiques. Ce supplément représente donc l'influence de la lumière solaire sur la Lune et devrait, selon KEPLER, être proportionnelle à la latitude terrestre de celle-ci. Il pose alors que la vitesse de ce mouvement accélérateur est proportionnelle au cosinus de l'élongation lunaire η , valeur qu'il modifie après comparaison avec les observations de Tycho BRAHE, en $\int \cos^2 \eta d\eta$. Il détermine finalement la valeur maximale de la variation comme étant égale à $0,51^{\circ}$ tandis que Tycho BRAHE avait mesuré une valeur légèrement moindre.

KEPLER tenta également d'expliquer par son concept de force magnétique le mouvement accéléré de la Lune causé par les rayons lumineux du Soleil, le mouvement de la ligne des nœuds et la rotation de la ligne des apsides. Après l'exposition générale de la dynamique céleste keplérienne faite plus haut, il mènerait trop loin d'en vouloir suivre les détails à l'aide desquels il explique les différentes inégalités lunaires d'autant plus que ces théories sont inexactes d'un point de vue physique moderne. Il en est de même de ses considérations sur l'équation annuelle qu'il obtient à partir de la notion du temps astronomique et de l'équation du temps. Nous pouvons conclure que la théorie de la Lune de KEPLER, exposée dans l'«*épitome*», procède à partir des idées centrales keplériennes sur la dynamique céleste, à l'explication de toutes les inégalités lunaires connues, tout en préservant un degré de mathématisation remarquable. Il parvient à montrer que ces inégalités sont fonction à la fois de la longitude et de la latitude de notre satellite et il mélange, suivant son habitude dans sa théorie de façon quasi naturelle la spéculation métaphysique et la réflexion

physique.

En 1627, KEPLER publia ses tables planétaires qui contenaient également les positions de la Lune. Il les nomma «*Tabulae Rudolphinae*» en hommage à l'empereur RODOLPHE II [136]. La partie traitant des positions de la Lune : la «*Tabula Aequationis Luminis*» était pourtant loin d'une exactitude acceptable. KEPLER assimile le mouvement «*planétaire*» de la Lune à une ellipse possédant une excentricité fixe de $e = 0,04362$ et ayant la Terre située dans un de ses foyers. La ligne des apsides est supposée tourner de manière uniforme avec une période de 8 années 311 jours et 6 heures. A ce mouvement, KEPLER ajoute les inégalités de l'évection et de la variation.

Sur la base de l'équation 2.66, KEPLER établit les deux termes de l'évection. Il y a d'abord l'«*aequatio menstrua*» sous la forme :

$$2^{\circ}30' \cos \kappa \sin \eta \quad (2.68)$$

représentant le premier terme de l'expression pour l'évection, auquel s'ajoute la «*particula exors*» sous la forme :

$$-3'25'' \sin 2\kappa \quad (2.69)$$

qui en est le deuxième terme.

La variation est exprimée par la formule

$$140'30'' \sin 2\eta \quad (2.70)$$

KEPLER dérivait les valeurs des formules 2.68 à 2.70 et il ajusta ses calculs pour ramener à 0 l'équation totale quand le Soleil et la Lune sont en ligne en multipliant 2.69 par un autre facteur $\sin \eta$ en réduisant le coefficient de 2.68 de $3'25''$. En plus, tout comme Tycho BRAHE avant lui, KEPLER introduisit une «*équation annuelle*» de :

$$11'54'' \sin \epsilon \quad (2.71)$$

où ϵ est la différence entre la longueur du Soleil par rapport à son apogée, et qu'il détermine en ajustant l'équation du temps. Même si les tables keplériennes restèrent en usage dans l'astronomie prédictive pendant quelques 130 ans, elles étaient quand même déficientes dans le sens que la différence entre les longitudes observées et calculées pouvait monter à au moins $8'$ pour certains lieux. D'autres tables comme celles de BOULLIAU ou de LANDSBERG [137] ne faisaient guère mieux.

Si la théorie keplérienne des mouvements des planètes et donc aussi celle de l'orbite de la Lune est restée presque sans suite sur le continent européen, la fortune de KEPLER fut meilleure en Angleterre grâce à Jeremiah HORROCKS, le seul véritable disciple que KEPLER ait jamais eu. HORROCKS, malgré sa courte vie de 1618 à 1641, était un des très grands astronomes du XVII^e siècle, à la fois comme observateur et comme théoricien. Sa théorie lunaire fut publiée pour la première fois, quoi que de façon atrophée, par John FLAMSTEED comme

appendice à ses «*Opera posthuma*» en 1672 et fut reprise par NEWTON en 1694. Cette théorie apporta une véritable amélioration dans la prédiction des longitudes lunaires pour la période de 1600 à 1750, année qui vit la parution des Tables de Th. MAYER. HORROCKS vécut à Toxteth Park près de Liverpool et fut admis, à l'âge de 13 ans déjà, à Emmanuel College à Cambridge et il y fut ordonné diacre à 20 ans, donc plus jeune que l'âge canonique prescrit. Il mourut à 23 ans en laissant des résultats brillants dans tout le domaine de l'astronomie. Ainsi ce fut lui le premier à observer en 1639 le passage de Venus devant le Soleil et ce fut lui aussi qui avança la première théorie de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qui prédisait que celle-ci avait un caractère périodique [138].

La «*Nouvelle Théorie de la Lune*» de HORROCKS fut expliquée dans une lettre à CRABTREE datée du 20 décembre 1638, puis révisée et augmentée peu avant sa mort le 3 janvier 1641 [139]. NEWTON parla de la théorie horrocksiennne dans les «PRINCIPIA» [1] dans le scholie après la PROPOSITION XXXV du LIVRE III dans la deuxième édition de 1713 où il dit : «*Notre HORROCKS fut le premier à déterminer que la Lune tourne sur une ellipse dont la Terre occupe le foyer le plus bas.*» Dans la troisième édition se trouve cette référence à HORROCKS.

En effet HORROCKS avait accepté l'ellipticité de l'orbite de la Lune mais aussi un mécanisme de libration de la ligne des apsides ainsi que son explication à l'aide des forces magnétiques. Il reprit même, du moins partiellement, les considérations harmoniques, bien qu'elles n'aient pas permis à KEPLER d'obtenir des excentricités plus exactes que celles obtenues par ses prédécesseurs.

NEWTON se référait encore à HORROCKS dans son texte : «*De Mundi Systemati liber*», qui fut écrit par lui en automne 1685 et fut refondu dans le LIVRE III des «PRINCIPIA». Après avoir exposé les différents mouvements de la Lune, NEWTON poursuivit : «*Tout ceci se déduit de nos principes (il se réfère ici aux **Corollaires** II à XI et **Corollaire** XIII de la PROPOSITION LXVI du LIVRE I de la première édition des «PRINCIPIA» rédigée déjà alors) et ces phénomènes existent vraiment dans le Ciel. Et cela se voit à travers l'hypothèse ingénieuse de HORROCKS, qui, si je ne me trompe, est la plus adéquate et que FLAMSTEED a retrouvé dans le Ciel.*» [1]

Nous avons vu plus en avant que la remarque newtonienne sur la primauté de HORROCKS concernant l'hypothèse elliptique de la trajectoire lunaire est erronée puisque KEPLER avait déjà introduit l'orbite elliptique de la Lune. Néanmoins HORROCKS fit le premier véritable effort pour donner une description analytique de cette orbite. Soit donc M la position de la Lune sur l'ellipse et (r, θ) les coordonnées polaires de celle-ci avec comme origine le foyer E où se trouve la Terre. Soit encore α , l'angle formé par la ligne des apsides et la direction de l'équinoxe vernal. L'équation de l'ellipse s'écrit alors :

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos(\theta - \alpha) \quad (2.72)$$

La ligne des apsides forme le grand axe de l'ellipse égal à $2a$; l est le «*semi*

lotus rectum» égal à b^2/a , e étant l'excentricité et $b^2 = a^2(1 - e^2)$.

Basé sur cette nouvelle approche géométrique, HORROCKS se met à décrire les principales inégalités de l'orbite lunaire. La plus importante de ces inégalités, produite par l'action gravitative du Soleil, et la seule connue par les Anciens, mise à part la progression de la ligne des apsides, la régression de la ligne des nœuds et l'inégalité elliptique, représentait un problème très difficile à expliquer par les astronomes du passé. Nous avons déjà vu qu'elle fut initialement détectée par HIPPARQUE au deuxième siècle avant J.-C., mais ce fut PTOLÉMÉE, trois siècles plus tard, qui indiqua, quoique incomplètement, la loi de celle-ci. Il est étrange que cette inégalité très importante ne posséda pas de nom jusqu'en 1645 quand Ismael BOULLIAU proposa de la nommer «*évection*» [141] :

La correction de la longitude moyenne de la Lune par l'évection est d'après HORROCKS :

$$1,274^\circ \sin(2D - g) = \sin(2(L - L') - (L - \Pi)) \quad (2.73)$$

avec

- D : l'élongation,
c'est-à-dire la différence entre les longitudes moyennes
du Soleil L' et de la Lune L ;
- g : l'anomalie moyenne de la Lune,
c'est-à-dire la différence entre la longitude de la Lune L
et la longitude de son périégée Π .

Si la formule 2.73 semble simple, l'effet de l'évection est très complexe. L'inégalité est égale à 0° quand la Lune et son périégée sont en syzygies, c'est-à-dire quand $D = 0^\circ$ et $g = 0^\circ$; ou en quadratures : $D = 0^\circ$ et $g = 90^\circ$. Elle est également égale à 0° si la Lune est en quadrature et son périégée en syzygies : $D = 90^\circ$, $g = 90^\circ$.

Mais l'évection disparaît aussi quand $L' = (L + \Pi)/2$ c'est-à-dire si le Soleil se trouve au milieu en longitude entre la Lune et son périégée et devient maximale si $L' = (L + \Pi)/2 - 45^\circ$. Une autre méthode pour analyser cette inégalité 2.73 consiste à développer des termes correctifs variant de manière continue avec l'excentricité de la trajectoire lunaire et avec la longitude moyenne de la ligne des apsides.

Celle-ci exécute, d'après HORROCKS, un mouvement de libration autour de sa position moyenne qui décrit un arc de cercle variant entre 0° et environ 12° et une excentricité augmentant et diminuant d'une valeur variant entre 0° à environ 20% de sa valeur moyenne. Ce fut en gros cette méthode que HORROCKS utilisa en 1638 et qu'il communiqua à CRABTREE dans la fameuse lettre du 20 décembre de la même année. Il s'y réfère à une «*nouvelle calculation lunaire*» qu'il avait envoyée à CRABTREE le 29 septembre 1638, mais celle-ci fut en réalité basée sur les tables keplériennes et n'avait aucune accointance avec sa méthode propre qu'il exposa dans cette lettre du 20 décembre 1638. Probablement HORROCKS élaborait-il sa méthode entre le 29 septembre et le 20 décembre 1638.

L'expression de la longitude lunaire tenant compte de l'approximation de deuxième ordre de l'inégalité elliptique et de l'évection s'écrit [142] :

$$\theta = L + 2e \sin(L - \Pi) + \frac{5}{4}e^2 \sin 2(L - \Pi) + \gamma \sin((L - \Pi) + 2(\Pi - L')) \quad (2.74)$$

avec les désignations e : l'excentricité moyenne de l'orbite lunaire 2.74, γ : le coefficient de l'évection, L , L' et Π sont les longitudes moyennes à un temps donné de la Lune, du Soleil et du périégée de la Lune.

Le dernier terme de l'équation 2.74 est identique à l'expression 2.73 puisqu'il est simple de prouver que :

$$2(L - L') - (L - \Pi) \equiv (L - \Pi) + 2(\Pi - L') \quad (2.75)$$

HORROCKS pose alors :

$$\epsilon \cos \delta = e + \frac{1}{2}\gamma \cos 2(\Pi - L') \quad (2.76)$$

$$\epsilon \sin \delta = \frac{1}{2}\gamma \sin 2(\Pi - L') \quad (2.77)$$

et il peut alors combiner le deuxième et le quatrième terme de l'équation 2.74 dans une nouvelle expression :

$$2\epsilon \sin 2(L - \Pi + \delta) \quad (2.78)$$

tandis que dans le même ordre d'approximation le troisième terme de 2.74 devient :

$$\frac{5}{4}\epsilon^2 \sin 2(L - \Pi + \delta) \quad (2.79)$$

Finalement on obtient pour 2.74 la nouvelle forme :

$$\theta - L = 2\epsilon \sin(L - \Pi + \delta) + \frac{5}{4}\epsilon^2 \sin(2L - \Pi + \delta) \quad (2.80)$$

Ceci représente l'équation du centre dans une ellipse à excentricité variable 2ϵ au temps t et la longitude de l'apside la plus proche est $\Pi + \delta$.

Il est aisé de voir la signification géométrique des équations 2.76 et 2.77 : la Lune est décrite avec un foyer de son orbite se mouvant dans un épicycle de rayon $\frac{1}{2}\epsilon$ avec une vitesse angulaire qui est le double de la vitesse solaire se séparant de la ligne des apsides. Le centre de l'épicycle se trouve sur la ligne moyenne des apsides à une distance du foyer éloigné égale à l'excentricité moyenne. Cette description horrockssienne ne prétend pas à être réaliste dans le sens que l'excentricité est effectivement variable et qu'un mouvement libratoire de la ligne des apsides existe réellement. HORROCKS pense uniquement que sa description décrit assez bien avec un certain degré d'approximation l'orbite elliptique de la Lune ainsi que l'effet de la plus grande perturbation solaire.

Il reste à déterminer encore la valeur de δ . Pour cela l'on peut diviser 2.76 par l'expression 2.77 pour obtenir :

$$\cot \delta = \frac{2e}{\gamma} \csc 2(\Pi - L') + \cot 2(\Pi - L) \quad (2.81)$$

La valeur maximale de δ est alors :

$$\Delta = \frac{1}{\sin \gamma / 2e} \quad (2.82)$$

En simplifiant l'équation 2.81 et après plusieurs transformations algébriques, on trouve l'expression suivante :

$$\delta = (\Pi - L') - \tan^{-1}(\cot^2(45^\circ + \frac{1}{2}\Delta) \tan(\Pi - L')) \quad (2.83)$$

qui est identique au résultat de HORROCKS pour calculer la ligne des apsides [143].

La valeur de l'excentricité δ calculée à l'aide de l'équation 2.83 permet alors de déterminer l'excentricité momentanée ϵ au moyen de l'équation 2.76 qui devient :

$$\epsilon = (e + \frac{1}{2}\gamma \cos 2(\Pi - L')) \sec \delta \quad (2.84)$$

Le correspondant de CRABTREE, GASCOIGNE [144], fut gratifié d'informations supplémentaires. Ainsi la valeur adoptée par HORROCKS pour l'excentricité moyenne est de 0,05524, assez près de 0,05490, chiffre représentant la valeur adoptée aujourd'hui. Les valeurs maximales et minimales de cette excentricité sont, suivant HORROCKS : 0,06686 et 0,04362. Si l'on multiplie la valeur pour l'excentricité moyenne par $2 \sin \Delta$ avec $\Delta = 11^\circ 47' 22''$, on obtient une valeur γ pour l'évection égale à $1^\circ 17' 36''$ qui correspond étrangement bien à la valeur moderne de $1^\circ 26' 26''$.

HORROCKS avait dérivé l'excentricité de l'ellipse instantanée à partir de l'expression 2.84. Et puisque $\sec \delta$ ne diffère que peu de l'unité, il posa ce facteur égal à l'unité.

Par cette simplification, HORROCKS ne put tenir compte de l'épicycle sur lequel serait logé le centre de l'orbite elliptique de la Lune et dont le rayon serait la moitié de la différence entre les excentricités maximales et minimales. Le centre de cet épicycle serait le point sur la ligne moyenne des apsides, s'il n'y avait pas d'évection et si l'excentricité de l'orbite serait égale à l'excentricité moyenne. HALLEY s'était aperçu de la simplification horrocksiennne et c'est NEWTON qui attribua la gloire de cette théorie de la Lune exclusivement à HALLEY [1].

Il reste encore à déterminer l'équation du centre. La méthode que HORROCKS avait inventé à ce propos repose sur le fait que si l'équation de KEPLER :

$$E - M = e \sin E \quad (2.85)$$

n'admet pas une solution directe quand E est inconnu, il n'en est pas le cas pour l'équation

$$\sin(E' - M) = e \sin E' \quad (2.86)$$

dont la solution est égale à

$$\tan(E' - \frac{1}{2}M) = \frac{1+e}{1-e} \tan \frac{1}{2}M \quad (2.87)$$

En substituant $\sin \Phi$ pour e , le côté droit de 2.87 devient

$$\tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi) \tan \frac{1}{2}M \quad (2.88)$$

Cette forme correspond à celle utilisée par HORROCKS qui substitua E' pour e et il obtint les deux formules :

$$\tan \frac{1}{2}v = \tan^2(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi') \tan \frac{1}{2}e \quad (2.89)$$

$$r = 1 - e \cos e \quad (2.90)$$

v' étant l'anomalie vraie correspondant à une anomalie excentrique E' et v l'anomalie vraie correspondant à M ; r représente le rayon vecteur.

HORROCKS prit en compte également la «*variation*» et il corrigea la formule de Tycho BRAHE de

$$40, 5' \sin 2D' \quad (2.91)$$

à

$$36, 5' \sin 2D' \quad (2.92)$$

avec D' étant l'élongation vraie de la Lune au Soleil.

L'équation adoptée par HORROCKS est trop petite et il l'avait fixée sans tenir compte des inégalités que subit également le rayon vecteur r . Il restait donc une inconsistance dans la théorie de HORROCKS qui ne fut levée que beaucoup plus tard.

La deuxième inégalité de la longitude de la Lune : l'équation annuelle que KEPLER avait examinée et chiffrée fut adoptée sous cette forme par HORROCKS dans sa «*Nouvelle Théorie de la Lune*».

L'inégalité dans la latitude n'a pas intéressé HORROCKS qui ne possédait pas de concept propre pour la traiter et il se référait aux indications contenues dans les «*Tables Rudolphines*».

En 1671, FLAMSTEED prit connaissance de la théorie horrocktienne et se mit à reconstruire le modèle géométrique que celui-ci avait dressé de l'orbite de la Lune. Nous avons vu dans ce qui précède que la simplification utilisée par HORROCKS dans la formule 2.84 l'empêchait de tenir compte de l'épicycle sur

lequel serait logé le centre de l'orbite elliptique de la Lune, erreur redressée plus tard par HALLEY qui réclama cette théorie de la Lune comme son invention.

Dans un «*Epilogues*» à l'édition des œuvres posthumes de HORROCKS éditées par FLAMSTEED, celui-ci publia des tables du mouvement de la Lune calculées sur la base des équations horrocksiennes. Il les fit publier encore séparément en 1681.

Très tôt fut reconnu ce que NEWTON devait à HORROCKS. Ainsi Madame DU CHÂTELET écrit dans son «*Exposition abrégée du Système du Monde*» [98] : «*Monsieur HORROCKS, célèbre astronome anglais avait prévenu Monsieur NEWTON sur la partie la plus difficile des mouvements de la Lune sur ce qui regarde l'apogée et l'excentricité. On est étonné que ce savant, dénué du secours que fournissent le calcul et le principe de l'attraction, ait pu parvenir à réduire des mouvements si composés sous des lois presque semblables à celles de Monsieur NEWTON, et ce dernier, si respectable d'ailleurs, paraît d'autant plus blâmable en cette occasion d'avoir caché sa méthode, qu'il s'exposait à faire croire que ses théorèmes étaient comme ceux des astronomes qui l'avaient précédé, le résultat de l'examen des observations, au lieu d'être une conséquence qu'il eut tirée de son principe général*» .

Il apparaît par cette remarque, formulée quelque vingt années après la parution de la troisième édition définitive des «*PRINCIPIA*», que NEWTON a eu des problèmes sérieux avec la théorie de la Lune qu'il n'arrivait guère à expliquer intégralement à l'aide de sa loi de la gravitation, comme nous allons le voir dans la suite. Mais cette remarque se rapporte aussi au caractère cachottier de NEWTON qui préférerait se taire sur ses difficultés au lieu de les rendre publiques. Voilà pourquoi les péripéties exactes de la pensée newtonienne restent en grande partie conjecturales depuis sa prise de connaissance de la théorie horrocksienne vers 1670. Et à ses difficultés théoriques s'ajoutent les différends d'abord, la querelle envenimée ensuite, avec FLAMSTEED qui aurait dû fournir les observations des positions lunaires et que NEWTON rendait responsable de son échec partiel dans la formulation de la théorie de la Lune [145]. Nous allons revenir à cette situation hautement complexe dans la suite de ce chapitre.

—II—

SI LA PREMIÈRE ÉDITION des «*PRINCIPIA*» en l'été de l'année 1687 avait bien eu l'effet d'une bombe avec son principe explicatif unique par la force gravitationnelle et dont le monde scientifique d'alors était incapable de peser l'importance véritable, nous avons assisté à la genèse de la pensée newtonienne dans un chapitre précédent depuis ses différentes versions du traité «*De Motu*» jusqu'aux manuscrits de ses cours : «*Lectiones de Motu*» [44] de 1684, partiellement perdus.

Nous suivrons ici uniquement les développements de sa théorie de la Lune à travers les différentes éditions des «*PRINCIPIA*» avec son pari de vouloir ex-

plier l'orbite de la Lune comme ellipse keplérienne qui départ de sa forme idéale sous l'influence de la force perturbatrice de la gravité du Soleil, changeant constamment de direction par rapport aux positions relatives de la Lune et de la Terre.

NEWTON traite les questions quant à l'orbite lunaire d'abord dans le LIVRE I d'un point de vue purement théorique pour s'occuper des aspects astronomiques dans différentes propositions du LIVRE III. Ainsi dans la onzième section du LIVRE I : *«Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripètes»*, se trouve la fameuse PROPOSITION LXVI avec ses 22 corollaires traitant de manière géométrique le problème des trois corps. La proposition s'énonce : *«Si trois corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances s'attirent mutuellement, et que les attractions accélératrices de deux quelconques vers le troisième, soient entre elles en raison renversée du carré des distances, les plus petits tournant autour du plus grand, je dis que le corps le plus intérieur des deux petits décrira autour de ce grand corps des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, et que la figure qu'il décrira approchera plus d'être une ellipse dont le foyer sera le centre des forces, si le grand corps est agité par les attractions des petits corps, que s'il était en repos, et qu'il n'éprouvât aucune attraction de leur part, ou qu'il fût beaucoup plus ou beaucoup moins agité en vertu d'une attraction beaucoup plus ou beaucoup moins forte.»* [1]

Le texte de la PROPOSITION LXVI fait ressentir clairement qu'elle vise, avant tout, l'orbite lunaire et ses perturbations.

Or, dans la première édition des «PRINCIPIA», NEWTON est très peu explicite en ce qui est de son intention, car il désigne par S (= Sol) le corps central autour duquel une planète P (= Planeta) se meut et qui est perturbée par une planète extérieure Q . Ce n'est que dans la deuxième édition de 1713 que NEWTON changea les désignations de $Q - -P - -S$ en $S - -P - -T$. Malgré cette discrétion plus ou moins voulue de NEWTON, ses contemporains et successeurs étaient pleinement conscients de l'importance de son approche de la théorie lunaire. Ainsi un commentateur anonyme de la deuxième édition des «PRINCIPIA» dans les *«Acta Eruditorum»* constatait : *«En effet le calcul des mouvements de la Lune à partir de ses causes propres, en utilisant la théorie de la gravité et obtenant un accord parfait avec les phénomènes, démontre la force divine de l'intellect et de la sagacité de son auteur»* [108]. Et ce fut LAPLACE qui dans sa *«Mécanique Céleste»* dit de cette proposition et de ces corollaires : *«Je n'hésite point à les regarder comme une des parties les plus profondes de cet admirable ouvrage.»* [126]

La PROPOSITION LXVI était pour NEWTON la conséquence d'une proposition qu'il avait déjà formulée dans son manuscrit des *«Lectiones de motu»* quand il s'était rendu compte que l'analyse du problème des trois corps ne se limitait point au problème du mouvement de plusieurs planètes autour du Soleil et du conflit entre la loi de la gravitation et des lois de KEPLER, mais qu'il était possible d'expliquer par là l'origine des perturbations observées. Ainsi il reprit sa formulation d'une proposition déjà comprise dans le manuscrit cité

sous forme de la PROPOSITION LXV et qui se lit : «*Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, et décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu près proportionnelles au temps*» [1]. Les deux propositions citées forment le noyau théorique du traitement newtonien de l'orbite lunaire mais restent en opposition à différentes autres investigations théoriques contenues dans la première édition des «PRINCIPIA».

Ainsi dans la section IX des «PRINCIPIA» intitulée : «*Du mouvement des corps dans des orbes mobiles, et du mouvement des apsides*» [1], NEWTON traite de la stabilité et du mouvement des apsides des orbites planétaires. Si cette section généralise grandement la théorie dynamique newtonienne, il y a pourtant une conséquence directe de celle-ci sur le mouvement de la Lune. Sa conception appartient à la même période des années 1685 quand NEWTON ajouta les corollaires à la PROPOSITION LXVI, nommée ainsi dans le LIVRE I des «PRINCIPIA», et qu'il commença à s'intéresser plus profondément aux dérivations plus fines des phénomènes cosmiques à partir des lois idéales préalablement introduites.

Les perturbations de l'orbite lunaire étaient un sujet de prédilection pour ce genre de réflexions et la progression de la ligne des apsides de la Lune en constituait le principal problème. NEWTON procéda à une analyse sophistiquée de cet effet et montra d'abord que le parcours du corps, pour arriver à son point de départ, est supérieur à une rotation complète de 360° . Ce parcours peut être assimilé à une orbite elliptique tournant autour de son foyer. Il démontra ensuite que la force centripète contrôlant ce mouvement diffère d'une force proportionnelle aux carrés inverses de la distance. Il dérivait une formule donnant la différence entre cette force réelle et celle gravitationnelle dans une ellipse fixe et appliqua sa théorie dans la PROPOSITION XLV : «*On demande le mouvement des apsides dans des orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires*» [1] à l'orbite de la Lune. Si la force centripète varie à une puissance quelconque de la distance, NEWTON dit que cet exposant peut être trouvé à partir du mouvement des apsides et réciproquement. Il calcule alors un exemple dans lequel il suppose que la force faisant tourner la ligne des apsides : «*soit de 357,45 parties, moindres que la première par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse ; c'est-à-dire que $C = 100/3574'3 \dots$ sa quantité $\dots$ deviendra alors $\dots 180^\circ 45'44''$.*»

Donc, dans cette hypothèse, le corps parviendra de l'apside la plus haute à la plus basse par un mouvement angulaire de $180^\circ 45'44''$ et par la répétition de ce mouvement il continuera à aller d'une apside à l'autre, l'apside la plus haute ayant pendant chaque révolution un mouvement angulaire de $1^\circ 31'28'' \dots$ [1]. NEWTON introduisit le nombre de 357,45 sans explications supplémentaires. En effet il l'obtient à partir du carré du rapport de la période de la révolution de la Lune autour de la Terre à la période de révolution de celle-ci autour du Soleil. NEWTON en resta là dans la première édition de 1687. Il doit avoir considéré ce résultat comme, à la fois, une victoire et une défaite. En effet, il avait soulevé un fait pertinent de sa dynamique céleste qui malheureusement fut contredit par

les résultats de l'observation. Mais le fait que NEWTON a tenu à publier quand même ce résultat, prouve qu'il l'a considéré comme un achèvement majeur de ses investigations en mécanique céleste. Malheureusement, la quantité qu'il obtint était seulement la moitié de la progression observée de la ligne des apsides de la Lune. NEWTON ne pouvait se décider à admettre sa défaite et ce ne fut que dans la troisième édition des «PRINCIPIA» qu'il se résolut à remarquer que la progression de la ligne des apsides observée était le double de celle qu'il avait trouvée par le calcul.

Le LIVRE III des «PRINCIPIA» devient plus concret pour ce qui concerne l'orbite lunaire et NEWTON y applique ses résultats théoriques dans onze propositions : XXII et XXV à XXXV. Ce fut cette partie des «PRINCIPIA» qui était la plus modifiée dans les deuxième et troisième éditions de l'œuvre newtonienne, comme il le souligne d'ailleurs dans les avant-propos respectifs. Ainsi il dit dans sa préface de 1713 : «*Dans le LIVRE III, on déduit d'une façon plus complète, la théorie de la Lune et la précession des Equinoxes ...* » [1] tandis que pour la troisième édition, il annonce qu'«*on explique aussi avec plus de détails dans le Livre troisième, la démonstration qui prouve que la Lune est retenue dans son orbite par la force de la gravité*» [1].

La PROPOSITION XXII ouvre la théorie lunaire de NEWTON en statuant que : «*Tous les mouvements de la Lune, et toutes ses inégalités sont une suite et se tirent des principes qu'on a posés ci-dessus*» [1]. Les «*principes posés ci-dessus*» sont évidemment les PROPOSITIONS LXV et LXVI avec leurs corollaires. NEWTON donne comme explication de sa proposition un aperçu des inégalités lunaires en se référant constamment aux corollaires de la PROPOSITION LXVI. Il cite les inégalités connues déjà par les Anciens mais mentionne «*encore quelques-unes qui n'avaient pas été encore observées par les premiers astronomes, et qui troublent tellement les mouvements lunaires que, jusqu'à présent, on n'avait pu les réduire à aucune règle certaine.*» [1]

La PROPOSITION XXV : «*Trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvements de la Lune ...* » [1] donne un argument montrant à travers le **Corollaire XVII** de la PROPOSITION LXVI du LIVRE I que seule la composante dans la direction du rayon vecteur liant la Terre à la Lune, de la force perturbatrice exercée par le Soleil est significative. Celle-ci est proportionnelle «*en raison doublée de 27 jours, 7 h 43 mn à 365 jours 6 h 9 mn, ou, ce qui revient au même, comme 100 à 178725, ou enfin comme 1 à 17829/40''.*» [1] Cette expression est le rapport entre le mois sidéral et l'année terrestre. Il s'ensuit des considérations newtoniennes que la composante transversale de cette force n'a pas d'effet significatif sur l'orbite lunaire. Dans les propositions suivantes XXVI à XXXV, NEWTON spécifie d'avantage le problème restreint des trois corps en admettant que, pour un même ordre d'exactitude, l'excentricité, distincte de l'ovalité de l'orbite lunaire instantanée est insignifiante. En adoptant alors une trajectoire elliptique autour de la Terre dans son centre, il arrive à dériver une approximation satisfaisante pour l'inégalité de la variation dans la PROPOSITION XXIX. Celle-ci a été grandement amplifiée à partir de la deuxième édition des «PRINCIPIA» et traite en fait la seule inégalité lunaire

dérivée par NEWTON. Les PROPOSITIONS XXX à XXXIII traitent du mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire ou dans un orbe elliptique ainsi que du mouvement moyen et vrai des nœuds de la Lune. Un changement notable apparut dans la troisième édition où deux proportions ont été ajoutées après la PROPOSITION XXXIII traitant du mouvement moyen du Soleil respectivement de la manière de trouver le mouvement vrai des nœuds de la Lune à partir de la connaissance de leur mouvement moyen. Ces propositions ont été rédigées par John MACHIN.

Mais déjà dans la deuxième édition de 1713, NEWTON avait ajouté après la PROPOSITION XXXV un scholie qui résume l'état des recherches newtoniennes sur l'orbite de la Lune et dont il faut retenir l'affirmation principale : *«J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvements de la Lune qu'on pouvait les déduire de la théorie de la gravité ... »* [1]. NEWTON se lance alors dans des descriptions, et non des démonstrations, des inégalités lunaires basées sur sa théorie qualitative du problème des trois corps mais il se garde de faire des prévisions précises. Ce scholie remplace celui de la première édition et non reprise dans les éditions suivantes, qui a beaucoup intriguée les lecteurs sondant la compréhension véritable que NEWTON avait des mouvements de la Lune. En effet, il y expose d'une façon très détaillée les variations des perturbations longitudinales de la Lune en expliquant qu'il les avait trouvées par le calcul, sans pour autant donner celui-ci. Très probablement il s'est référé tout simplement aux tables horrocksiennes, non sans mentionner que celles-ci contenaient certaines erreurs. Il conclut en soulignant que les calculs s'avéraient extrêmement compliqués et nécessitaient un grand nombre d'approximations qui les rendaient peu exacts et impropres à être publiés.

La théorie de la Lune dans la première édition des «PRINCIPIA» était loin d'être une confirmation pour sa loi de la gravitation et laissa insatisfait aussi bien NEWTON que HALLEY. Celui-ci, tout de suite après la publication de l'œuvre newtonienne, pressa NEWTON de continuer ses investigations du problème de l'orbite lunaire [52]. NEWTON répondit que la théorie lunaire lui causa des maux de tête et le tenait réveillé très souvent de façon qu'il ne voulut plus y réfléchir.

Néanmoins, il ne perdit pas de vue la question, et au courant des années 1690, quand il projeta une deuxième édition des «PRINCIPIA», il révisa sa théorie de la Lune de fond en comble comme le montrent des feuillets manuscrits repris dans la «*Portsmouth Collection*» [125]. Il y a d'abord des feuillets ayant comme sujet l'apogée de la Lune et son mouvement. NEWTON y vise les PROPOSITIONS XXV à XXXV du LIVRE III de la première édition. NEWTON établit d'abord deux lemmes, dont le premier traite du mouvement de l'apogée dans une orbite elliptique d'excentricité très petite, en présence d'une force perturbatrice agissant dans la direction du rayon vecteur ou dans une direction perpendiculaire. Le second lemme élargit le résultat trouvé au cas où l'excentricité n'est plus infinitésimale. Il projetait ensuite une révision et une extension des PROPOSITIONS XXV à XXXV dont il établit un programme et qu'il augmenta par de nouvelles PROPOSITIONS XXXVIII et XLIV sans pour autant

en détailler le contenu, mais qui tournent toutes autour du problème crucial de trouver la forme de l'orbite excentrique de la Lune. Dans les calculs hâtifs qu'il couche sur le papier, dans les explications très souvent à côté du sujet, NEWTON montre une frustration de plus en plus grande devant son incapacité d'énoncer une théorie mathématique précise de l'orbite de la Lune, basée sur la loi de la gravitation qu'il croyait déjà posséder bien avant la publication de la première édition des «PRINCIPIA». Aucun des textes ne fut d'ailleurs repris dans la deuxième édition de 1713 quoique NEWTON fit une application en vue de trouver la vitesse du mouvement horaire du périhélie et il arrive au résultat qui peut être représenté par la formule :

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = u \frac{1 + \frac{11}{2} \cos(2\nu' - 2\bar{u})}{238,3} \quad (2.93)$$

qui n'est pas trop loin de la valeur exacte, même si NEWTON avait des doutes sur le coefficient $11/2$. Dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» de 1713, NEWTON élargit considérablement sa théorie de la Lune comme il l'annonce déjà dans la préface à cette édition : «*Dans le LIVRE III, on déduit d'une façon plus complète la théorie de la Lune et la précession des Équinoxes ...* » [1].

Mais il avait saisi en général le problème des perturbations planétaires et cette nouvelle édition parlait explicitement des perturbations de l'orbite de Saturne par Jupiter dans la PROPOSITION XIII révisée où il écrit aussi à propos de l'orbite de la Lune : «*Les dérangements qu'éprouvent les orbes des autres planètes par leurs actions mutuelles sont beaucoup moins considérables si on en excepte l'orbe de la Terre que la Lune dérange sensiblement. Le commun centre de gravité de la Terre et de la Lune décrit autour du Soleil une ellipse dont cet astre est le foyer, et dont les aires décrites par ce centre sont proportionnelles au temps : la Terre fait sa révolution autour de ce centre commun dans un mois.*» [1].

Malgré ses affirmations multiples, NEWTON n'arriva pas à produire une théorie complète de la Lune dans les trois éditions des «PRINCIPIA» et il en était bien conscient et cherchait des excuses. L'une fut pour lui le refus partiel de FLAMSTEED de lui livrer les positions de la Lune qu'il lui avait demandées en temps voulu. Mais par ailleurs, il maintenait la fiction qu'il était parvenu à une démonstration complète de toutes les inégalités lunaires à partir de sa loi de la gravitation, sans naturellement pouvoir en donner les preuves.

—III—

LA THÉORIE de la Lune de NEWTON, telle qu'il l'avait formulée dans la première édition des «PRINCIPIA» avait échoué et il se rendait pleinement compte de son échec. Et très probablement la crise psychique qui suivit la publication de 1687 était due en partie à cet échec qui laissa des traces indélébiles

dans la vie scientifique de NEWTON pour les années à venir. Plus jamais dans les années ultérieures, et malgré une assurance affichée dans ses capacités d'analyse mathématique, nécessaire à parfaire ladite théorie, il ne tenta une réalisation concrète de la description mathématique de l'orbite de la Lune à partir de sa loi de la gravitation. Par contre, il se rabattit sur des équations inspirées par la théorie de HORROCKS en vue de trouver l'orbite excentrique postulée par lui et dans ses calculs inachevés, ses conceptions formulées à la hâte, il est facile d'apercevoir son sentiment de frustration devant son incapacité de formuler une théorie mathématique précise pour un problème qu'il considérait virtuellement comme étant résolu déjà dans les années 1680. Implicitement, il se rendait compte qu'il avait fait fausse route et que la seule manière de s'en sortir était une reconsidération du problème depuis ses débuts. Et il croyait que FLAMSTEED, avec ses observations sur un cycle métonique complet des positions de la Lune, pourrait lui servir de guide.

Le premier septembre 1694, NEWTON se renda à Greenwich en compagnie de David GREGORY, professeur d'astronomie à Oxford et un des premiers adhérents de la théorie newtonienne, en vue d'obtenir de FLAMSTEED des observations de la Lune qu'il comptait utiliser pour une deuxième édition des «PRINCIPIA». Il existe de cette visite deux comptes-rendus, l'un de GREGORY, l'autre de FLAMSTEED lui-même. GREGORY dit dans son mémorandum : [74] *«Pour trouver la position de la Lune, il a besoin de cinq ou des six équations encore. FLAMSTEED mentionna une qui est la plus grande dans les quadratures et montra en plus à NEWTON environ cinquante positions réduites de façon synoptique. L'équation de NEWTON indiqua la position correcte de la Lune aux environs des quadratures. Mais les observations sont insuffisantes pour compléter la théorie de la Lune et des causes physiques sont dorénavant à prendre en considération. FLAMSTEED est en train de lui montrer une autre centaine de positions lunaires. Une prise en considération de causes physiques est nécessaire afin de réconcilier les orbites de Jupiter et de Saturne avec les cieux. Ces orbites sont perturbées par un mouvement oscillatoire»*. Il est vrai que NEWTON avait lui-même parlé de cette inégalité planétaire déjà dans la PROPOSITION XIII du LIVRE III dans la première édition des «PRINCIPIA» de 1687.

FLAMSTEED, de son côté, relata lui aussi la visite du 1er septembre 1694 [74]. Il dit qu'il confia quelques 150 observations des positions de la Lune à NEWTON et lui permettait de les copier sous condition que ce serait lui le premier à recevoir les résultats des calculs newtoniens. Or il se renda bientôt compte que sa collaboration avec NEWTON ne lui causait par seulement un surplus de travail, mais aussi beaucoup de frustrations. Et il se plaint que les amis de NEWTON faisaient grand cas de la théorie de Lune de celui-ci, mais ne disaient mot de ses propres mérites, ni de l'obligation que NEWTON avait contractée envers l'«*Astronomer Royal*» quant à sa priorité de recevoir les résultats newtoniens. FLAMSTEED se sentit traité injustement parce que NEWTON et HALLEY refusaient de le considérer comme leur égal. Et il continua à rappeler à NEWTON qu'il avait rompu sa promesse puisqu'il avait communiqué à GREGORY et à HALLEY les résultats trouvés grâce à ses observations. Mais,

quand HALLEY visita FLAMSTEED en octobre 1694, celui-ci montra à HALLEY, non seulement les mêmes observations qu'il avait fait voir à NEWTON, mais lui permettait aussi d'en prendre des notes. Dès lors la complainte de FLAMSTEED, que ce sont en réalité ses propres observations de la Lune que HALLEY se vantait d'avoir faites, déculpabilise en partie NEWTON, qui encore dans une lettre du 16 février 1694/95 renouvelle sa promesse de ne pas publier les résultats de FLAMSTEED sans le consentement de ce dernier.

Mais dès cette rencontre du 1^{er} septembre 1694 apparaissait une différence fondamentale dans les vues des deux antagonistes. FLAMSTEED chercha à persuader NEWTON, comme nous allons le voir dans l'analyse de leur correspondance dans les années 1694/95, de baser sa théorie de la Lune sur les résultats de HORROCKS, qui avait introduit une oscillation dans l'orbite keplérienne correspondant à une variation de l'excentricité de l'orbite lunaire et avait construit ainsi un modèle cinématique de l'orbite qu'il s'agissait encore d'affiner aux yeux de FLAMSTEED. Ainsi, celui-ci, dans une lettre du 11 octobre 1694 [74], propose à NEWTON de rendre variable le rayon du cercle de libration introduit par HORROCKS, afin de tenir compte de la différence des certaines inégalités qui sont plus grandes en hiver qu'en été. Pour cette proposition, FLAMSTEED se réfère d'ailleurs à HALLEY et aux entretiens qu'il avait eus avec celui-ci lors de sa visite à Greenwich au début du mois d'octobre.

Les relations entre FLAMSTEED et NEWTON se développèrent d'abord de façon harmonieuse comme en témoignent différentes lettres échangées entre les deux hommes au courant des mois d'octobre et de novembre 1694. Ainsi dans sa lettre du 24 octobre, NEWTON informa FLAMSTEED d'une rencontre qu'il avait eue avec HALLEY à Londres et où les deux hommes parlaient de la Lune. NEWTON y invoquait l'équation parallactique qu'il estimait être de 8' ou de 9', et au maximum de 10' et une autre inégalité qui est maximale dans les octants et dans l'apogée et pouvait y avoir une valeur de 6 à 7 minutes. HALLEY lui répondit qu'il soupçonnait l'existence d'une inégalité dépendant des nœuds de l'orbite de la Lune et NEWTON était d'accord quoiqu'il estimât cette inégalité trop petite pour être remarquée par les astronomes, mais déductible à l'aide de la théorie de la gravitation universelle. Finalement NEWTON demanda à FLAMSTEED de lui fournir dorénavant également les distances de la Lune au Soleil en tenant compte de la variation. Ceci pour épauler sa théorie reprise dans la proposition 29 du LIVRE III [1]. La lettre se termine par une demande que FLAMSTEED lui fournisse également des observations sur la latitude de la Lune « *car la théorie de la latitude nécessite une amélioration* ». [74]

Le 25 octobre déjà, FLAMSTEED écrit à NEWTON. La lettre commence par une constatation où il se réjouit que ses observations cadrent si bien avec la théorie newtonienne même si pour une d'entre elles il y a eu une faute de transcription. FLAMSTEED offre alors à NEWTON de répéter chaque observation si celui-ci la soupçonnait erronée. Finalement il relate sa rencontre avec HALLEY le jour avant et les entretiens qu'il a eus avec lui sur la théorie de la Lune. Ainsi HALLEY lui disait que l'apogée de la Lune se meut plus vite en hiver qu'en été et que l'évection est la plus grande quand le Soleil se trouve au périgée. FLAM-

STEED y voit quelque relation avec la théorie newtonienne de la gravitation et lui demande ses résultats théoriques concernant les inégalités de l'apogée et de l'excentricité afin qu'il puisse mener ses observations à partir d'une base plus certaine.

FLAMSTEED écrivit une autre lettre à NEWTON quatre jours seulement après la précédente et envoya avec celle-ci ses observations de la Lune et des réfractions qu'il avait promises. Il mentionna encore 100 positions lunaires, résultat de ses observations avec le sextant dans les années 1676, 77, 78, 79, 80 et souligna finalement que seul un catalogue des étoiles fixes était la garantie pour une détermination exacte des positions de la Lune.

Le 1^{er} novembre, NEWTON écrivit lui aussi à FLAMSTEED pour se plaindre des erreurs contenues dans l'écrit de celui-ci du 25 octobre et lui donna en même temps des instructions sur la nature et la forme des observations qu'il désirait de lui : *«Je désire uniquement des observations nécessaires pour parfaire la théorie des planètes en vue d'une deuxième édition de mon livre et je ne voudrais nullement vous importuner avec des communications qui sont pour moi superflues.»* [74]. Quelques lignes plus bas, NEWTON parle de la Lune et il relève que *«l'excentricité, respectivement l'équation de l'orbite de la Lune est sensiblement plus grande en hiver qu'en été et semble quelquefois aussi grande que Monsieur HALLEY le dit, mais je ne connais pas encore la loi de cette variation et je ne peux la connaître, tant que je n'ai pas les observations de l'orbite quand l'apogée se trouve dans les signes de l'été. Or celles que vous m'avez données à Londres ne donnent que la trajectoire de la Lune au cas où l'apogée se trouve dans les signes de l'hiver. L'équation qui dépend des nœuds de la Lune est trop petite pour être observée tant que vos observations ne sont pas corrigées à l'aide des lieux des étoiles fixes. Je vois seulement en général par ma théorie que cette équation existe et je conclus de vos observations que la théorie et vos observations sont concordantes aussi loin que j'ai pu les contrôler.»* [74]

Or le pacte conclu entre les deux hommes eut bientôt les premières fissures. Dans une lettre du 3 novembre 1694, FLAMSTEED réclamait les résultats de NEWTON et se plaignait que celui-ci n'avait même pas utilisé la moitié des résultats qu'il lui avait envoyés. NEWTON répondit le 17 novembre 1694 par une explication générale de sa méthode : *«Je crois que vous avez une notion fausse de ma méthode pour déterminer le mouvement de la Lune. Car je ne fais pas les corrections que vous supposez que je fasse, mais je veux gagner d'abord une vue générale de toutes les inégalités de l'orbite lunaire pour les déterminer avec le moindre travail possible dans leur forme numérique. Car la méthode ordinaire par approximations successives est ennuyeuse. La méthode que je propose est celle d'obtenir une notion générale de ces équations à déterminer, pour trouver leur forme exacte par l'utilisation des observations. Si je maîtrise la première partie de mon approche, j'ai des problèmes réels avec la seconde ... Et commencer cette partie avant d'avoir terminé la première ne serait pas raisonnable.»* [74]. La méthode newtonienne est restée incompréhensible pour FLAMSTEED et son approche purement empirique. Il ne comprenait jamais pourquoi NEWTON ne pouvait pas lui envoyer des résultats corrigés

basés sur la théorie horrocksiennne.

Il y eut encore quelques lettres échangées entre NEWTON et FLAMSTEED jusqu'en avril 1695 qui abordaient certaines questions quant à l'orbite lunaire le plus souvent en relation avec la théorie newtonienne de la réfraction. Mais le climat se gâtait entre les deux hommes et FLAMSTEED soupçonnait NEWTON de lui dissimuler ses résultats pour les communiquer à d'autres. Mais aussi NEWTON s'impatiait devant l'inertie de FLAMSTEED à lui fournir les résultats de ses observations ceci sous le prétexte qu'il était malade. Il lui en réclamait d'autres et il se disait même prêt à calculer les lieux exacts à partir des mesures brutes faites à Greenwich.

Finalemeant dans sa lettre du 23 avril 1695, NEWTON exprima sa désapprobation profonde avec FLAMSTEED, tout en lui expédiant enfin ses Tables sur la variation de l'excentricité de l'orbite lunaire : *«Quand je me mets moi-même à calculer, j'arrive très bien à me débrouiller. Mais quand je m'occupe d'autres choses, je n'arrive pas à me concentrer sur les calculs et de les faire sans fautes. Voilà pourquoi j'abandonne maintenant la théorie de la Lune avec la ferme détermination de ne la reprendre qu'au moment où j'aurais enfin vos résultats. Je reconnais qu'il me faut un travail de trois ou de quatre mois pour terminer la théorie et cela une fois pour toutes. Quand, en automne je calculais les mouvements de la Lune à l'aide de vos observations, je constatais que trois ou quatre concordaient très bien entre elles, même avec une exactitude d'une demie minute ou moindre, que d'autres séries de deux ou de trois observations concordaient de la même façon mais présentaient des différences de deux à trois minutes avec les observations des séries précédentes. Ne sachant pas me fier auxquelles des observations, je n'arrivais par à conclure et je vous écrivais de me fournir vos observations corrigées à l'aide des lieux exacts des étoiles fixes.»* [74]

FLAMSTEED ne remarqua pas l'impatiente grandissante de NEWTON et il continua à discuter des détails purement techniques telle que l'exactitude des tables newtoniennes donnant les valeurs des parallaxes lunaires. La réponse de NEWTON, formulée dans une lettre à FLAMSTEED datée du 29 juin 1695 fut cinglante : *«J'ai reçu vos tables du Soleil et je vous en remercie. Mais celles-ci, toutes comme vos autres communications, sont inutilisables pour moi, aussi longtemps que vous n'arrivez pas à me proposer une méthode adéquate pour me fournir des observations. Comme votre santé et d'autres préoccupations ne vous permettent pas de calculer les lieux de la Lune à partir de vos observations, il ne fut jamais mon dessein de vous demander cette tâche car je connais la peine d'une telle entreprise qui me rend malade en attendant vos résultats tout comme ce travail pénible rend malade vous-même. Je ne veux pas vos calculs mais seulement vos observations.»* [74]. Et NEWTON termine cette remontrance en écrivant : *«Je vous propose donc encore une fois de m'envoyer vos observations brutes des ascensions droites et des altitudes méridionales de la Lune et je me chargerai de calculer les lieux à partir de celles-ci ... Si vous n'aimez pas cette proposition, faites en une autre, qui pourrait être praticable, ou faites moi simplement savoir que j'ai perdu mon temps et mes peines dans l'élabora-*

tion de la théorie de la Lune et de la table des réfractions.» [74]. Ces phrases de NEWTON peuvent sembler excessives, mais il faut se rappeler, et NEWTON le savait pertinemment aussi, que sa théorie de la gravitation était loin d'être acceptée sur le continent, dont les savants continuaient à expliquer les phénomènes célestes à partir des tourbillons cartésiens. Mais une concordance exacte entre ses prévisions et des observations, que seul FLAMSTEED pouvait fournir était à même de vérifier la théorie de la gravitation. Ce fait explique l'impertinence de NEWTON vis à vis de FLAMSTEED qui seul pouvait garantir le succès de l'œuvre de sa vie.

FLAMSTEED se sentit profondément offensé par la lettre de NEWTON et, sur le dos de cette lettre, il fit une liste de toutes les observations qu'il avait fournies jusque là. Plaintivement, il remarquait que *«le monde pourrait juger si Monsieur NEWTON avait raison de se plaindre qu'il n'avait pas fourni assez d'observations.»* [74] Et le 2 juillet 1695, il écrivit une lettre à NEWTON dans laquelle il contre-attaqua. Il remarqua d'abord que le calcul des lieux de la Lune à partir des observations des ascensions droites et des altitudes méridionales était sujet à des finesses observationnelles, pour déclarer que la table des excentricités, que NEWTON lui avait communiquée avec sa lettre du 23 avril 1695, ne lui était pas inutile surtout si NEWTON lui fournissait des limites pour les valeurs indiquées. Et il écrivit ensuite : *«Je dois vous dire que vous pourriez m'épargner quelque travail inutile en m'informant sur la plus grande valeur de l'équation parallactique dans les quadratures de l'apogée et du périégée et si les tables des excentricités que vous avez calculées sont suffisantes pour trouver les lieux de la Lune dans les syzygies ou si vous devez utiliser d'autres équations, et alors lesquelles.»* [74] Et plus courageux encore, il continua : *«Je vous ai épargné beaucoup de travail avec mes calculs dans les synopses et il serait équitable si vous aussi, à votre tour, m'épargneriez du travail en me faisant savoir ce que vous avez déduit de mes observations que je vous ai communiquées. Vos résultats sont en sécurité dans mes mains, vous pourrez les modifier ou même les révoquer. Et ils resteraient votre propriété dans mes mains tout comme mes observations continuent à m'appartenir, même si elles sont dans vos mains.»* [74] Plus loin, il ose écrire encore : *«Vous voyez combien alerte je suis à vous fournir tout ce qui est nécessaire pour éclairer la théorie de la Lune et combien peu je demande en retour. Je voudrais connaître seulement les équations que vous utilisez maintenant dans votre théorie de la Lune, non pas que je voudrais m'immiscer dans cette théorie, mais pour satisfaire ma propre curiosité et pour connaître l'utilisation que vous avez faite de mes observations. Mais je dois demander que vous demanderez à Monsieur BENTLEY, que je ne connais pas, mais qui se plaint de la deuxième édition de vos «PRINCIPIA» qui doit paraître sans la théorie de la Lune parce que je n'aurais pas livré mes observations à vous, devrait se taire.»* [74]

NEWTON explosa dans sa lettre du 9 juillet 1695 à FLAMSTEED : *«Après que je vous ai aidé à sortir de l'échec dans vos trois grands travaux, celui de la théorie des satellites de Jupiter, celui de l'élaboration du catalogue des étoiles fixes et celui du calcul des lieux de la Lune à partir des Observations et après*

vous avoir communiqué librement des résultats parfaits dans leur espèce, qui valent plus que beaucoup d'observations et qui m'ont coûté plus de deux mois d'un dur travail que je n'aurais jamais dû entreprendre à votre compte et que j'entrepris uniquement pour vous donner quelque chose en retour de vos observations. Vous m'aviez donné un certain espoir, mais quand j'avais exécuté le travail que je n'aurais jamais dû faire, il n'y avait aucun moyen de rectifier vos résultats synoptiques. Je désespérais de pouvoir terminer la théorie de la Lune et je voulus l'abandonner comme une chose impraticable, ce que je racontais à un ami qui me rendait visite. Mais vous m'offrez maintenant les observations que vous avez faites avant 1690 et je les accepte avec tous mes remerciements et je ferais le calcul des lieux pour celles qui servent mes propos ... » [74] Cette lettre véhémement par laquelle NEWTON chercha à accabler FLAMSTEED de son échec dans la formation d'une théorie de la Lune rompit pour un bon moment toute conversation épistolaire entre FLAMSTEED et NEWTON, mais fut aussi la fin d'une théorie de la Lune quantitative à établir par ce dernier. Il est vrai que FLAMSTEED répondit aux offenses de NEWTON dans une lettre du 18 juillet 1695. Après avoir annoncé qu'il avait envoyé à NEWTON son catalogue des étoiles fixes, qu'il avait promis, et tout en lui souhaitant bonne chance pour les calculs des lieux de la Lune, il revient encore une fois sur sa maladie, lui défendant de se remettre à faire lui-même ces calculs. Et puis il se défend devant les insinuations hostiles de NEWTON : *«Je me plains du style et des expressions dans votre dernière lettre qui ne sont pas amicales, mais le «clerk» de la Royal Society (i.e. HALLEY) peut vous assurer que je n'ai pas l'humeur querelleuse.»* [74] *«Je conviens que le fil tiré de l'or vaut plus que cet or lui-même servant à sa fabrication.»* [74] Mais c'est lui qui a rassemblé les pépites, qui les a lavées et affinées, et il espère que NEWTON n'estime pas ce travail comme étant négligeable du simple fait qu'il l'avait reçu si bénévolement. Il exige comme récompense pour soi même, rien de plus qu'il soit tenu au courant des travaux de NEWTON. *«Si celui-ci n'était pas encore arrivé à clore ses travaux sur l'orbite de la Lune, il ne voulait nullement le presser à avancer et il était prêt à livrer d'autres observations tout en espérant que NEWTON ne médissait pas de lui auprès d'hommes perfides qui voulaient lui nuire.»* [74]

A cette lettre, NEWTON ne répondit point si l'on fait abstraction de quelques demandes émanant de NEWTON pour avoir encore un supplément d'observations. Avec sa lettre du 6 août 1695, FLAMSTEED lui envoya les observations demandées des positions de la Lune par rapport aux étoiles fixes. Mais NEWTON était fatigué de cette correspondance et il l'arrêta, exception faite d'une courte lettre qu'il adressa à FLAMSTEED en date du 14 septembre 1695 et dans laquelle il parla de l'orbite de la comète de 1683 dont HALLEY détermina la trajectoire en concordance avec les observations de FLAMSTEED et grâce à sa propre théorie de la gravitation. Le 19 septembre 1695, FLAMSTEED lui répondit. Dans cette lettre, il se plaint que sa santé chancelante ne lui permit pas d'observer la comète. La prochaine lettre de FLAMSTEED est datée du 11 janvier 1696. Il demandait à NEWTON, dans cette lettre, si c'était vrai qu'il avait achevé sa théorie de la Lune basée uniquement sur des «*principes incon-*

testables», c'est-à-dire sur la théorie de la gravitation et qu'il avait découvert six inégalités supplémentaires, non encore connues jusqu'alors sans que pour autant les calculs astronomiques augmentent en difficulté. FLAMSTEED se déclare heureux que NEWTON a peut-être découvert par lui-même ces inégalités, car dans le cas contraire, elles devraient résulter nécessairement de ses observations. Il lui demande pourtant, au cas où ses informations auraient joué un rôle quelconque dans sa théorie, NEWTON devrait l'informer. Il se plaint ensuite que celui-ci ne lui ait plus adressé une lettre dans les derniers quatre mois. Et il apparaît que, après cette lettre ultime, il n'y eut plus de correspondance entre les deux hommes pour les deux années à venir. Celle-ci se faisait alors par personnes interposées.

FLAMSTEED continua à envoyer à NEWTON des nouvelles positions de la Lune comme en témoigne sa lettre du 10 octobre 1698 (si elle a été réellement envoyée [74]). Et leurs relations reprirent. Ainsi NEWTON, après avoir repris ses études sur l'orbite de la Lune, rendit visite à FLAMSTEED le 4 décembre 1698 pour obtenir de lui douze positions calculées de la Lune à des dates qu'il avait préalablement fixées. Il y eut des difficultés, car les positions calculées par l'assistant de FLAMSTEED s'avéraient être fausses. Le 2 janvier 1698/99, FLAMSTEED écrivit une longue lettre à NEWTON dans laquelle il rappelait, dès les premières phrases, qu'il s'était attelé à perfectionner son atlas des étoiles fixes. Il relate alors le fait qu'il a écrit une lettre à WALLIS dans laquelle il relève qu'il a fourni les observations à NEWTON. *«J'ai été étroitement associé avec Monsieur NEWTON, professeur de mathématiques à l'université de Cambridge, auquel j'avais donné 150 observations des lieux de la Lune déduites de mes observations et comparées aux calculs à travers mes tables. Je lui avais promis d'autres observations dans le futur et je les obtenais, ensemble avec les éléments de mes calculs dans le sens d'une amélioration de la théorie horrocksiennne de la Lune. Je souhaite à NEWTON un succès comparable à ses attentes.»* [74] FLAMSTEED restait donc vigilant, surtout en ce qui concerne ses attributions à partir de sa position d'*«Astronomer Royal»* : *«J'espère que vous ne prenez pas en travers que j'ai dit avoir eu l'honneur d'avoir contribué à votre théorie de la Lune.»* [74] Il se faisait que WALLIS répétait à GREGORY le passage de la lettre de FLAMSTEED et NEWTON fut informé de cette affirmation, ce qui ne lui plaisait guère. Il formula donc des reproches à FLAMSTEED dans une lettre datée du 6 janvier 1698/9 et qui resta la dernière pour un certain nombre d'années, abstraction faite d'une lettre d'excuses écrite par FLAMSTEED le 10 janvier 1698/99. La lettre de NEWTON à FLAMSTEED était presque blessante : *«J'ai entendu que vous avez écrit une lettre au Dr WALLIS sur la parallaxe des étoiles fixes et que vous m'avez mentionné dans celle-ci en relation avec la théorie de la Lune. J'ai aussi été mis sur la scène publique avec une chose qui ne sera peut-être jamais destinée à être publiée. Je n'aime pas être imprimé à chaque occasion, ni être pressé par des étrangers en ce qui concerne des objets mathématiques, ni être forcé par nos concitoyens de m'occuper de besognes pendant le temps que je dois réserver pour les affaires du Roi. Voilà pourquoi j'exigeais du Dr GREGORY d'écrire au Dr WALLIS de ne pas imprimer*

le passage me mentionnant. Libre vous est de faire savoir le monde, combien d'observations vous possédez et quels calculs vous avez faits en vue d'améliorer les théories des mouvements célestes. Mais il y a des cas où vous ne devriez pas publier les noms de vos amis sans leur consentement.» [74]

FLAMSTEED s'excusa déjà le 10 janvier 1698/99. Il promet d'écrire à GREGORY en vue de supprimer le passage incriminé par NEWTON. Puis il revient encore une fois à ses mérites et à ceux de l'observatoire. Il répète que NEWTON a reçu de lui 150 observations des lieux de la Lune comparées aux tables en vue de corriger la théorie et qu'il les avait fournies bénévolement. Or HALLEY a non seulement omis de mentionner sa collaboration, ceci auprès de la «*Royal Society*» et à l'étranger, mais il a dit aussi «*que vous avez complété la théorie de la Lune et que vous l'avez confiée à lui comme un secret.*» [74] La lettre se termine avec la conviction que lui, FLAMSTEED et NEWTON ont grâce à leurs labeurs fait connaître un peu mieux le grand mécanisme des cieux, ceci pour le plus grand bien de l'humanité.

A partir de 1696, NEWTON prit son office à la «*Monnaie*», ce qui lui laissa beaucoup moins de temps pour s'occuper de ses affaires scientifiques. De plus il déménagea à Londres et quitta Cambridge. En 1699, il prit la direction de la «*Monnaie*», et en 1703, il est élu président de la «*Royal Society*». Et c'est dans cette fonction qu'il eut de nouveau contact avec FLAMSTEED. Le 12 avril 1704, quelques mois après son élection comme président, NEWTON descendait à Greenwich en vue de s'informer de l'état des observations de FLAMSTEED. Quand il les eut vues, il demanda de les recommander à l'attention du PRINCE GEORGES, le mari de la REINE ANNE, afin d'obtenir de celui-ci un subside pour la publication des Tables. Déjà en 1703, FLAMSTEED s'était décidé à les publier à son propre compte, mais suite à l'offre de NEWTON, il envoya son manuscrit à la «*Royal Society*». Celle-ci nomma une commission, composée de NEWTON, WREN, GREGORY, ARBUTHNOT et quelques autres, qui devraient faire une sélection des écrits de FLAMSTEED. Le 23 janvier 1705, la commission expédia son rapport au PRINCE GEORGES et l'impression commença tout de suite après. Cette opération ne progressait que très lentement, car FLAMSTEED était souvent indisposé, vu ses maladies, mais il n'approuvait pas non plus la procédure employée qui tentait de rendre publics les résultats de son travail de plus de trente ans, ceci malgré sa réticence. En effet, FLAMSTEED était d'avis que ce serait à lui à prendre en charge les responsabilités liées à cette opération, tandis que la commission pensait qu'il n'avait qu'à fournir des résultats corrects sans s'immiscer dans les questions techniques des travaux d'impression. Ainsi le 13 juillet 1708, la commission prit la décision d'engager un autre correcteur vu que FLAMSTEED n'arrivait pas à faire ce travail en temps voulu. FLAMSTEED protesta mais n'obtint pas de réponse de la part de la commission. De plus le PRINCE GEORGES décéda en octobre 1708. NEWTON possédait entre-temps l'ensemble des observations de FLAMSTEED concernant l'orbite de la Lune, dont il avait promis de ne pas les publier sans l'accord de celui-ci. La question persiste si NEWTON a pris possession de ces résultats ou si FLAMSTEED les lui communiqua. Puisque FLAMSTEED n'était pas à même de fournir d'autres don-

nées, la commission décida d'employer les grands moyens et de réorganiser de fond en comble l'observatoire de Greenwich afin de donner à celui-ci le caractère d'un établissement public. Cette réorganisation culmina dans la prise de possession de l'observatoire par la «*Royal Society*» qui dorénavant proposait les campagnes d'observations à réaliser ainsi que l'achat d'instruments nouveaux. J. ARBUTHNOT, qui était médecin de métier, mais qui enseignait également les mathématiques, fut chargé en mars 1711 d'exiger les résultats de FLAMSTEED en ce qui concerne son catalogue des étoiles fixes afin de les mener à la publication. Puisque cette mesure ne menait à rien, FLAMSTEED fut convoqué en octobre 1711 dans le siège de la «*Royal Society*» afin de clarifier la situation. Cette rencontre mena à une querelle intense entre FLAMSTEED et NEWTON qui résulta en une séparation définitive des deux hommes. FLAMSTEED était persuadé qu'on l'avait volé d'autant plus que le nouveau responsable de la publication devenait E. HALLEY, son ennemi intime. FLAMSTEED mourut en décembre 1719 sans avoir publié lui-même ses observations. Il est difficile de distinguer entre l'animosité de plus en plus grande entre les deux antagonistes et le droit que possédait le public scientifique de pouvoir profiter des résultats obtenus dans un observatoire qui, en principe, était public. Il reste un fait qu'on a dérobé à FLAMSTEED une partie de sa propriété intellectuelle. L'épisode ne montre pas NEWTON sous son meilleur jour.

—IV—

LES TABLES, que NEWTON avait envoyées à FLAMSTEED avec sa lettre du 20 juillet 1694, [74] définissent numériquement le modèle cinétique horrockzien, auquel NEWTON s'est converti face à son impuissance de pouvoir construire une théorie purement gravitationnelle de la Lune. La trajectoire de celle-ci est considérée comme étant perturbée par l'attraction du Soleil, mais de façon qu'elle reste une ellipse keplérienne avec la Terre à un de ses foyers et ayant un diamètre de la ligne des apsides qui possède une longueur constante. Le centre de cette ligne se déplace sur un petit cercle autour du centre de l'ellipse avec la relation que l'angle formé par la direction vers l'apogée moyen et la direction reliant le centre de l'ellipse au centre de la ligne des apsides lunaires est le double de l'angle formé par la direction vers l'apogée moyen et la direction Terre-Soleil. NEWTON trouve la valeur $12^{\circ}10'25''$ comme le maximum de l'équation de l'apogée [145]. Il corrige cette valeur à plusieurs reprises et en tenant compte de l'inégalité de la variation ainsi que de l'équation annuelle avec une réduction sur le plan de l'écliptique, NEWTON atteint une exactitude entre les observations et ses calculs de l'ordre d'une erreur d'environ $10'$.

Avant la publication de son pamphlet : «*Theory of the Moon's Motion*» en 1702 [86], NEWTON avait rédigé plusieurs manuscrits sur la théorie de la Lune. Il y a d'abord un texte non daté, ayant comme titre «*Theoria Lunae*» [74] donnant en quelque sorte une introduction à la théorie lunaire et certainement

écrit après la publication de la première édition des «PRINCIPIA». HORROCKS et sa théorie sont au centre des réflexions de NEWTON. «*Tout comme KEPLER montra que les planètes décrivent des aires proportionnelles au temps par le rayon vecteur de la planète au Soleil situé dans le foyer de l'orbite, HORROCKS supposa que, aussi la Lune décrit par son rayon vecteur vers la Terre, située dans le foyer inférieur de son orbite elliptique des aires proportionnelles au temps. Mais l'excentricité de cette orbite est variable, contrairement à celles des planètes primaires, et augmente ou diminue en fonction de la position de l'apogée lunaire par rapport au Soleil.*» [74] NEWTON ajoute à ces considérations que l'application de sa théorie de la gravitation aux phénomènes célestes, permet, non seulement d'investiguer les causes de ces mouvements, mais aussi de calculer leur grandeur. «*Et nous avons donné plusieurs applications de notre théorie aussi pour le mouvement de la Lune.*» [74]

NEWTON passe alors en revue l'application de la théorie de la gravitation aux mouvements célestes. Il parle des inégalités de la Lune dues à l'attraction du Soleil, tout comme il l'avait indiqué au **Corollaire VI** de la fameuse PROPOSITION LXVI du LIVRE I des «PRINCIPIA». Cette force du Soleil provoque trois inégalités que NEWTON commente et chiffre dans son texte. Une autre inégalité provient de la position du grand diamètre de l'orbite lunaire par rapport au Soleil et qui atteint son maximum dans les quadratures et les syzygies. Quand la ligne des nœuds de l'orbite de la Lune passe par le Soleil, une cinquième inégalité apparaît, qui est maximale lorsque la ligne des nœuds est située dans les octants. NEWTON relève encore une sixième inégalité, résultant du fait que la ligne des nœuds de la trajectoire lunaire passe par le Soleil, ce qui est le cas quand elle est à angle droit de la ligne joignant la Terre au Soleil. NEWTON la désigne comme deuxième équation semestrielle qui atteint son maximum dans les octants et qui disparaît aux syzygies et aux quadratures. Dans les autres positions des nœuds de la Lune, cette inégalité est proportionnelle au sinus du double de la distance à la syzygie ou la quadrature la plus proche. NEWTON termine son texte en affirmant que l'action du Soleil est plus puissante dans les années qui voient l'apogée de la Lune et le périégée du Soleil en conjonction, que dans le cas où ils sont en opposition. Il déduit de cette situation deux équations périodiques, l'une pour le mouvement moyen de la Lune, l'autre pour le mouvement de son apogée. La somme de ces équations, quand leurs valeurs sont maximales, peut atteindre 19 ou 20 minutes.

Un deuxième manuscrit de NEWTON concernant les inégalités lunaires est daté du 27 février 1699/1700 [74]. Une copie de ce manuscrit a été faite par D. GREGORY et porte le titre : «*A Theory of the Moon*». Le texte fut repris dans le traité d'astronomie de ce dernier : «*Astronomiae Physicae & Geometricae Elementa*» [97] après avoir été traduit en latin.

Il reste une question ouverte : NEWTON a-t-il écrit ce texte d'abord en latin puis traduit en anglais, ou l'avait-t-il initialement rédigé en anglais [86]. Le texte a été repris quelques années plus tard en latin dans le livre de WHISTON : «*Praelectiones Astronomicae*» [146] et en 1726 dans la traduction anglaise du livre de GREGORY [97]. Il est à la base du livret de 1702 [147]. Il y a encore

deux autres manuscrits de NEWTON de la même époque. Le premier intitulé «*The Theory of the Sun & Moon*» [74] et non daté se rapporte au précédent, auquel il peut être comparé. En outre il est intéressant que NEWTON, dans ce texte fait référence à FLAMSTEED et à ses tables, ce qui ne fut pas le cas dans celui cité précédemment. Un mémorandum de NEWTON à la «*Royal Society*» est daté du 25 avril 1700 [74] et parle des éléments des mouvements du Soleil et de la Lune déterminés à partir de l'équinoxe vernal. NEWTON renvoie dans ce texte encore une fois à la théorie horrocksiennne quand il écrit : «*Car le mouvement moyen de la Lune n'est pas uniforme, mais il est soit retardé, soit accéléré car l'orbite lunaire est agrandie près du périhélie du Soleil et contractée à son apogée.*» [74]

Il n'y a eu pas moins de 16 éditions de trois versions différentes du texte de NEWTON de 1700. La première fut un livret : «*A New and most Accurate Theory of the Moon's Motion; Whereby all her Irregularities may be solved, and her Place truly calculated to Two Minutes*» [147] publié en 1702. Ni l'éditeur, ni l'auteur de la préface n'ont pu être identifiés quoique E. HALLEY pût en être soupçonné avec une forte probabilité. Une autre question est comment NEWTON a pu donner son accord pour la publication du livret de 1702 et pourquoi il permit à D. GREGORY d'inclure ce texte dans son livre d'astronomie. Les deux questions n'ont pas encore trouvé réponse. Avant d'entrer dans les détails du texte newtonien, une explication du mot «*théorie*» s'impose. En effet, l'expression «*théorie de la Lune*» fut utilisée au début du XVIII^e siècle pour désigner des règles ou des formules en vue de construire des diagrammes et des tables qui étaient censés représenter les mouvements célestes mais aussi les observations avec toute l'exactitude possible. Cet usage de l'expression «*théorie*» contraste avec celle qui désigne la cause d'un phénomène et qui est l'acceptation moderne du terme. NEWTON se référait aux deux significations de l'expression : un ensemble de règles pour calculer des tables de la Lune d'un côté, et la dérivation des inégalités à partir des principes fondamentaux de la gravitation de l'autre. La dernière signification fut illustrée par les «*PRINCIPIA*» tandis que la première forme le sujet du texte de 1702.

La préface : «*To the Reader*» parle d'abord des irrégularités de l'orbite de la Lune et l'auteur se plaint que celles-ci ont empêché jusqu'à présent l'utilisation de la Lune pour déterminer la longitude tant sur terre qu'en mer. L'explication est que le Soleil perturbe grandement le mouvement de la Lune, mais aussi des satellites des autres planètes, et fait qu'elles se meuvent quelquefois plus vite, quelquefois plus lentement, de façon que la figure de l'orbite change, tout comme l'inclinaison du plan de celle-ci par rapport à l'écliptique. Mais, poursuit l'auteur, le mouvement de la Lune est réduit maintenant à une règle et son lieu peut être calculé aujourd'hui : «*Ceci étant parfaitement nouveau et ce que les amateurs d'astronomie ont toujours espéré avoir, ils l'ont reçu maintenant de la main du Maître*» [147]. Voilà pourquoi, se justifie l'auteur, il fallait faire connaître ces résultats à un public plus large au lieu de le confiner dans sa version latine au seul livre d'astronomie de D. GREGORY. Finalement il invite ses compatriotes à s'engager dans le calcul des éphémérides pendant leur temps

libre en vue d'accroître les connaissances des cieux. Si le style du texte de la préface fait penser à HALLEY, des doutes subsistent suivant J. B. COHEN [86] qui fonde son argumentation aussi sur les autres éditions de ce texte ainsi que sur les différences linguistiques entre ceux-ci. Ceci reste donc une question ouverte pour les spécialistes, et nous nous tournons maintenant vers le contenu du texte newtonien, mais aussi vers les implications de ce texte avec les deuxième et troisième éditions des «PRINCIPIA».

Le résultat révolutionnaire de la première édition des «PRINCIPIA» fut la démonstration par NEWTON que le mouvement de la Lune peut être, au moins partiellement, déduit d'un système de causes physiques fondées sur la loi de la gravitation universelle. Et depuis 1686, la théorie de la Lune devint une partie centrale de la dynamique céleste basée à la fois sur la gravitation et les forces perturbatrices du Soleil. L'analyse gravitationnelle, non seulement permit la détermination de la valeur maximale et de la période de certaines inégalités déjà connues, mais aussi la découverte de certaines autres, inconnues jusqu'alors, et déductibles seulement par la théorie. Dans la théorie du mouvement de la Lune de 1702, mais aussi dans les éditions des «PRINCIPIA» de 1713, respectivement de 1726, les deux sortes d'inégalités sont présentées.

Dans la première édition des «PRINCIPIA», NEWTON commença son analyse par le problème des deux corps où la Terre et la Lune s'attirent mutuellement suivant la loi de la gravitation. NEWTON montre que les deux corps se meuvent sur une orbite autour de leur centre de gravité commun. Il introduit alors la force attractive du Soleil qui agit différemment sur les deux corps en fonction de leurs distances respectives au Soleil et à l'orientation du rayon vecteur reliant les deux. NEWTON se rend aussi compte que les autres planètes exercent des perturbations dans les orbites de la Terre et de la Lune. Mais tout en ayant une vision d'ensemble du problème et de sa solution, NEWTON ne parvenait jamais à produire celle-ci. Nous savons aujourd'hui qu'une solution analytique du problème des trois corps n'existe pas. Aux temps newtoniens, l'intérêt porté à la théorie de la Lune était à son apogée en vue de son application pratique à la navigation, un point qui va encore nous occuper par la suite. Déjà la préface de la «*Théorie du mouvement de la Lune*» en parlait et, en 1714, le Parlement anglais fonda un prix à décerner à celui qui allait donner une méthode fiable pour trouver la longitude en mer. Les astronomes préconisaient la méthode dite des distances lunaires, méthode basée sur la connaissance des distances angulaires géocentriques par rapport à un ensemble d'étoiles fixes, respectivement les planètes ou le Soleil.

Or aussi bien NEWTON que HALLEY savaient que la théorie de la Lune donnée dans la première édition des «PRINCIPIA» n'était pas adéquate pour permettre le calcul de tables utilisables pour la navigation et tous les deux ressentaient cette situation comme étant très peu satisfaisante.

Ce fait explique peut être, que dans le livret de 1702, aucune référence n'est faite aux fondations théoriques de la mécanique céleste newtonienne. Il en est de même pour le livre d'astronomie de D. GREGORY, qui, comme nous l'avons vu, a le premier publié le texte de NEWTON en latin.

NEWTON, dans son texte, suppose acquises les quatre inégalités primaires connues depuis longtemps, à savoir l'équation du centre, l'évection, la variation et l'équation annuelle, que NEWTON, tout comme KEPLER assimile à l'équation du centre. Il publie de nouvelles inégalités qui sont :

- une équation du mouvement moyen de la Lune dépendant de la situation de son apogée par rapport au Soleil. Le maximum est atteint quand celle-ci est dans un octant par rapport au Soleil. Quand le Soleil est dans son périégée, celui-ci est de $3'56''$, quand le Soleil est dans son apogée, il ne dépasse pas $3'34''$;
- une équation du mouvement de la Lune qui dépend de l'aspect des nœuds de l'orbite lunaire par rapport au Soleil. Sa valeur maximale ne dépasse pas $47''$;
- une sixième équation du lieu de la Lune dépendant du sinus de la somme des distances de la Lune, du Soleil et de l'apogée de celui-ci, de l'apogée lunaire. La valeur maximale en est $2'10''$;
- une septième équation dépendant de la distance angulaire entre la Lune et le Soleil. Cette équation est augmentée ou diminuée en fonction de la position de l'apogée lunaire par rapport à celle du Soleil. Elle varie entre les valeurs de $3'14''$ et $1'26''$.

La sixième équation, suivant WHISTON [146], n'est guère déductible de la théorie newtonienne de la gravitation, mais elle a plutôt son origine dans les observations de FLAMSTEED que dans l'argumentation de NEWTON. Celui-ci changea d'argumentation d'ailleurs dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» de 1713, comme nous allons encore le voir dans la suite. Le livret de 1702 se termine avec un paragraphe qui dit : *«Ceci est la théorie de ce mathématicien incomparable. Et si nous avions beaucoup de lieux de la Lune, observés avec exactitude spécialement autour des quadratures, pour le comparer aux mêmes temps avec les places calculées suivant la théorie exposée, il apparaîtrait alors si d'autres équations sensibles demeurent et dont les évaluations élargiraient encore la Théorie.»* [97]

Rappelons que dans les «PRINCIPIA», la théorie de la Lune a été introduite en deux endroits différents et NEWTON ne consolida jamais sa recherche dans un seul essai bien structuré. Dans le LIVRE I, on trouve la théorie du problème des trois corps dans la fameuse PROPOSITION LXVI avec ses 22 corollaires. Dans cette proposition, NEWTON a cerné au plus près et à l'aide de sa méthode géométrique, le problème des trois corps, bien que son approche soit limitée par l'hypothèse que deux corps plus petits se meuvent autour d'un corps plus grand. A partir de la deuxième édition des «PRINCIPIA» de 1713, NEWTON suggérait, par la désignation des abréviations : *P* nommant la planète secondaire, *T* désignant la Terre qui est perturbée par le Soleil *S*, qu'il traitait bien la théorie de la Lune, ce qui explique aussi les proportions adoptées pour les masses des trois corps. Dans le même LIVRE I, il faut encore noter la PROPOSITION XLV dans la section 9 qui traite du mouvement d'un corps dans une orbite mobile. Ici NEWTON parle explicitement de la Lune en concluant que celle-ci se meut deux fois plus vite que ses calculs l'indiquent. Il souligne cette

affirmation dans la troisième édition des «PRINCIPIA» de 1726, tandis que dans les deux premières éditions, il se passe de tout commentaire. Ce fait témoigne de son désarroi perdurant jusqu'à la fin de sa vie.

Les résultats purement théoriques obtenus dans le LIVRE I sont appliqués à la réalité dans le LIVRE III dans lequel onze propositions traitent du mouvement de la Lune. Ces propositions ont été étendues grandement dans les éditions de 1713, respectivement de 1726. Dès la deuxième édition, NEWTON y inséra un scholie à la suite de la PROPOSITION XXXV, qui résume ses recherches sur la théorie de la Lune et donne les équations exposées dans sa «*Theory of the Moon's Motion*». Il y dit expressément qu'il a «*voulu montrer par ses calculs des mouvements de la Lune qu'on pouvait les déduire de la théorie de la gravité*» [1]. La même prétention est soulevée dans l'essai «*Theoria Lunae*» [74] dont certaines parties du texte rappellent celui du scholie.

Dans celui-ci, NEWTON explique que c'est en utilisant la théorie de la gravitation qu'il a trouvé : «*que l'équation annuelle du mouvement moyen de la Lune vient de la différente dilatation de l'orbe de la Lune par la force du Soleil, selon le **Corollaire** VI de la PROPOSITION LXVI du LIVRE I*» [1]. Il parle alors des nœuds et de l'apogée de la Lune et constate que : «*la Lune se meut plus lentement dans l'orbe dilaté, et plus vite dans l'orbe contracté ...*» [1] Il en résulte des équations annuelles de ces mouvements qui sont proportionnelles à l'équation du centre.

Le troisième paragraphe du scholie reprend presque textuellement le texte de «*the Theory of the Moon's Motion*» de 1702 et donne la première des nouvelles équations indiquées plus haut mais avec une justification nouvelle : «*Par la théorie de la gravité, il est certain que l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus forte lorsque le diamètre transversal de l'orbe de la Lune passe par le Soleil, que lorsque le même diamètre est perpendiculaire à la ligne qui joint le Soleil et la Terre : et par conséquent, l'orbe de la Lune est un peu plus grand dans le premier cas que dans le dernier. De là, on tire une autre équation du mouvement moyen de la Lune qui dépend de la situation de l'apogée de la Lune par rapport au Soleil ...*» [1]

Le paragraphe suivant du scholie a pour objet la deuxième des nouvelles équations citées par NEWTON dans le texte de 1702. Mais, tout comme pour introduire la première équation, NEWTON fait, ici aussi, une référence à la théorie de la gravitation quand il écrit sans explication détaillée : «*Par la même théorie de la gravité, l'action du Soleil sur la Lune est un peu plus grande, lorsque la ligne droite menée par les nœuds de la Lune passe par le Soleil, que lorsque cette ligne coupe à angles droits la ligne qui joint la Terre et le Soleil. Ce qui donne une autre équation du mouvement moyen de la Lune que j'appellerai semi-annuelle. ...*» [1]. Mais NEWTON poursuit, tout en ayant déclaré que la valeur maximale de cette inégalité est de 47'', que dans les octants où elle est précisément maximale, elle atteint cette valeur, «*ce que j'ai déduit de la théorie de la gravitation*». Si la distance entre la Terre et le Soleil est différente de la distance médiane et si la position du Soleil est à son périégée, cette inégalité peut même atteindre 49'' et son apogée est à environ 45''.

Les paragraphes suivants du scholie sont distincts de la présentation adoptée dans le texte de 1702. Ainsi le troisième est en contradiction directe avec le texte antérieur et corrige les règles newtoniennes établies antérieurement et publiées dans le livre de GREGORY. Dans les dix années séparant le «*Theory of the Moon's motion*» et la deuxième édition des «PRINCIPIA», il y avait bien les remarques, plus ou moins acerbes, de FLAMSTEED. En effet, celui-ci remarqua que NEWTON avait transformé le sens de sa septième équation tellement qu'à la fin il la détruisit. Ce fait montre que non seulement le développement de la théorie de la Lune par NEWTON a subi maintes modifications entre 1686 et 1712, mais qu'aussi les déductions à partir de la loi de la gravitation universelle étaient sujettes à des explications changeantes à plusieurs reprises. Ainsi, le sens de la septième inégalité dans le texte de 1702 fut modifié lors de la réduction du scholie, quand NEWTON s'apercevait qu'elle ne pouvait être concordante avec les observations de FLAMSTEED.

Le scholie commente encore les mouvements de l'apogée de la Lune et NEWTON dit que la théorie de la gravité permet d'expliquer la vitesse maximale de ce mouvement lorsqu'il est en opposition ou en conjonction avec le Soleil tandis qu'il rétrograde le plus lorsqu'il est en quadrature. NEWTON poursuit : «*Dans le premier cas, l'excentricité est la plus grande, et dans le second, elle est la moindre, par les **Corollaires** VII, VIII et IX de la PROPOSITION LXVI du LIVRE I, et ses inégalités, par ces mêmes corollaires, sont les plus grandes et produisent l'équation principale de l'apogée que j'appelle semestre ...* » [1]. Et, tout comme dans son texte : «*Theoria Lunae*» [74], NEWTON se réfère à HORROCKS quand il continue : «*Horroxius, notre compatriote est le premier qui ait assuré que la Lune faisait sa révolution dans une ellipse autour de la Terre qui est placée dans son foyer inférieur. HALLEY a mis le centre de cette ellipse dans un épicycle dont le centre tourne uniformément autour de la Terre. Et de ce mouvement dans l'épicycle naissent les inégalités dans la progression et la régression de l'apogée, dont on a parlé, ainsi que la quantité de l'excentricité.*» [1] Le texte du scholie donne ensuite les explications numériques et géométriques de la théorie horrocksiennne et NEWTON conclut en donnant une prépondérance à l'observation par rapport aux résultats obtenus par sa théorie de la gravitation quand il écrit : «*Au reste, la théorie de la Lune doit être examinée et établie par les Phénomènes, premièrement dans les syzygies, ensuite dans les quadratures, et enfin dans les octants ...* » [1]

En analysant à la fois le texte de 1702 et le scholie introduit dans la deuxième édition des «PRINCIPIA» de 1712, on remarque l'abandon successif de la théorie mathématique de la gravitation au profit du modèle cinématique basé sur les idées de HORROCKS qui fut au premier plan lors de la rédaction des «*règles*» formant la base de la «*Theory of the Moon's motion*». Mais il y a hésitation chez NEWTON qui fait surface avec la rédaction du scholie où l'on trouve maints rappels de la théorie de la gravitation sans que pour autant il en donne la moindre explication quantitative.

–V–

LA TROISIÈME ÉDITION des «PRINCIPIA» parut en 1726 et contient la version finale de la théorie de la Lune de NEWTON. Dans un chapitre précédent, nous avons présenté l'approche newtonienne donnée en ce qui concerne la partie théorique dans le LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» avant d'expliquer les applications pratiques dans le LIVRE III. En effet, NEWTON n'est jamais parvenu à donner une vue d'ensemble de sa théorie dans un texte cohérent. Mais les outils développés dans le LIVRE PREMIER restaient insuffisants parce qu'ils ne permettaient pas des prédictions quantitatives du mouvement de la Lune. Rappelons que l'approche adoptée dans la section IX du LIVRE PREMIER donna une valeur complètement erronée du mouvement de la ligne des apsides de la Lune. En effet, cette approche fut basée sur la supposition qu'il était légitime d'ignorer la composante perpendiculaire de la force perturbatrice du Soleil. NEWTON a dû sûrement réaliser qu'une nouvelle version de sa méthode pour traiter les perturbations était nécessaire et il la donna dans les PROPOSITIONS XXV à XXXV du LIVRE III. Nous allons présenter maintenant la théorie newtonienne telle qu'elle est exposée dans la troisième édition dans les détails.

Or avant d'exposer les principes de sa nouvelle théorie, NEWTON expose dans la PROPOSITION XXII **Théorème XVIII** sa conviction intime concernant le pouvoir explicatif de sa théorie de la gravitation : «*Tous les mouvements de la Lune, et toutes ses inégalités sont une suite et se tirent des principes qu'on a posés ci-dessus.*» [1] NEWTON explique : «*Pendant que les grandes planètes sont portées autour du Soleil, elles peuvent emporter dans leur révolution d'autres planètes plus petites, qui tournent autour d'elles dans des ellipses dont le foyer est placé dans le centre des grandes planètes. Les mouvements de ces petites planètes doivent être troublés de plusieurs façons par l'action du Soleil qui doit causer des inégalités dans leur mouvement telles qu'on en remarque dans notre Lune...* » [1] NEWTON énumère alors ces inégalités que nous donnons dans une notation moderne [121] avec les désignations suivantes :

$$\begin{aligned} m &= N/n \\ r_1 &= 1 - x \\ r_0 &= 1 + x \end{aligned}$$

Ici N , n représentent respectivement le moyen mouvement du Soleil et de la Lune et r_1 , r_0 désignent le rayon de l'ellipse aux syzygies et aux quadratures.

- La vitesse le long de l'orbite lunaire varie suivant les positions de la Lune $V_1 > V_0$:

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{1+x}{1-x} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{m^2}{1-m} \right) \quad (2.94)$$

Cette relation ressort du **Corollaire** III de la PROPOSITION III qui dit que la vitesse de la Lune est plus grande aux syzygies que dans les quadratures.

- La constante des aires est différente dans les syzygies et les quadratures ($\langle \rangle$ désigne la moyenne) :

$$\begin{aligned} h_1 &= \langle h \rangle \left(1 + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \right) \\ h_0 &= \langle h \rangle \left(1 - \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \right) \end{aligned} \quad (2.95)$$

d'après le **Corollaire** II de la PROPOSITION LXI du LIVRE PREMIER.

- La courbure de l'orbite de la Lune n'est pas constante $\rho_1 > \rho_0$:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \simeq 1 + 3m^2 \left(1 + \frac{1}{1-m} \right) \quad (2.96)$$

d'après le **Corollaire** IV de la PROPOSITION LXVI.

- L'ovale de l'orbite varie dans les proportions :

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{69}{70} \quad (2.97)$$

toujours d'après le même **Corollaire** IV.

- L'excentricité passe de sa plus grande valeur lorsque l'apogée de la Lune est dans les syzygies, à sa plus petite lorsque l'apogée est dans les quadratures ; ceci d'après le **Corollaire** IX de la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER.

$$\begin{aligned} (e - e_0)_1 &= 2m^2 \cos \gamma \\ (e - e_0)_0 &= -3m^2 \sin \gamma \end{aligned} \quad (2.98)$$

e_0 est une valeur constante et γ désigne l'angle que le vecteur de LENTZ forme avec la direction du Soleil.

- La ligne des apsides avance plus vite dans ses syzygies et rétrograde plus lentement dans ses quadratures, et l'excès du mouvement progressif sur la rétrogradation se fait pour l'année entière, en conséquence. Ces mouvements sont des conséquences des corollaires **Corollaires** VII et VIII de la PROPOSITION LXVI. Les formules s'écrivent :

$$\begin{aligned} e \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_0 &= +m^2 n \frac{r}{a} (1 - e^2)^{1/2} \cos \phi \\ e \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_1 &= -2m^2 n \frac{r}{a} (1 - e^2)^{1/2} \cos \phi \end{aligned} \quad (2.99)$$

avec $\langle \rangle$ désignant la moyenne)

$$\langle \omega \rangle = \frac{3}{4} m^2 \sqrt{1 - e^2} n t \quad (2.100)$$

ϕ est l'angle formé par le rayon vecteur de la Lune et le vecteur de LENTZ.

- La ligne des nœuds rétrograde. Elle est en repos dans les syzygies et rétrograde très vite dans les quadratures suivant le **Corollaire II** de la PROPOSITION LXVI.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_1 &= -3m^2 n \sin \nu \\ \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.101)$$

avec ν la direction vers le nœud ascendant.

- La latitude de la Lune est plus grande dans ses quadratures que dans ses syzygies ; et le moyen mouvement est plus lent dans le périhélie de la Terre que dans son aphélie. Ces résultats ressortent des **Corollaires X** et VI de la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER. Les formules pour ces inégalités deviennent :

$$i - i_0 = \frac{3}{8} m^2 \sin i \left(\cos 2\nu + \frac{1}{m} \cos 2U - \frac{1}{1-m} \cos 2\psi \right) \quad (2.102)$$

$$n = \left(\frac{u}{a^3} \right)^{1/2} \left[1 - \frac{1}{4} m^2 r^3 (1 + 3 \cos 2\psi) \right] \quad (2.103)$$

avec i l'angle de la latitude sur le plan de l'écliptique, U l'ange de la ligne des nœuds et la direction vers le Soleil et ψ l'angle entre la direction du Soleil et le rayon vecteur de la Lune.

NEWTON conclut que, à côté des inégalités énumérées, il en existe d'autres «qui n'avaient pas été observées par les premiers Astronomes, et qui troublent tellement les mouvements lunaires, que jusqu'à présent, on n'avait pu les réduire à aucune règle certaine.» [1] Il en cite quelques-unes et insiste particulièrement sur la variation qu'il traitera plus loin dans les détails.

NEWTON n'était tout vraisemblablement pas en possession des formules décrivant les inégalités discutées par lui à l'aide des conséquences tirées de sa fameuse PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER. Néanmoins des doutes subsistent vu la pertinence des résultats trouvés [121, 148].

La théorie de la Lune proprement dite débute avec la PROPOSITION XXV Problème VI : «Trouver les forces du Soleil pour troubler les mouvements de la Lune.» [1] NEWTON représente la force attractive du Soleil vers la Terre par une droite qui les joint, et décompose l'action du Soleil sur la Lune, dans le mouvement relatif ce celle-ci, en deux composantes : l'une suivant la direction

du rayon vecteur de la Lune, l'autre étant la force centripète de la Terre sur la Lune. NEWTON a déjà utilisé la même décomposition des forces en jeu dans la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA», mais il donne ici le calcul qui mesure les quantités de ces forces. Ainsi la partie de la force du Soleil qui pousse la Lune vers la Terre est dans le rapport des carrés des temps périodiques, ou comme 1 : 178, 725, ce qui donne à NEWTON son rapport à la gravité qui agit à la surface de la Terre, et qu'il estime être 1 à 60x60, le demi-diamètre de l'orbite de la Lune étant égal à 60 demi-diamètres de la Terre. L'autre force, dirigée parallèlement à la ligne joignant le Soleil et la Terre, a une grandeur qui est le triple de la différence des distances de la Terre et de la Lune au Soleil. Dans les syzygies, cette deuxième force est triple de la première ; ainsi son rapport est à la force principale comme 1 : 59, 57 et la force solaire qui se compose alors de la différence des deux, est le double de la première [117].

Dans la PROPOSITION XXVI Problème VII : «*Trouver l'incrément horaire de l'aire que la Lune décrit autour de la Terre, en supposant que son orbite soit circulaire.*» [1] NEWTON, après avoir rappelé que les aires que la Lune décrit autour de la Terre sont proportionnelles au temps lorsqu'on néglige l'altération que l'action du Soleil cause dans les mouvements lunaires, il se propose de calculer les inégalités résultantes de l'action du Soleil dans le cas d'admettre une orbite circulaire de la Lune. La solution newtonienne repose encore une fois sur la fameuse PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER avec la seule différence qu'il admet le Soleil placé à une distance infinie de la Terre, et qu'une distinction entre les mois anomalistique et synodique est introduite. Il introduit alors les valeurs numériques :

$$m^2 = (0.0748025)^2 \simeq 1000/178718 \quad (2.104)$$

ce qui donne :

$$\frac{3}{2}m^2 \simeq 100/11915 \quad (2.105)$$

NEWTON détermine alors le rapport entre les constantes des aires aux syzygies et aux quadratures par la formule :

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{1 + \frac{3}{4}m^2}{1 - \frac{3}{4}m^2} = \frac{11965}{11865} \quad (2.106)$$

parce que :

$$\begin{aligned} m_{synodique} &= m_{anomalistique} \frac{29.531}{27.322} \\ &= 1.08085 m_{anomalistique} \end{aligned} \quad (2.107)$$

Finalement, NEWTON trouve la relation :

$$\frac{1}{2}dh = -\frac{1}{219.46} \langle nr^2 \rangle \sin 2\psi m_{synodique} dt \quad (2.108)$$

La PROPOSITION XXVII Problème VIII : «*Par le mouvement horaire de la Lune, trouver quelle est sa distance de la Terre*» [1] applique la relation que l'aire est égale au produit du mouvement horaire par le carré du rayon. Le rayon est donc égal à la racine carrée du quotient de l'aire par le mouvement horaire. NEWTON propose aux astronomes de tirer de cette formule le diamètre apparent de la Lune pour voir comme elle s'accorde avec les observations.

Dans la PROPOSITION XXVIII Problème IX, NEWTON se propose de «*Trouver les diamètres de l'orbe dans lequel la Lune devrait se mouvoir en supposant qu'elle n'eut point d'excentricité.*» [1] Il part d'une orbite qui serait circulaire si l'on faisait abstraction de la force perturbatrice du Soleil. Comme la courbure de la trajectoire, dans le cas où le corps est soumis à une force perpendiculaire à la direction de celle-ci, est en raison directe de l'attraction et en raison inverse du carré de la vitesse, NEWTON calcule cette courbure dans les quadratures et les syzygies et cherche ensuite leur rapport. Il pose la formule :

$$r = 1 - x \cos 2\psi \quad (2.109)$$

comme équation de la trajectoire déformée de l'orbite lunaire initialement circulaire parce que non perturbée. NEWTON dérive alors pour x l'expression

$$x = m^2 \left(1 + \frac{19}{6}m \right) \quad (2.110)$$

qui est correcte jusqu'à $O(m^3)$.

Comme $m = 0.074803$ dans le cas du système Terre–Lune, devient 0.007202 et le rapport des distances de la Lune à la Terre, dans les syzygies est à sa distance dans les quadratures :

$$\frac{1-x}{1+x} \simeq \frac{69}{70} \quad (2.111)$$

pourvu que l'on fasse abstraction de l'excentricité.

La PROPOSITION XXIX Problème X traite de la variation de la Lune. La découverte de cette inégalité est due à Tycho BRAHE et elle provient, soit de la forme elliptique de son orbite, soit de l'inégalité des aires décrites par son rayon vecteur. Parmi toutes les inégalités de la Lune connues au temps de NEWTON, il n'a développé que celle-ci et la méthode qu'il a suivie paraît à LAPLACE une des choses les plus remarquables des «PRINCIPIA» [126]. Celui-ci a donné la forme analytique suivante de la théorie newtonienne. En faisant abstraction de l'excentricité propre et de l'inclinaison de l'orbite de la Lune, et en désignant par ν et ν' les longitudes géocentriques de la Lune et du Soleil ou à :

$$\nu' = m\nu \quad (2.112)$$

avec $m = n'/n$ le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune. Le rayon r de l'orbite de la Lune est pris comme unité. La traduction des considérations géométriques de NEWTON en des expressions analytiques donne comme composante perpendiculaire de la force motrice au rayon vecteur :

$$T = 3m^2 \sin(m-1)\nu \cos(m-1)\nu \quad (2.113)$$

tandis que la force motrice selon le rayon r est :

$$S = m^2[3\cos^2(m-1)\nu - 1] \quad (2.114)$$

La force centripète totale s'obtient en retranchant la force S de l'attraction k/r^2 de la Terre sur la Lune :

$$F = \frac{k}{r^2}[1 + m^2 - 3m^2 \cos^2(m-1)\nu] \quad (2.115)$$

La variation de la vitesse normale du rayon vecteur devient alors :

$$\frac{d(r \frac{d\nu}{dt})}{dt} = T \quad (2.116)$$

ou bien en insérant 2.113 dans 2.116 :

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\nu}{dt} \right) = \frac{3}{2} m^2 r \sin 2(m-1)\nu \quad (2.117)$$

en prenant comme unité de distance la valeur moyenne de r et en supposant la force centripète moyenne égale à 1. Il y a donc :

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \frac{3}{2} m^2 \int \sin 2(m-1)\nu d\nu \quad (2.118)$$

Une intégration de 2.118 donne :

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = h + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \cos 2(m-1)\nu \quad (2.119)$$

La constante h étant très voisine de 1, tout comme r et $d\nu/dt$, on obtient :

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = h \left[1 + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \cos 2(m-1)\nu \right] \quad (2.120)$$

Si l'on remplace r par :

$$r = 1 + x \cos 2(m-1)\nu \quad (2.121)$$

l'équation 2.120 devient finalement :

$$\frac{d\nu}{dt} = h \left[1 + \left(2x + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m} \right) \cos(m-1)\nu \right] \quad (2.122)$$

respectivement en intégrant :

$$\nu = ht + \frac{2x + \frac{3}{4} \frac{m^2}{1-m}}{2(1-m)} \sin 2(1-m)\nu + cte \quad (2.123)$$

L'expression 2.123 démontre que l'orbite perturbée de la Lune ne décrit pas des aires égales en des temps égaux, avec la conséquence qu'il y a des gains et des pertes en longitude. L'inégalité résultante est la variation, et le terme périodique en 2.123 représente cette inégalité. Mais afin de pouvoir donner une valeur numérique à ce terme, il faut connaître x et m . La deuxième constante m peut être trouvée par l'observation car elle représente le rapport du moyen mouvement du Soleil à celui de la Lune et les astronomes donnent la valeur de 0,0748.

Pour déterminer x , NEWTON considère l'orbite lunaire comme une ellipse mobile dont la Terre occupe le centre et dont le périégée suit le Soleil de manière que le petit axe de l'ellipse corresponde toujours à la syzygie, c'est-à-dire que $\nu' - \nu = \pm 90^\circ$ et le grand axe à la quadrature, c'est-à-dire $\nu' - \nu \pm 90^\circ$. Cette hypothèse s'avère être exacte, même si NEWTON ne la démontre pas, comme LAPLACE le relève avec raison. L'équation de l'orbite est alors ($a^2 < b^2$) :

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2(\nu' - \nu)}{b^2} + \frac{\cos^2(\nu' - \nu)}{a^2} \quad (2.124)$$

ou en développant en série :

$$r = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cos 2(\nu' - \nu) \right] \quad (2.125)$$

En remarquant que la valeur moyenne de r a été prise comme unité et que l'on doit avoir $r = 1 - x$ dans les syzygies et $r = 1 + x$ dans les quadratures, ce qui fait revenir à l'équation 2.121. Tout comme dans la PROPOSITION XXVIII Problème X, NEWTON détermine la valeur pour x et trouve :

$$x = \frac{3}{2} m^2 \frac{1 + \frac{1}{1-m}}{4(1 - m^2) - 1} \quad (2.126)$$

La PROPOSITION XXX Problème XI est consacrée à la recherche du mouvement horaire des nœuds de la Lune : NEWTON demande de «*Trouver le mouvement horaire des nœuds de la Lune dans un orbe circulaire.*» [1]

Déjà dans la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER, NEWTON avait dit que la variation d'un angle Ω d'une orbite initialement circulaire, due aux forces perturbatrices du Soleil, est donnée par la formule :

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3m^2 n \sin \nu \sin U \cos \psi \quad (2.127)$$

avec ν l'angle entre la direction du nœud de l'orbite lunaire et celle de la Lune, U l'angle entre la direction du nœud de l'orbite lunaire et celle du Soleil et ψ l'angle entre la direction du Soleil et celle de la Lune.

Dans la présente proposition, NEWTON fait encore une fois le développement de la formule 2.127 tout en indiquant les valeurs numériques des constantes et arrive à un mouvement horaire des nœuds de :

$$d\Omega = -33.1768'' \cos \psi \sin \nu \sin U \quad (2.128)$$

Il termine par la constatation : «*Et toutes les fois que le signe d'un de ces angles passera du positif au négatif, et du négatif au positif, le mouvement des nœuds se changera de régressif en progressif et de progressif en régressif. D'où il arrive que les nœuds avancent toutes les fois que la Lune est entre une des quadratures et le nœud le plus proche de la quadrature. Dans les autres cas, les nœuds rétrogradent, et en vertu de l'excès du mouvement rétrograde sur le mouvement progressif, les nœuds seront portés chaque mois en antécédence.*» [1] NEWTON fait suivre sa proposition de deux corollaires. Le premier transforme le produit des fonctions trigonométriques en une proportion entre des éléments géométriques de l'orbite lunaire. Le deuxième montre que dans une position quelconque donnée des nœuds, le mouvement horaire médiocre est la moitié du mouvement horaire dans les syzygies de la Lune, c'est-à-dire que ce mouvement est de $16''35'''16^{IV}$.

Dans la PROPOSITION XXXI Problème XII, NEWTON applique son résultat trouvé précédemment à une orbite elliptique et il procède par une procédure itérative. Il trouve que la variation de l'angle horaire est égale à :

$$\frac{d\Omega}{dt} = -3N^2 \frac{r^2}{h} \sin \nu \sin U \cos \psi \quad (2.129)$$

À la différence de la formule 2.127, ni r , ni h ne sont des constantes ; on a posé $N = mn$. NEWTON conclut que le mouvement moyen horaire des nœuds dans l'ellipse est à ce mouvement dans le cercle, comme l'ellipse est au cercle, ou comme 69 : 70, ce qui donne $-16,284''$ par heure pour le maximum du mouvement cherché. NEWTON modifie encore cette valeur par des considérations sur les vitesses dans les syzygies et les octants pour trouver finalement ce maximum égal à $16''16'''37^{IV}$.

Dans la PROPOSITION XXXII Problème XIII, NEWTON évalue le mouvement moyen annuel des nœuds : «*Trouver le mouvement moyen des nœuds de la Lune.*» [1] En prenant la somme des mouvements moyens horaires, ou en multipliant la valeur de $16^{II}16^{III}37^{IV}$, trouvée dans la proposition précédente, par 365 jours, 6 heures et 9 minutes, valeur de l'année sidérale, et en divisant par deux, il obtient ainsi $19^\circ 49' 3''$ pour l'orbite elliptique décrite autour du centre. NEWTON dit alors : «*Cela serait ainsi dans la supposition que le nœud fut remis à chaque heure à son premier lieu, et que le Soleil au bout d'une année retournât au même nœud d'où il était parti au commencement. Mais comme le mouvement du nœud est cause que le Soleil y revient plus tôt, il faut compter de combien le temps de ce retour est abrégé.*» [1]

Si donc, le Soleil de son lieu assigné U dans le courant d'une année se meut de 360° et le nœud pendant ce temps se déplacerait de $2R \sin 2U$, valeur qui se dégage de 2.127, si cette formule est écrite pour les syzygies, le mouvement moyen pour une variation dU de U devient :

$$-\frac{2R \sin^2 U}{360^\circ + 2R \sin^2 U} dU = -\frac{Q \sin^2 U}{1 + Q \sin^2 U} dU \quad (2.130)$$

où

$$Q = R/180 \quad (2.131)$$

Voilà pourquoi le coefficient de régression moyen, en tenant compte de la course annuelle du Soleil, devient :

$$\bar{Q} \int_0^{\pi/2} \frac{Q \sin^2 U}{1 + Q \sin^2 U} dU \quad (2.132)$$

La solution de cette intégrale donne :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \pi \left[1 - \frac{1}{\sqrt{Q+1}} \right] \quad (2.133)$$

Pour $R = 19^\circ 49' 3''$ avec $Q = 0.11014$, on obtient :

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \pi (1 - 0.949094) = 0.07996 \quad (2.134)$$

NEWTON n'a pas suivi la méthode analytique exposée en [121] et il obtient par la méthode des séries :

$$\bar{Q} = 60/793 = 0.0756 \quad (2.135)$$

Le Soleil, pendant l'année sidérale, est transporté de la valeur

$$R(1 - \bar{Q}) = 18^\circ 14' 15'' \quad (2.136)$$

et le coefficient de régression moyen devient :

$$-\frac{36018^\circ 14' 15''}{360 - 18^\circ 14' 15''} = -19^\circ 12' 50'' \quad (2.137)$$

La valeur trouvée en 2.137 doit être comparée avec la valeur newtonienne de $19^\circ 18' 1''$ dérivée à l'aide de 2.135. NEWTON observe que la différence entre ce résultat et celui que donnent les observations est plus petite que la trois-centième partie du mouvement total, et qu'elle paraît venir de l'excentricité et de l'inclinaison de l'orbite lunaire. La première accélère trop le mouvement des nœuds, tandis que la seconde tend à son tour à le retarder un peu, et à le ramener à sa vitesse véritable.

Dans la PROPOSITION XXXIII Problème XIV, que NEWTON formule : «*Trouver le mouvement vrai des nœuds de la Lune*» [1], il se heurte à une trop grande difficulté de calcul, en relation avec la faible convergence de la série qu'il emploie et se borne à donner, sans démonstration, une construction géométrique de ce problème, et s'en sort pour trouver l'angle qu'il faut ajouter ou

retrancher du mouvement moyen, suivant que les nœuds passent des quadratures aux syzygies ou des syzygies aux quadratures, pour avoir le mouvement vrai des nœuds.

Dans le **Corollaire** XI de la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER, qui traite de la variation de la direction du nœud ascendant, NEWTON était parvenu à montrer que le mouvement des nœuds peut être décrit par :

$$\Omega = -\frac{3}{4}m^2nt + \frac{3}{8}m \sin 2U \quad (2.138)$$

pourvu qu'on se tienne aux termes dominants. Le premier donne la partie séculaire de la régression et le second représente une variation semi-annuelle avec l'amplitude :

$$\frac{3}{8}m = 1.6072^\circ \quad (2.139)$$

Pour six mois synodiques, cette amplitude devient $1^\circ 29' 20''$ et 2.138 doit être complétée par un facteur :

$$\Omega = \left(-\frac{3}{4}m^2nt + \frac{3}{8}m \sin 2U\right)\left(1 - \frac{1}{2}q\right) \quad (2.140)$$

ce facteur tenant compte de l'ellipticité de la trajectoire.

Après quelques calculs, NEWTON détermine le coefficient de régression séculaire égal à $16'' 26''' 10^{IV}$ par heure tandis qu'il trouve pour l'amplitude de la variation semi-annuelle une valeur de $1^\circ 30'$ légèrement différente de celle obtenue par le calcul.

Après cette proposition, NEWTON insère maintenant sous forme d'un scholie la méthode de J. MACHIN, professeur d'astronomie pour la détermination du mouvement des nœuds. Elle est condensée en deux propositions et un scholie.

Dans sa propre PROPOSITION XXXIV Problème XV, NEWTON cherche maintenant la variation horaire de l'inclinaison de l'orbite lunaire au plan de l'écliptique. Dans le cas d'une orbite circulaire, elle est exprimée par le mouvement des nœuds multiplié par le sinus de l'inclinaison. Si l'orbite est elliptique, il faut encore multiplier l'expression précédente par le rapport du petit axe au grand axe. Les quatre corollaires accompagnant la proposition détaillent ce résultat. Ainsi dans le **Corollaire** IV, NEWTON parvient à une autre expression quand les nœuds sont dans les quadratures, à savoir $33' 10''$, valeur qui représente la valeur maximale pour l'angle horaire des nœuds, à multiplier par le produit des sinus de l'inclinaison et de la double distance de la Lune aux quadratures, divisé par le diamètre de l'orbite. L'inclinaison est donc soumise, dans le temps du passage de la Lune de la quadrature à la syzygie, à une variation totale de $2' 43''$, produite par la somme des angles horaires multipliée par le sinus de l'inclinaison, et par rapport du diamètre à la circonférence.

La dernière proposition de la théorie lunaire newtonienne, PROPOSITION XXXV Problème XVI demande de «*Trouver pour un temps donné l'inclinaison de l'orbe de la Lune au plan de l'écliptique.*» [1] NEWTON donne la réponse

sous forme d'une construction géométrique. Il trouve $16'23.5''$ pour la variation totale de l'inclinaison la plus grande, en faisant abstraction de la position qu'occupe la Lune dans son orbite. Si les nœuds sont dans les syzygies, l'inclinaison n'est point changée par les positions diverses de la Lune ; mais s'ils sont dans les quadratures, il faut diminuer de $1'21.5''$ la variation totale moyenne quand la Lune est dans les quadratures, et l'augmenter de la même quantité quand elle est dans les syzygies [117].

NEWTON termine sa théorie de la Lune par un scholie, dont la rhétorique cherche à créer l'impression que toutes les inégalités lunaires étaient déductives, ou même déduites déjà à travers sa théorie de la gravitation. «*J'ai voulu montrer par ces calculs des mouvements de la Lune qu'on pouvait les déduire de la théorie de la gravité.*» [1] Puis NEWTON devient plus concret ; il annonce avoir trouvé plusieurs autres équations, sans pour autant exposer les méthodes par lesquelles il y est arrivé. Il dit ainsi avoir reconnu : «*... que l'équation annuelle du mouvement moyen de la Lune vient de la différente dilatation de l'orbe de la Lune par la force du Soleil.*» [1] NEWTON, pour prouver cette assertion se réfère simplement à sa fameuse PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER concernant le problème des trois corps, et plus précisément au **Corollaire VI**. D'après ce corollaire, la période perturbée de l'orbite de la Lune devient [121] :

$$P = 2\pi \left(\frac{a_{moon}}{\mu} \right)^{3/2} \left[1 + \frac{1}{4} m^2 \left(\frac{a_{sol}}{R_{sol}} \right)^3 (1 + 3 \cos 2\psi) \right] \quad (2.141)$$

Dans cette formule, pour une orbite lunaire circulaire, a_{moon} et a_{sol} dénotent les grands axes de l'orbite de la Lune et de la Terre. m étant le rapport N/n ou N est égal à $\sqrt{GM_{sol}/R^3}$, c'est-à-dire le mouvement moyen du Soleil par rapport à la Terre. Le rapport n est le mouvement moyen de la Lune autour de la Terre, ψ est l'angle entre les positions du Soleil et de la Lune et R_{sol} la distance du Soleil à la Terre.

En admettant d'abord que l'orbite de la Terre autour du Soleil est, elle aussi, circulaire et en faisant la moyenne sur ψ , on obtient pour la période moyenne $\bar{P}$ lunaire :

$$\bar{P} = P_{moon} \left(1 + \frac{1}{4} m^2 \right) \quad (2.142)$$

Dans cette formule, P_{moon} désigne la période non perturbée de la Lune. La perturbation dans 2.142 est due aux forces exercées par le Soleil et elle a comme expression :

$$\Delta \bar{P} = \frac{1}{4} P_{moon} m^2 \quad (2.143)$$

En insérant des valeurs numériques dans 2.143, on obtient $\Delta \bar{P} = 0.9914$ heures, valeur qui correspond assez bien à celle donnée par les tables astronomiques. En retournant à l'équation 2.141, on trouve que la variation de la

distance Terre–Soleil, R_{sol} , provoque un changement trimestriel dans la période moyenne de la Lune. En effet :

$$\frac{a_{sol}}{R_{sol}} = 1 + e_{sol} \cos \phi \quad (2.144)$$

ou ϕ est l'angle entre le vecteur de LENTZ et le rayon vecteur de la Lune. En se limitant au premier ordre, 2.141 devient alors :

$$P = P_{moon} \left[1 + \frac{1}{4} m^2 (1 + 3e_{sol} \cos \phi) (1 + 3 \cos 2\psi) \right] \quad (2.145)$$

ou bien, en prenant la moyenne sur ψ :

$$\bar{P} = P_{moon} \left[1 + \frac{1}{4} m^2 (1 + 3e_{sol} \cos \phi) \right] \quad (2.146)$$

La perturbation de la période lunaire devient alors :

$$\bar{P}_\phi = -\frac{3}{4} P_{moon} m^2 e_{moon} \sin \phi \quad (2.147)$$

Parce que la période orbitale de la Terre est :

$$P_{sol} = P_{moon}/m \quad (2.148)$$

l'équation annuelle de la Lune devient égale à

$$-3me_{sol} \sin \phi \quad (2.149)$$

NEWTON indique pour cette expression la valeur :

$$-11'49'' \sin \phi \quad (2.150)$$

tandis qu'aujourd'hui on donne :

$$-13'1'' \sin \phi \quad (2.151)$$

NEWTON fait encore mention de deux équations annuelles du mouvement des nœuds et de l'apogée, provenant de ce que leur mouvement est plus rapide dans le périhélie de la Terre qu'à son aphélie, en raison inverse du cube de la distance de la Terre au Soleil. Pour la première il donne 9'24'' et pour la seconde 19'43''. La deuxième équation est additive et la première soustractive lorsque la Terre va de son périhélie à son aphélie : c'est le contraire lorsque la Terre se trouve dans la partie opposée de son orbite.

La théorie de la gravité donne encore deux autres inégalités pour le moyen mouvement de la Lune : « *L'apogée de la Lune avant le plus lorsqu'il est en opposition ou en conjonction avec le Soleil, et il rétrograde le plus lorsqu'il est en quadrature avec le Soleil. Dans le premier cas, l'excentricité est la plus grande, et dans le second elle est la moindre, par les **Corollaires** VII, VIII et IX de la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER, et ses inégalités, par ces*

mêmes corollaires sont les plus grandes, et produisent l'équation principale de l'apogée que j'appelle semestre.» [1] NEWTON, qui exprime par cette déduction le phénomène de l'évection, connu, comme nous l'avons vu, par HIPPARQUE, se borne à le déduire des observations uniquement. Et c'est alors qu'il revient sur la construction purement cinématique d'HORROCKS et de HALLEY, que nous avons déjà examinée plus en avant, et qui consistait à placer le centre de l'ellipse lunaire sur un épicycle dont le rayon était le sinus de l'équation principale de $12^{\circ}18'$. La distance de son centre à la Terre exprime l'excentricité moyenne de la Lune de 0.055. En prenant sur ce cercle un arc égal ou double de l'argument annuel, ou de la distance entre le Soleil et l'apogée de la Lune, l'angle formé par les lignes menées du centre de la Terre à l'extrémité de cet arc et à la Lune représentait l'équation de l'apogée, et le premier de ces côtés, l'excentricité actuelle de l'orbite lunaire. Mais NEWTON suppose en plus que la Lune tourne sur un autre petit cercle dont le centre se meut sur l'épicycle, afin d'exprimer que le centre de l'orbite lunaire se meut plus vite au périhélie de la Terre qu'à l'aphélie et cela dans le rapport inverse du cube de la distance de la Terre au Soleil [117].

NEWTON, à la fin du scholie, souligne encore une fois que : «*Au reste la théorie de la Lune doit être examinée et établie par les phénomènes, premièrement dans les syzygies, ensuite dans les quadratures, et enfin dans les octants ...* » [1] Il ne peut donc pas s'imaginer une théorie de la Lune sans une confrontation permanente avec la réalité observationnelle. NEWTON constate que «*... on n'a pas encore le moyen mouvement de la Lune et de son apogée assez exactement.*» [1]

Cette remarque met à nu le plus grand problème de la théorie newtonienne de la Lune qu'il effleure à peine dans le **Corollaire II** de la PROPOSITION XLV du LIVRE PREMIER. Il se borne à y constater, comme conclusion à ses calculs, que l'avance de la ligne des apsides de la Lune a une vitesse double à celle calculée. Le problème ne trouve pas de solution avec la théorie newtonienne et il restera entier pour ses successeurs sur le continent.

-VI-

NEWTON fut le premier à indiquer la véritable cause des inégalités de la Lune déjà connues, et guidé par sa théorie de la gravitation, à y ajouter six équations nouvelles, qui n'auraient pu que difficilement être découvertes par la seule observation, vu leur petitesse. La théorie de la Lune de NEWTON est une des applications les plus avancées de son hypothèse gravitationnelle, et cela grâce à un mélange d'intuition physique combinée avec des outils à la fois géométriques et analytiques. NEWTON simplifia les modèles qu'il introduisit à l'extrême, sans se soucier souvent d'une démonstration rigoureuse de ses hypothèses de départ. Néanmoins ses méthodes sont concises et s'enchaînent dans l'ordre le plus naturel, en allant du simple au composé. Le plus souvent,

NEWTON commence à chercher la valeur du maximum de l'effet instantané de chaque inégalité dans le cas le plus simple ; il montre ensuite d'après quelle loi ou quel rapport elle varie ; il la suit alors dans toutes les circonstances diverses qui se présentent. Le prochain pas est alors de les embrasser toutes à la fois afin de parvenir à une valeur moyenne annuelle tout en tenant compte d'autres causes susceptibles à modifier le phénomène sur une période. Les Tables que HALLEY, FLAMSTEED, CASSINI et d'autres construisirent d'après les données de NEWTON, surpassaient toutes les précédentes en exactitude.

Néanmoins, ni le LIVRE III, ni la théorie de la Lune de NEWTON ne firent l'unanimité des philosophes et des astronomes lors de sa première publication en 1687. Les réactions allaient de l'enthousiasme le plus naïf au scepticisme le plus profond. Les conceptions physiques de NEWTON, sa méthodologie et les observations astronomiques qu'il utilisa dans le texte furent soigneusement analysées. Par contre les méthodes mathématiques utilisées par NEWTON attireraient beaucoup moins l'attention du monde scientifique, et ce ne fut que dans les années 30 du XVIII^e siècle que ces méthodes furent analysées par des mathématiciens compétents qui jusque là s'étaient concentrés sur les deux premiers livres contenant la majeure partie des acquis newtoniens. Les mathématiques contenues dans le LIVRE III sont beaucoup plus difficiles. Voulant atteindre à tout prix des résultats applicables à l'astronomie, à la géodésie et au phénomène des marées, NEWTON négligea les démonstrations qui très souvent ne sont que des esquisses. Même Jean BERNOULLI, un des plus grands mathématiciens du XVIII^e siècle avoua son incapacité à comprendre certaines parties du LIVRE III dans sa correspondance avec MAUPERTUIS [149] en 1731.

Si les références dans le LIVRE III à la théorie de la gravitation sont multiples et créent une parfaite concordance avec les deux premiers livres, NEWTON est pourtant obligé de développer de nouveaux outils, particulièrement en relation avec la théorie de la Lune. En effet, ceux mis au point dans le LIVRE PREMIER s'avéraient insuffisants, puisqu'ils étaient incapables de donner ne serait-ce qu'une description qualitative de l'orbite de la Lune. En particulier, la théorie développée dans la neuvième section du LIVRE PREMIER : «*Du mouvement des corps dans des orbes mobiles, et du mouvement des apsides*» [1] ne permettait pas de prédire avec précision le mouvement exact de la ligne des apsides. En fait, l'approche newtonienne était basée sur l'hypothèse qu'on pouvait négliger la composante transversale de la force perturbatrice exercée par le Soleil et NEWTON a dû se rendre compte que sa méthode des perturbations devrait être complétée. Probablement s'apercevait-t-il que sa méthode géométrique avait atteint ses limites et il prit en considération certaines techniques analytiques [150]. Ses manuscrits, préservés dans la «*Portsmouth Collection*» en témoignent, même s'ils révèlent en même temps l'absence de toute réflexion sur le degré d'approximation dans les calculs. Il y a même force de constater que cette notion même n'y joue pas un rôle.

En résumé le contenu du LIVRE III laissa perplexes ses lecteurs jusque dans les années 1730. En effet, ses hypothèses restaient questionnables, ses démonstrations restaient obscures. Ce n'est qu'après cette date que les mathématiciens

commencèrent à travailler sur les problèmes plus avancés concernant la gravitation que NEWTON avait attaquée en pionnier. Cette nouvelle approche fut rendue possible par le développement de l'analyse mathématique telle que LEIBNIZ l'avait conçue et qui incluait la différentiation et l'intégration des fonctions trigonométriques, la mise au point de la théorie des fonctions à plusieurs variables ainsi que des équations différentielles partielles et du calcul des variations.

Après NEWTON, le flambeau du développement des méthodes de la mécanique céleste était passé au continent et ici les savants s'en prenaient d'abord aux déficiences de sa théorie de la Lune. Ainsi CLAIRAUT, dans son mémoire lu le 15 novembre 1747 à l'Académie des Sciences et intitulé : «*Du Système du Monde dans les principes de la gravitation universelle*» [151], reproche à NEWTON de supposer quelquefois des choses plus difficiles que celles qu'il explique. Et ce reproche devient alors concret : «*Je ne parle point ici de l'art avec lequel il avait caché sa méthode des fluxions, la clef de toutes ses savantes recherches, parce que cette méthode, après la lui avoir arraché, est devenue si familière, qu'on a oublié tout le tort qu'il avait eu de ne pas la communiquer.*» [151] D'ALEMBERT, lui aussi critiqua NEWTON. Il constate d'abord que la variation, le mouvement annuel des nœuds et la variation de l'inclinaison de la Lune sont déterminés par des calculs faits avec beaucoup de clarté et de précision. Puis il accuse NEWTON de supposer sans démonstration aucune que l'orbite de la Lune est à peu près une ellipse dont il néglige même l'excentricité. D'ALEMBERT soulève aussi quelques doutes sur la rigueur des suppositions dont il s'est servi dans les propositions qu'il n'a pas démontrées, et il termine en louant le grand homme envers lequel la philosophie naturelle a tant d'obligations que même ses échecs ne le diminuent point.

Après la publication des «PRINCIPIA», la méthode géométrique de NEWTON ne fut plus guère utilisée et les mathématiciens continentaux réduisaient la mathématisation de la nature aux méthodes de résolution d'équations différentielles. L'intensité de la réflexion se fixait exclusivement sur l'invention de nouvelles techniques d'intégration et les élèves de LEIBNIZ voyaient dans le LIVRE III des «PRINCIPIA» un livre d'exercices de problèmes à résoudre par leur analyse. La mathématisation de la nature se réduisait dorénavant au traitement mathématique de la gravitation universelle. La compréhension des effets causés par la force gravitationnelle, la prédiction des mouvements dans le problème des trois corps et la détermination des inégalités de la Lune devenaient autant de validations de la gravitation universelle.

C'est durant tout le XVIII^e siècle que des hommes comme CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE et LAPLACE s'y employèrent aussi bien par le perfectionnement de l'analyse mathématique que par l'invention de méthodes plus sophistiquées dans la mécanique céleste.

Chapitre 3

L'introduction de la loi de la gravitation sur le continent

PIERRE LOUIS MOREAU DE MAUPERTUIS fut incontestablement le premier à introduire la physique newtonienne sur le continent et, comme il le remarque, à «*présenter à ses compatriotes une découverte faite par d'autres depuis cinquante ans.*» [152] L'adhésion de MAUPERTUIS au newtonianisme date du temps d'une visite qu'il fit en Angleterre en 1728. Sa «*profession de foi*», le «*Discours sur les différentes figures des Astres : où l'on essaye d'expliquer les principaux phénomènes du Ciel*», fut imprimée pour la première fois à Paris en 1732. Le paragraphe 2 de ce discours : la «*Discussion métaphysique sur l'attraction*» veut expliquer précisément la partie la plus obscure de la théorie newtonienne : le concept de l'attraction à distance. «*C'est une justice qu'on doit rendre à NEWTON, faisait remarquer MAUPERTUIS [153, 154] : il n'a jamais regardé l'attraction comme une explication de la pesanteur des corps les uns vers les autres : il a souvent averti qu'il n'employait ce terme que pour désigner un fait et non point une cause ; qu'il ne l'employait que pour éviter les systèmes et les explications ; qu'il se pouvait même que cette tendance fut causée par quelque matière subtile qui sortirait des corps et fut l'effet d'une véritable impulsion ; mais que quoi que se fût, c'était toujours un premier fait dont on pouvait partir pour expliquer les autres faits qui en dépendent.*»

Si NEWTON se refusait à prendre position sur la nature intime du concept de base de sa physique, tel ne fut plus le cas pour Roger COTES, qui dans sa préface à la deuxième édition des «*PRINCIPIA*» fit de la gravitation une propriété essentielle de la matière. Puisque NEWTON fit lui-même la révision du texte de la deuxième édition de 1714, on peut admettre que COTES exprima assez exactement les vues de NEWTON en cette date. «*Il faut, disait-il [1], que la pesanteur soit une des propriétés primitives de tous les corps, ou que l'on*

cesse de regarder comme telle leur étendue, leur mobilité, leur impénétrabilité : il faut que l'on puisse expliquer exactement les phénomènes de la nature par la loi de la pesanteur, ou que l'on renonce à en donner une explication raisonnable en faisant usage de l'étendue, de la mobilité et de l'impénétrabilité des corps. Je ne doute pas, qu'on ne désapprouve cette conclusion et qu'on ne me reproche de ramener les qualités occultes. On ne cesse de nous objecter que la gravité est une qualité de cette espèce, et qu'on doit bannir absolument de la philosophie toutes les explications fondées sur de pareilles causes : mais nous pouvons répondre que l'on ne doit pas appeler occultes des qualités dont l'existence est évidemment démontrée par l'expérience ; mais celles-là seulement qui n'en ont qu'une imaginaire, et qui ne sont prouvées en aucune manière. Ceux qui ont réellement recours aux qualités occultes sont ceux qui, pour expliquer les mouvements de la nature ont imaginé des tourbillons d'une matière qu'ils forgent à plaisir, et qui ne tombe sous aucun sens.»

Ici les cartésiens sont clairement visés et COTES ne fait que continuer les attaques contre DESCARTES sur le terrain philosophique que NEWTON avait commencées dans les «PRINCIPIA» avec des considérations physiques basées sur la mécanique céleste.

L'explication tourbillonnaire du monde et par là même l'œuvre scientifique de DESCARTES dans son entièreté, fut détruite par NEWTON déjà dans la première édition des «PRINCIPIA» de 1687 et l'on peut voir dans le LIVRE II de l'œuvre maîtresse de NEWTON une réfutation de l'intégralité de la physique cartésienne.

Ainsi la PROPOSITION LII [1] du livre second établit que *«si une sphère solide tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe donné de position dans un fluide homogène et infini, que le fluide soit mu circulairement par cette seule impulsion, et que chaque partie de ce fluide continue uniformément dans son mouvement ; les temps périodiques des parties du fluide seront comme les carrés de leur distance au centre de la sphère»* NEWTON tire les conséquences de son théorème en comparant son résultat aux lois de KEPLER : *«Il est certain par les observations que les temps périodiques des planètes qui tournent autour de Jupiter sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de cette planète ; et la même règle a lieu pour les planètes qui tournent autour du Soleil ... Or si les planètes qui tournent autour de Jupiter et du Soleil étaient transportées par des tourbillons, ces tourbillons devraient aussi observer la même loi en tournant. Mais les temps périodiques des particules des tourbillons sont en raison doublée de leurs distances au centre du mouvement : et cette raison ne peut être diminuée et devenir la raison sesquiplée, à moins que la matière du tourbillon ne soit d'autant plus fluide, qu'elle s'éloigne plus du centre, ou que la résistance, causée par le défaut de lubricité de parties du fluide n'augmente, par l'augmentation de la vitesse avec laquelle les parties du fluide sont séparées les unes des autres, dans une plus grande raison que celle dans laquelle cette vitesse elle-même augmente.»*

Cette objection montrait l'incompatibilité de la deuxième loi de KEPLER avec le concept des tourbillons, pièce maîtresse de la physique cartésienne.

NEWTON, en démontrant dans la proposition suivante L III [1] du LIVRE II que *«les corps qui sont emportés par des tourbillons et dont les orbites rentrent en elles-mêmes, sont de même densité que ces tourbillons, et se meuvent selon la même loi que leurs parties, quant à la vitesse et à la direction»*, trouve un nouvel argument contre les tourbillons et il affirme : *«Il est donc certain que les planètes ne sont point transportées par des tourbillons de matière. Car les planètes qui tournent autour du Soleil, selon l'hypothèse de COPERNIC, font leurs révolutions dans des ellipses qui ont le Soleil dans un de leurs foyers, et elles parcourent des aires proportionnelles au temps. Mais les parties d'un tourbillon ne peuvent se mouvoir ainsi.»* Pour le montrer, NEWTON imaginait un modèle constitué de trois corps tournant autour du Soleil, le plus extérieur de ces corps se trouvant sur un cercle concentrique à celui-ci, les deux intérieurs tournant sur des ellipses ayant leurs apsides concordantes. Le corps extérieur se meut d'un mouvement uniforme tandis que les deux autres suivent les lois astronomiques et se meuvent plus lentement dans l'aphélie respectivement plus vite dans le périhélie. Cependant il devrait en être autrement suivant les lois de la mécanique tourbillonnaire. En effet, l'espace laissé entre l'aphélie de l'orbe le plus intérieur et le point correspondant de l'orbe extérieur concentrique au Soleil étant plus étroit que l'espace laissé entre le périhélie du même orbe intérieur et le point correspondant de l'orbe extérieur, la matière du tourbillon circulant sur l'orbe intermédiaire devrait se mouvoir plus vite dans l'espace plus étroit et le corps devrait avoir une vitesse plus grande dans l'aphélie que dans le périhélie. *«Car plus l'espace par lequel une même quantité de matière passe dans le même temps est étroit, et plus elle doit avoir de vitesse.»*

NEWTON insiste sur l'incompatibilité des tourbillons et de l'observation astronomique pour conclure : *«Ainsi l'hypothèse des tourbillons répugne à tous les phénomènes astronomiques, et paraît plus propre à les troubler qu'à les expliquer.»*

Le scholie général du LIVRE III des «PRINCIPIA» complète les objections de NEWTON [1]. Au début de celui-ci il répète encore une fois ses objections ; parlant d'abord des planètes il dit : *«Afin que les temps périodiques des planètes soient en raison sesquiplée de leurs distances au Soleil, il faudrait que les temps périodiques des parties de leurs tourbillons fussent en raison sesquiplée de leurs distances à cet astre.»* La deuxième de KEPLER prescrit de son côté que : *«Afin que chaque planète puisse décrire autour du Soleil des aires proportionnelles au temps, il faudrait que les temps périodiques des parties de leur tourbillon fussent en raison doublée de leurs distances au Soleil.»* Il y a donc une impossibilité logique d'accorder ensemble simultanément ces deux lois dans l'hypothèse des tourbillons pour laquelle NEWTON avait établi la loi du mouvement au LIVRE II des «PRINCIPIA». NEWTON voyait encore une autre difficulté dans l'hypothèse des tourbillons en faisant état des perturbations réciproques de ceux-ci et de la nécessité d'accorder entre eux les mouvements, spécialement ceux du tourbillon solaire avec ceux des tourbillons planétaires. Enfin les comètes fournissent à NEWTON deux autres objections. D'abord : *«les comètes ont des mouvements fort réguliers, elles suivent dans leurs révolutions*

les mêmes lois que les planètes ; et leur cours ne peut s'expliquer par des tourbillons. Car les comètes sont transportées par des mouvements très excentriques dans toutes les parties du ciel, ce qui ne peut s'exécuter si on ne renonce aux tourbillons.»

Ensuite si l'on considère que : *«par cette espèce de mouvement les comètes traversent très vite et très facilement les orbes des planètes, on se trouve amené à conclure que ces orbes ne peuvent être parcourus par des tourbillons qui, dans l'hypothèse de leur existence, apporteraient des résistances inconciliables avec les phénomènes. Voilà pourquoi NEWTON estime que les espaces célestes doivent nécessairement être vides vu que les planètes et les comètes ne sont pas assujetties à aucune diminution sensible de leur mouvement.»*

A la vue des objections newtoniennes, les cartésiens adoptèrent une attitude de réserve d'abord, qui se mua en opposition farouche ensuite. C'est surtout le concept de l'attraction universelle qu'ils se refusaient à admettre sans pour autant négliger la réflexion sur la mécanique newtonienne. Ainsi CONDORCET fait remarquer que *«l'ancienne Académie s'est fort occupée, dans ses premières années, de la cause de la pesanteur, ce qui semble prouver que beaucoup de savants soutenaient le système de DESCARTES et que très peu y croyaient.»* [155]. Les théories tourbillonnaires cartésiennes étaient devenues plutôt une attitude ayant ses racines en partie dans le nationalisme français et l'antagonisme entre la France et l'Angleterre au XVII^e siècle et non pas dans une vraie réflexion philosophique sur l'attraction.

Aussi MAUPERTUIS [152] fait remarquer : qu'*«il a fallu plus d'un demi-siècle pour apprivoiser les Académies du continent avec l'attraction. Celle-ci demeurait renfermée dans son île ; ou si elle passait la mer, elle ne paraissait que la reproduction d'un monstre qui venait d'être proscrit : on s'applaudissait tant d'avoir banni de la philosophie les qualités occultes, on avait tant de peur qu'elles revinssent, que tout ce qu'on croyait avoir avec elles la moindre ressemblance effrayait ; on était si charmé d'avoir introduit dans l'explication de la Nature une apparence de mécanisme, qu'on rejetait sans l'écouter le mécanisme véritable qui venait s'offrir.»*

Malgré l'optimisme affiché d'un MAUPERTUIS, l'introduction des théories newtoniennes et surtout l'idée de la gravitation universelle se fit à petits pas. Si les newtoniens ne se sentaient pas assez sûrs d'engager un débat de face avec les cartésiens, ceux-ci furent quand même harcelés par les premiers et ils durent de plus en plus souvent compliquer la théorie des tourbillons par des adjonctions ou des transformations d'hypothèses de base. Malgré ces modifications multiples, les réponses aux questions posées par la mécanique et surtout la mécanique céleste, étaient loin d'être toujours convaincantes. Un autre aveu d'impuissance fut qu'il n'était guère possible d'intégrer ces réponses dans un système déductif unique. De cette atmosphère de défiance ne pouvait profiter que le newtonianisme. *«En d'autres termes, plus les cartésiens se débattaient, plus leurs réponses fragmentaires, en s'écroulant, enlevaient au système entier de sa solidité imposante, et plus apparaissait manifeste son insuffisance.»* [154]

Une possibilité de trancher dans le débat entre newtoniens et cartésiens

s'offrit d'abord avec la solution expérimentale du problème de la figure de la Terre. En effet NEWTON, tout comme HUYGENS étaient persuadés que la Terre devrait être aplatie aux pôles. Le premier imputait cet aplatissement d'un côté aux forces centrales, de l'autre à la dynamique de la solution tandis que HUYGENS avait fait du concept de la force centrifuge la pièce maîtresse de sa dynamique. L'Académie Royale des Sciences qui avait entrepris dès 1667 un vaste programme de travaux géodésiques et astronomiques en vue de dresser des cartes topographiques plus exactes de la France, se rendit compte qu'une vérification décisive du newtonianisme ou du cartésianisme pourrait être faite par le biais de ces travaux. Profondément cartésienne, l'Académie de Paris se rallia d'autant plus volontiers à ce projet parce qu'un de leurs membres, à savoir CASSINI II, semblait avoir montré que ses mesures du méridien de Paris confirmaient les prédictions cartésiennes de la forme d'un ellipsoïde allongé pour la Terre.

Telle était la situation lorsqu'en 1732 MAUPERTUIS publia son «*Discours sur les différentes figures des astres*» [153] qui fut, comme nous l'avons vu, le premier ouvrage sur le continent consacré à la diffusion de la théorie de la gravitation. MAUPERTUIS réussit à rassembler à la thèse newtonienne de jeunes astronomes et mécaniciens tel qu'Alexis Claude CLAIRAUT. Dès lors l'équipe des protagonistes de la théorie newtonienne était en place à l'Académie. Et en 1734, les cartésiens et les newtoniens de l'Académie s'entendirent pour proposer cette vérification exemplaire d'une des deux théories par la mesure d'un arc de méridien proche de l'équateur et ils obtinrent l'approbation du Ministre MAUREPAS ainsi que celle de Louis XV pour ce projet. L'idée était de comparer le résultat obtenu avec celui de PICARD, respectivement de J.D. CASSINI et Ph. DE LA HIRE, lors du mesurage du méridien de Paris. Mais certains, dont MAUPERTUIS, pensaient que cette vérification serait encore plus significative si l'on disposait de la mesure d'un troisième arc de méridien, proche celui-là, du pôle nord. Les deux expéditions, l'une au Pérou, l'autre en Laponie se firent. Celle de Laponie de 1736 à 1738 réussit à mesurer un arc de méridien de 57' et elle eut le plus grand retentissement, non seulement auprès des hommes de sciences mais aussi auprès du grand public. Une fois les résultats connus, la théorie des partisans de l'allongement s'effondrait et le doute était jeté sur les travaux de CASSINI et de PICARD. La mission en Amérique rencontrait beaucoup plus de difficultés que celle vers le Nord. Partie de France en mai 1735, elle mettait plus d'une année pour arriver en place à Quito. L'expédition se proposait de mesurer un arc géodésique de 3° depuis le nord de Quito jusqu'à la ville de Cuença. Après des tribulations extrêmes, les observations furent terminées en 1743 et une partie des membres de l'expédition regagnait la France. En 1744, soit 7 ans après la publication des résultats de l'expédition en Laponie, BOUGUER, un des membres de la mission au Pérou dans son compte rendu à l'Académie des Sciences déduisait un aplatissement terrestre de 1/179 tandis que MAUPERTUIS avait donné la valeur 1/178 qui confirmait admirablement le résultat de BOUGUER.

Ces résultats géodésiques, tout en s'écartant légèrement des mesures pen-

dulaires exécutées par les deux expéditions confirmaient de façon univoque la théorie de NEWTON [156]. Celui-ci avait estimé l'aplatissement de la Terre par des considérations théoriques d'abord en s'interrogeant sur la variation de l'attraction universelle lorsqu'on passe sur la Terre du pôle à l'équateur, la Terre étant assimilée à un ellipsoïde de révolution. D'un autre côté NEWTON s'intéressa à la diminution relative du poids unitaire à l'équateur par rapport à ce que serait sa valeur si la Terre ne tournait pas. Le pendule à secondes constituait le moyen de contrôle pour NEWTON dans toutes ses réflexions théoriques qu'il a décrites au LIVRE III des «PRINCIPIA». Pour les deux approches NEWTON détermina le rapport d'aplatissement à $1/229$ respectivement à $1/289$.

C'est A.C. CLAIRAUT qui dans son ouvrage de la figure de la Terre [157] résume les résultats des expéditions et des considérations newtoniennes quand il écrit : «... Mais la comparaison de la théorie avec les observations achèvera peut-être de décider en faveur d'un système qui a déjà tant d'apparence d'être vrai, je veux dire de M. NEWTON. Car l'attraction étant supposée, je démontre que, toutes les hypothèses les plus vraisemblables qu'on puisse faire sur la densité des parties internes de la Terre, il y a toujours une telle liaison entre la fraction qui exprime la différence des axes et celle qui exprime la diminution de la pesanteur du pôle à l'Equateur que si l'une de ces deux fractions surpasse $1/230$, l'autre doit être moindre et précisément de la même quantité ; or comme toutes les expériences que l'on a faites sur la longueur du pendule nous montrent que la diminution de la pesanteur du pôle à l'Equateur est plus grande que $1/230$, on doit conclure que la différence des axes est moindre.»

Si ces conclusions de CLAIRAUT semblaient être sans appel en faveur du concept newtonien, il n'en fut pas ainsi de l'attitude de certains savants qui accueillirent l'annonce des résultats géodésiques avec défiance, voire avec hostilité. MAUPERTUIS rend compte lui-même de toute une série de tiraillements qui eurent lieu à Paris après le retour de l'expédition : «Nous trouvâmes donc en arrivant, de grandes contradictions : Paris, dont les habitants ne sauraient sur rien demeurer dans l'indifférence, se divisa en deux parties, les uns prirent le nôtre, les autres crurent qu'il y allait de l'honneur de la nation à ne pas laisser donner à la Terre une figure étrangère, une figure qui avait été imaginée par un Anglais et un Hollandais (il s'agit de HUYGENS !). On chercha à répandre des doutes sur notre mesure : nous la soutînmes peut-être avec un peu trop d'ardeur ; nous attaquâmes à notre tour les mesures qu'on avait faites en France ; les disputes s'élevèrent, et des disputes naquirent bientôt des injustices et des inimitiés.» [158] MAUPERTUIS contribua largement à ces «inimitiés» en faisant paraître un ouvrage anonyme : «Examen désintéressé des différents ouvrages qui ont été faits pour déterminer la figure de la Terre» [158] dans lequel il attaqua les CASSINI et leurs partisans avec une ironie soutenue. Il récidiva peu après avec la «Lettre d'un horloger anglais à un astronome de Pékin traduite par M...». MAUPERTUIS continuait à attaquer dans ce pamphlet CASSINI de Thury quand il écrit : «Si je trouve ce que j'avance ici, M. CASSINI et M. DE MAIRON ne soutiendront plus comme ils ont toujours fait que les pendules ne servent de rien sur la question de la figure de la Terre. M. CASSINI lut le 27

avril 1740 à 4 heures après-midi, un écrit dans lequel il prouva que la Terre est aplatie (il avait en effet entrepris cette année là une vérification de la mesure de la méridienne de Paris, qui l'avait amené à des rectifications dans le rapport des longueurs des degrés, et par conséquent à une modification des conclusions antérieures); d'où il suit que lui, son père et son grand-père, se sont trompés dans six mesures qu'ils ont faites depuis 1700 jusqu'en 1736 ... ». Dans ses attaques contre les CASSINI, MAUPERTUIS allait même à supposer que les erreurs initiales dans les mesurages antérieurs dans lesquels la famille CASSINI était impliquée avaient pu être maintenus, en quelque sorte de parti pris et par esprit de solidarité familiale mais aussi par crainte de devoir abandonner tous les résultats obtenus : « Vous pouvez croire, que MM. CASSINI ne souscrivirent pas à l'opération du pôle; ils firent jouer contre elle tous les ressorts qu'un grand intérêt, la réputation et le crédit peuvent faire agir; ils firent voir que, si l'autorité ne peut pas absolument détruire les vérités géométriques, elle peut du moins les balancer, et leur porter de grandes atteintes; peu s'en fallut qu'on ne prît M. de MAUPERTUIS (il ne faut pas oublier que c'est l'horloger anglais qui écrit!) et ses compagnons pour des imbéciles.» [158]. MAUPERTUIS continuait : « On croit que, s'ils avaient tenu ferme, et qu'ils ne se fussent pas laissés effrayer, ils avaient assez de bons amis à la Cour et à l'Académie pour faire maintenir la Terre dans son allongement, quelque démonstration qui fût venue du Pôle ou du Pérou; et tous les cafés étaient pleins de gens qui auraient soutenu la Terre allongée comme un concombre, s'il l'avait fallu.»

Sans doute pour pallier aux controverses sur la question de la figure de la Terre, MAUPERTUIS avait fait dans son : « *Discours sur la figure des astres* » de 1732, en pressentant quelque peu les polémiques à venir, d'autres applications fort ingénieuses de l'attraction à des phénomènes inexplicables par les astronomes d'alors. MAUPERTUIS était persuadé que de nouvelles preuves en faveur de l'attraction newtonienne se dégageaient d'une réponse à la question fort complexe de la nature et de l'origine des satellites ainsi que de l'anneau de Saturne. Il y avait déjà les propositions de solutions de HALLEY et de GRÉGORIY en ce qui concerne l'anneau de Saturne. MAUPERTUIS élaborait une explication, basée elle aussi sur l'attraction universelle, dans la considération des rapports possibles des comètes avec les planètes. Il explique que, non seulement Saturne est d'un volume considérable par rapport aux autres planètes, mais elle était au XVIII^e siècle la plus éloignée du Soleil et pour lui « ces anneaux doivent se former plutôt autour des grosses planètes que des petites, puisqu'ils sont l'effet de la pesanteur, plus forte vers les grosses planètes que vers les petites; ils doivent aussi se former plutôt autour des planètes les plus éloignées du Soleil qu'autour de celles qui en sont plus proches; puisque dans ces lieux éloignés la vitesse des comètes se ralentit et permet à la planète d'exercer son action plus longtemps et avec plus d'effet. » [153]

Ce n'était pas seulement pour expliquer l'anneau de Saturne que MAUPERTUIS avait recours à l'attraction. Il cherchait à expliquer par l'attraction universelle les changements dans le monde stellaire. La précision de plus en plus grande des observations astronomiques avait, en effet amené à constater que le

monde stellaire n'était pas tout à fait exempt de changements. On s'apercevait que parmi ces étoiles soumises à des changements, les unes ne paraissaient pas suivre dans leurs variations un rythme régulier, alors que d'autres observaient une particulière périodicité. En vue de rendre raison de ces apparitions et disparitions de lumière, certains astronomes supposaient que les étoiles variables n'étaient pas lumineuses dans toute leur étendue mais seulement sur une partie de celle-ci, la variation venant alors de l'exposition de ces parties visibles depuis la Terre. MAUPERTUIS, lui, trouvait plus satisfaisante une solution tirée seulement de la figure de ces astres. Ainsi il explique que *«Si parmi les étoiles il s'en trouve d'une figure fort aplatie, elles nous paraîtront comme feraient des étoiles sphériques dont le diamètre serait le même que celui de leur équateur, lorsqu'elles nous présenteront leur face : mais si elles viennent à changer de situation par rapport à nous, si elles nous présentent leur tranchant, nous verrons leur lumière diminuer plus ou moins, selon la différente manière dont elles se présenteront ; et nous les verrons tout à fait s'éteindre, si leur aplatissement et leur distance sont assez considérables.»* [153] MAUPERTUIS utilisait l'attraction newtonienne pour expliquer les changements de situation. Il supposait que, ces étoiles variables étant des Soleils, l'attraction exercée sur elles par les planètes gravitant autour, au moment du passage au périhélie, puisse provoquer les changements de situation admis par hypothèse. Et MAUPERTUIS de conclure que *«dans les choses aussi inconnues que nous le sont les planètes qui circulent autour de ces Soleils, leurs nombres, leurs excentricités, les temps de leurs révolutions, les combinaisons des effets de ces planètes les unes sur les autres, on voit qu'il n'y aura que trop de quoi satisfaire à tous les phénomènes d'apparition et de disparition, d'augmentation et de diminution de lumière.»* [153]

A côté des explications des phénomènes célestes à l'aide de la théorie newtonienne, MAUPERTUIS aborda aussi la question de la prétendue absurdité de la notion de l'attraction. Dans son mémoire : *«Sur les figures des corps célestes»* [159], après une introduction historique au problème de la gravitation, il arriva à la constatation suivante : *«Ceux que le mot d'attraction blesse, qui reprochent à M. NEWTON d'avoir ramené les qualités occultes, et d'avoir replongé la philosophie dans les ténèbres, verront que le terme dont on se sert ici de «désir naturel» par lequel cependant on n'entend que «tendance» est plus fort et plus dur que tout ce que M. NEWTON a jamais dit sur cette matière.»*

Mais la question quant à la nature véritable de la gravitation restait posée et les réactions d'un HUYGENS et d'un LEIBNIZ sont significatives à cet égard. Et il faut noter en passant que Jean BERNOULLI, bien formé au rejet cartésien des idées confuses et inintelligibles, se refusait à reconnaître la conception newtonienne de la pesanteur. HUYGENS avait présenté en 1669 sa propre théorie de la gravitation devant l'Académie des Sciences : *«La simplicité des principes que j'admets ne laisse pas beaucoup de choix dans cette recherche. Car on juge bien d'abord qu'il n'y a point d'apparence d'attribuer à la figure ni à la petitesse des corpuscules quelque effet semblable à la pesanteur ; laquelle étant un effort ou une inclination au mouvement doit vraisemblablement être produite par un*

mouvement. De sorte qu'il ne reste rien qu'à chercher de quelle manière il peut agir, et dans quels corps il se peut rencontrer.» [160]

HUYGENS remplaçait dans sa théorie les tourbillons cartésiens par un ensemble de mouvements circulaires de petites particules qui tournent autour de la Terre sur des surfaces sphériques dans toutes les directions possibles. Or HUYGENS avait postulé certaines choses en contradiction flagrante avec les connaissances acquises au XVII^e siècle déjà. Ainsi il dit que les mouvements circulaires sont aussi naturels que ceux le long d'une ligne droite, ceci en contradiction avec la conservation de la quantité de mouvement, principe énoncé par DESCARTES déjà. Et en postulant que le mouvement circulaire est un mouvement naturel, il aurait dû postuler en même temps que la force centrifuge est tout aussi naturelle. HUYGENS aurait dû se rendre compte qu'il avait manqué l'application de la loi de la force centrifuge, qu'il avait découvert avant NEWTON au mouvement des planètes. Il persistait donc, vu son échec à reconstruire par des moyens purement dynamiques les orbites elliptiques planétaires, à trouver une explication mécanique aux mouvements célestes. HUYGENS restait persuadé qu'on ne pouvait se passer de quelque espèce de tourbillons : sans eux les planètes ne resteraient pas sur leurs orbites, elles s'enfuiraient loin du Soleil. Aussi dans ses *«Pensées privées»* de 1686, écrivit-il : *«Planètes nagent dans la matière. Démonstration de ceci. Parce que sans cela, qu'est-ce qui retiendrait les planètes de s'enfuir ? Qu'est-ce qui les mouvrait ? KEPLER veut à tort que ce soit le Soleil.»* [45]. Il semble étrange que HUYGENS, tout en étant en possession d'une théorie dynamique conçue autour de la notion de force centrifuge, essaie de remplacer les énormes tourbillons cartésiens, dont NEWTON avait montré l'incohérence interne, par un ensemble de tourbillons plus petits. Il est devenu presque une figure tragique car il ne pouvait admettre l'attraction de NEWTON et il avait donc besoin des tourbillons empêchant les planètes de s'éloigner du Soleil. *«Quant à la gravité, il pensait que sa propre théorie pourrait encore se soutenir, en particulier s'il la prouvait quelque peu en étendant jusqu'à la Lune la sphère de mouvement de ces particules, mouvement générateur de poids. Il pensait même qu'il pouvait et devait opposer sa théorie de la gravité à celle de NEWTON.»* [72]. Ayant opté pour les tourbillons, HUYGENS se devait d'examiner la conception de la gravitation universelle comprise comme une action directe, ou du moins non mécanique d'un corps sur un autre. Dans une lettre à LEIBNIZ datée du 18 novembre 1690, il écrit à ce propos : *«Pour ce qui est de la Cause du Reflux que donne M. NEWTON, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres théories qu'il bâtit sur son Principe d'attraction, qui me paraît absurde, ainsi que je l'ai déjà témoigné dans «l'Addition au Discours de la Pesanteur». Et je me suis souvent étonné comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches et de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce même principe.»* [45]. HUYGENS se refuse donc à accepter l'attraction newtonienne et il explique à ses lecteurs du *«Discours de la Cause de la Pesanteur»* [45] qu'elle est inconcevable à travers des moyens mécaniques. Il trouve qu'elle est superflue pour expliquer la pesanteur qu'il se propose de faire comprendre à l'aide de sa propre théorie et il se refuse surtout

à voir dans la gravitation une qualité inhérente au corps.

Pour HUYGENS, tout comme pour DESCARTES, la gravité est l'effet d'une action extérieure : les corps sont lourds parce qu'ils sont poussés vers la Terre par quelques autres corps, plus précisément par les tourbillons de matière subtile qui tournent autour de la Terre à des vitesses considérables.

«A regarder simplement les corps sans cette qualité qu'on appelle pesanteur, leur mouvement est naturellement ou droit ou circulaire. Le premier leur appartenant lorsqu'ils se meuvent sans empêchement, l'autre quand ils sont retenus autour de quelque centre, ou qu'ils tournent sur leur centre même. Nous ne connaissons aucunement la nature du mouvement droit, et les lois que gardent les corps dans la communication de leurs mouvements, lorsqu'ils se rencontrent. Mais tant que l'on ne considère que cette sorte de mouvement, et les réflexions qui en arrivent entre les parties de la matière, on ne trouve rien qui les détermine à tendre vers un centre. Il faut donc venir nécessairement aux propriétés du mouvement circulaire, et voir s'il y en a quelqu'une qui nous puisse servir. Je sais que M. DESCARTES a aussi tâché dans sa Physique d'expliquer la pesanteur par le mouvement de certaine matière qui tourne autour de la Terre ; et c'est beaucoup d'avoir eu le premier cette pensée. Mais l'on verra par les remarques que je ferai dans la suite de ce discours, en quoi sa manière est différente de celle que je vais proposer, et aussi en quoi elle m'a semblé défectueuse.» [45]. HUYGENS rappelle à ses lecteurs que la force centrifuge constituant un effort pour s'éloigner du centre de la Terre, est en même temps la cause que d'autres corps concourent vers ce même centre. Il prouve cette assertion par une expérience où il fait tourner un vase cylindrique autour de son axe, rempli d'eau auquel il ajouta des copeaux d'une matière plus lourde que l'eau. Il observait alors que ces copeaux subissaient le mouvement circulaire plus rapidement que l'eau et se déplaçaient vers les côtés du vase. Or en tournant le vase assez longtemps en vue de faire participer la totalité de la masse d'eau au mouvement de rotation, puis en l'arrêtant brusquement il voyait qu'à l'instant toute la matière ajoutée à l'eau s'enfuyait au centre. HUYGENS croit avoir simulé ainsi l'effet de la pesanteur. *«Et la raison de ceci était que l'eau, nonobstant le repos du vaisseau, continuait encore son mouvement circulaire, et par conséquent son effort à s'éloigner du centre ; au lieu que la cire d'Espagne (c'est-à-dire la matière plus lourde que l'eau) l'avait perdu, ou peut s'en faut pour toucher au fond du vaisseau qui était arrêté. Je remarquai aussi que cette poudre s'allait rendre au centre par des lignes spirales parce que l'eau l'entraînait encore quelque peu.»* [45]

HUYGENS a présenté ainsi un cas où la force centrifuge produit un mouvement centripète et son modèle est donc une illustration du tourbillon cartésien. Il utilise le même schéma pour expliquer la gravité : *«Il n'est pas difficile maintenant d'expliquer comment par ce mouvement la pesanteur est produite. Car si parmi la matière fluide, qui tourne dans l'espace que nous avons supposé, il se rencontre des parties beaucoup plus grosses que celles qui la composent, ou des corps faits d'un amas de petites parties accrochées ensemble, et que ces corps ne suivent pas le mouvement rapide de ladite matière fluide, ils seront*

nécessairement poussés vers le centre du mouvement, et y formeront le globe Terrestre s'il y en a assez pour cela, supposé que la Terre ne fût pas encore. Et la raison est la même que celle qui, dans l'expérience rapportée ci-dessus, fait que la cire d'Espagne s'amasse au centre du vaisseau. C'est donc en cela que consiste vraisemblablement la pesanteur des corps : laquelle on peut dire, que c'est l'effort que fait la matière fluide, qui tourne circulairement autour du centre de la Terre en tous sens, à s'éloigner de ce centre, et à pousser en sa place les corps qui ne suivent pas ce mouvement.» [45]

HUYGENS croyait avoir résolu pour sa propre satisfaction le problème de la gravité en substituant à la force d'attraction, inexplicable par la mécanique, le mouvement. Or sous-jacente à la réflexion de HUYGENS sur le problème de l'attraction il y avait encore une non-acceptance fondamentale du vide dont NEWTON semblait avoir introduit l'existence, au moins d'une manière implicite. HUYGENS se défendait de cette conception aussi et surtout à partir de ses théories optiques, car il croyait que la lumière était constituée non de particules mais d'ondes et de pulsions de particules. Il se devait donc de conclure qu'un vide presque parfait comme celui de NEWTON ne transmettait pas la lumière. Et bien entendu un milieu si raréfié ne serait pas capable de fournir une base mécanique à l'action gravitationnelle.

Si HUYGENS n'accepta pas l'idée de l'attraction gravitationnelle pour des raisons de physique, LEIBNIZ avait, outre ces mêmes raisons, des difficultés métaphysiques avec cette conception. En effet ce fut LEIBNIZ, qui à cause de l'usage qu'il fit du concept d'attraction dans son écrit : «*Tentamen de motuum coelestium causis*» [161] souligna l'analogie entre l'attraction newtonienne et une qualité occulte. Contrairement à HUYGENS, il ne met pas en question les conceptions newtoniennes quoique ses connaissances de ces dernières n'étaient pas tirées de la lecture des «*PRINCIPIA*», mais se limitaient aux informations contenues dans un compte rendu paru dans les «*acta eruditorum*» en 1688. Le «*Tentamen*» est fondé sur l'astronomie de KEPLER que LEIBNIZ tient pour vraie en tant qu'elle décrit les lois du mouvement céleste. L'écrit en question peut être interprété comme une investigation de la validité de ces lois dans un monde où le vide n'existe pas et donc chaque mouvement rencontre de la résistance. LEIBNIZ propose comme hypothèse de base d'admettre que la matière contenue dans l'espace se meuve avec les planètes ou bien que les planètes se meuvent avec la matière qui les entoure. Les planètes sont censées se déplacer à travers les cieux par des orbes fluides au milieu desquels elles restent en repos, orbes et planètes obéissant tout le temps dans leur mouvement à la loi fondamentale de KEPLER que LEIBNIZ appelle «*harmonique*».

Contrairement à d'autres détracteurs de la conception newtonienne, LEIBNIZ est physicien et a des vues bien précises en cette science, même si celles-ci sont englobées dans un vaste système métaphysique. Sa physique est développée vers la fin de la décennie 1680 et mène aux premières controverses avec les cartésiens. En effet LEIBNIZ tente de remplacer la mécanique cartésienne par une construction démonstrative de type géométrique, ceci en cherchant un principe similaire à celui de la conservation de la quantité de mouvement me-

surée selon le produit de la masse par la vitesse. Il parvient ainsi au théorème de conservation de la force vive quoique sa théorie ne fournisse pas encore de conception adéquate des forces sous-jacentes. Finalement LEIBNIZ conçoit la force comme une entité théorique qui se caractérise par «*l'actio in se ipsum*», c'est-à-dire une activité immanente d'autoproduction du corps en mouvement. [162]

Ses propres doutes n'empêchent pas LEIBNIZ de contrer ce qu'il considérait être les lacunes de la science newtonienne. Ainsi sa tentative d'ajuster la théorie tourbillonnaire des mouvements planétaires en vue d'englober le modèle exposé dans les «PRINCIPIA» n'est nullement une régression mais constitue une conception philosophique bien différente de l'espace, du temps et de toutes les catégories fondamentales requises par un système de la nature répondant aux exigences de la science des modernes. Parmi les hypothèses formulées ou révisées par LEIBNIZ, la principale fut sans doute celle d'assigner une cause mécanique à la gravitation. Elle consiste en un programme majeur de construction théorique en vue d'unifier l'explication des phénomènes de la circulation planétaire, de la lumière, de la pesanteur et du magnétisme terrestre, et de concevoir une approche synthétique qui envelopperait les analyses de KEPLER et de NEWTON. L'argumentation leibnizienne garde aujourd'hui encore un intérêt épistémologique certain, car contrairement à NEWTON, LEIBNIZ introduit un système complet de conjectures théoriques et résout l'insatisfaction concernant le fondement causal de la force gravitationnelle. Si par la suite les physiciens se contentèrent de rendre compte des phénomènes en se limitant aux modèles purement quantitatifs et à des calculs a posteriori créant ainsi une «*philosophie expérimentale*», les limitations épistémologiques de ce nouveau système se faisaient douloureusement ressentir et la classification de la gravitation comme qualité occulte par LEIBNIZ critiquant le système newtonien devient pleinement compréhensible.

La différence, voire l'incompréhension réciproque, des approches de NEWTON et de LEIBNIZ suscitèrent même des discussions de type théologique comme le témoigne la célèbre polémique entre LEIBNIZ et CLARKE [163]. En partant de la question si Dieu était l'architecte divin ou le «*Dieu fainéant*» la correspondance entre les deux hommes traitait du problème de l'attraction, à savoir si c'est une qualité occulte, un miracle ou bien une force respectable, une loi de la nature, mais en même temps du problème de la réalité ou de l'impossibilité de l'espace vide, du mouvement absolu et d'autres problèmes de métaphysique et de philosophie naturelle. [164]. Si la mort de LEIBNIZ le 14 novembre 1716 mit fin à la polémique, NEWTON continuait à réfléchir aux questions posées par LEIBNIZ, et dans la seconde édition de son «*Optics*» [46], il déclare à propos de la gravitation : «*Car ces qualités sont manifestes et il n'y a que leurs causes qui soient occultes. Les Aristotéliciens ont donné le nom de qualités occultes, non à des qualités manifestes, mais à des qualités qu'ils supposaient être cachées dans les corps, et être les causes inconnues d'effets manifestes, telles que seraient les causes de la pesanteur, des attractions magnétiques et électriques et des fermentations, si nous supposons que ces forces ou actions procédassent de*

qualités qui nous fussent inconnues et qui ne pussent jamais être découvertes. Ces sortes de qualités occultes arrêtent le progrès de la philosophie naturelle et c'est pour cela qu'elles ont été rejetées dans ces derniers temps.»

Il revient encore une fois à la charge au terme du compte rendu du «*Commercium epistolicum*» [55] dans sa seconde édition de 1722 : «*La philosophie que M. NEWTON a développée dans ses Principes et son Optique est expérimentale ; et ce n'est pas l'affaire de la philosophie expérimentale d'enseigner les causes des choses au-delà de ce que les expériences en peuvent prouver. Nous ne devons par remplir cette philosophie d'opinions que les phénomènes ne peuvent prouver. Dans cette philosophie les hypothèses n'ont pas de place, si ce n'est comme des conjectures ou des questions que l'on doit examiner par des expériences.*» Et puisque ce texte paraissait anonyme, NEWTON pouvait se permettre de continuer : «*Il faut reconnaître que ces deux Messieurs (NEWTON et LEIBNIZ) diffèrent beaucoup en matière de philosophie. L'un procède à partir de l'évidence qui vient des expériences et des phénomènes et il s'arrête là où manque une telle évidence, l'autre est enlevé par des hypothèses et il les propose non pour qu'on les examine au moyen d'expériences mais pour qu'on les croit sans examen. L'un, faute d'expériences pour trancher la question, ne prononce pas que la cause de la gravité est mécanique ou non mécanique ; l'autre déclare que c'est un miracle perpétuel si ce n'est pas mécanique ... L'un enseigne que les philosophes doivent raisonner à partir des phénomènes et des expériences jusqu'à leurs causes, et de là aux causes de ces causes, et ainsi de suite jusqu'à ce que nous arrivions à la Cause première ; l'autre que toutes les actions de la première Cause sont des miracles, et que toutes les lois imposées à la nature par la volonté de Dieu sont des miracles perpétuels et des qualités occultes et que par conséquent on ne doit pas les examiner en philosophie.*»

La discussion entre les concepts newtonien et leibnizien s'estompa petit à petit et la gravité ou l'attraction devient une question purement de fait. Cessant d'être un problème, la pensée du XVIII^e siècle se réconcilia avec l'incompréhensible et s'habitua à utiliser des forces agissant à distance et le stimulant à s'enquérir de leur vraie origine disparut presque complètement. [111]

Il restait quand même un grand travail de vulgarisation auprès du grand public à faire et ce fut François Marie AROUET, lequel à 25 ans prit le nom de VOLTAIRE, qui s'en chargea. VOLTAIRE exilé en 1726 s'embarque pour l'Angleterre et fait connaissance de Samuel CLARKE, proche de NEWTON qui mourut dans cette même année. Il publie en 1733 ses «*Lettres philosophiques*» [120] parues d'abord en anglais qui lui valent une menace de lettre de cachet, ce qui l'oblige à se mettre en sécurité une fois de plus.

Dans les «*Lettres philosophiques*», VOLTAIRE expose à ses concitoyens la philosophie naturelle de NEWTON, même si MAUPERTUIS était le premier à se déclarer partisan de celle-ci. VOLTAIRE avait épousé pleinement les idées concernant le nouvel esprit scientifique tel qu'introduit par NEWTON et il admirait particulièrement celui-ci : «*Les découvertes du chevalier NEWTON, qui lui ont fait une réputation si universelle, regardent le système du monde, la lumière, l'infini en géométrie, et enfin la chronologie à laquelle il s'est amusé*

pour se délasser.» [120]

VOLTAIRE était un des premiers à avoir compris la démarche newtonienne et on s'étonne qu'il ait pu devancer avec tant d'aisance des spécialistes remarquables dans leur propre spécialité. Pour VOLTAIRE, la physique de NEWTON «*conduit à la connaissance d'un Etre Suprême.*» L'attraction universelle évoque pour lui l'idée d'un amour universel, en même temps que l'idée d'une raison triomphante, qui n'a pas besoin de multiplier les lois fondamentales qu'elle édicte. VOLTAIRE voit ainsi NEWTON se laissant aller «*à une méditation profonde sur cette pesanteur, dont tous les philosophes ont cherché si longtemps la cause en vain, et dans laquelle le vulgaire ne soupçonne pas même de mystère.*» Il se dit à lui-même : «*De quelque hauteur dans notre hémisphère que tombassent ces corps, leur chute serait certainement dans la progression découverte par GALILEI ; et les espaces parcourus par eux seraient comme les carrés des temps. Ce pouvoir, qui fait descendre les corps graves, est le même, sans aucune diminution sensible, à quelque profondeur qu'on soit dans la Terre, et sur la plus haute montagne. Pourquoi ce pouvoir ne s'étendrait-il pas jusqu'à la Lune ? Et s'il est vrai qu'il pénètre jusque là, n'y a-t-il pas grande apparence que ce pouvoir la retient dans son orbite et détermine son mouvement ? Mais si la Lune obéit à ce principe quel qu'il soit, n'est-il pas encore très raisonnable de croire que les autres planètes y sont également soumises ?*» VOLTAIRE refait alors le calcul que NEWTON avait fait pour conclure à la même nature de la force qui fait tomber une pierre avec celle qui retient la Lune sur son orbite et il généralise : «*Etant donc démontré que la Lune pèse sur la Terre qui est le centre de son mouvement particulier, il est démontré que la Terre et la Lune pèsent sur le Soleil, qui est le centre de leur mouvement annuel. Les autres planètes doivent être soumises à cette loi générale, et si cette loi existe, ces planètes doivent suivre les règles trouvées par KEPLER.*» VOLTAIRE résume l'importance du principe de la gravitation universelle en écrivant : «*Son (c'est-à-dire celui de NEWTON) seul principe des lois de la gravitation rend raison de toutes les inégalités apparentes dans le cours des globes célestes. Les variations de la Lune deviennent une suite nécessaire de ces lois. De plus on voit évidemment pourquoi les nœuds de la Lune font leurs révolutions en dix-neuf ans et ceux de la Terre dans l'espace d'environ vingt-six mille années. Le flux et le reflux de la mer sont encore des effets très simples de cette attraction ...*». L'attraction est donc le grand ressort qui fait mouvoir toute la nature. A la fin de sa quinzième lettre, VOLTAIRE vient à parler du reproche qu'on fait à NEWTON d'avoir introduit une cause occulte : «*NEWTON avait bien prévu, après avoir démontré l'existence de ce principe, qu'on se révolterait contre ce seul nom ; dans plus d'un endroit de son livre il précautionne son lecteur contre l'attraction même, il l'avertit de ne la pas confondre avec les qualités occultes des anciens, et de se contenter de connaître qu'il y a dans tous les corps une force centrale qui agit d'un bout de l'univers à l'autre sur les corps les plus proches et sur les plus éloignés, suivant les lois immuables de la mécanique.*»

Devant la menace de la lettre de cachet, VOLTAIRE se réfugie à Cirey en Champagne, dans le château de la Marquise DU CHÂTELET avec laquelle il

s'était lié d'amitié en 1733. Emilie, Marquise DU CHÂTELET n'était pas seulement femme du monde, mais elle était aussi une femme de science et une élève de MAUPERTUIS. C'est probablement à l'instigation de celui-ci qu'elle entreprit et mena à bien, avec l'aide de CLAIRAUT, la traduction des «PRINCIPIA» de NEWTON, traduction qui ne fut publiée qu'en 1756, sept ans après la mort de la Marquise.

C'est à Cirey que VOLTAIRE commence la rédaction de son livre : «*Éléments de la philosophie de NEWTON*» [165]. La publication du livre se fait en Hollande en 1738 dans des conditions jugées inacceptables par VOLTAIRE. Et tout de suite les détracteurs ne manquent pas et les sectateurs de DESCARTES sont encore puissants. VOLTAIRE, qui s'était fait déjà de nombreux ennemis et qui avait irrité le nationalisme français avec sa première publication, n'avait pas l'autorité scientifique d'un MAUPERTUIS ou d'un CLAIRAUT pour s'ériger en apôtre de NEWTON. Il est attaqué et on met en avant son incompétence en matière scientifique. Pourtant, son ouvrage est sérieux et lui a sûrement demandé un énorme effort. Si VOLTAIRE a lu le livre de PEMBERTON [166], il a certainement aussi lu NEWTON que la Marquise DU CHÂTELET était en train de traduire du latin. Le plaidoyer de VOLTAIRE pour NEWTON est d'un excellent niveau et ce livre, qui se veut livre de vulgarisation, a fait sortir de l'obscurité des cabinets de travail de quelques spécialistes la philosophie naturelle de NEWTON. Son apparition est un événement capital dans l'histoire de la pensée du début du XVIII^e siècle.

VOLTAIRE décrit dans son ouvrage, en utilisant une approche plus systématique que dans les «*Lettres philosophiques*» la physique de NEWTON. Ainsi, après avoir détaillé le chemin menant de GALILEI à NEWTON, il retient le principe de la gravitation : «*La pesanteur sur notre globe est en raison réciproque des carrés des distances des corps pesants au centre de la Terre ; ainsi plus ces distances augmentent, plus la pesanteur diminue. La force qui fait la pesanteur ne dépend point des tourbillons de matière subtile, dont l'existence est démontrée fausse. Cette force, quelle qu'elle soit, agit sur tous les corps, non selon leur surface mais selon leur masse. Si elle agit à une distance, elle doit agir à toutes les distances ; si elle agit en raison inverse du carré de ces distances, elle doit toujours agir suivant cette proportion sur les corps connus, quand ils ne sont pas au point de contact, je veux dire, le plus près qu'il est possible d'être, sans être unis. Si, suivant cette proportion, cette force fait parcourir sur notre globe cinquante-quatre mille pieds en soixante secondes, un corps, qui sera environ à soixante rayons du centre de la Terre, devra en soixante secondes tomber seulement de quinze pieds de Paris ou environ.*» Selon VOLTAIRE la Lune tombe vers la Terre à raison de 15 pieds par minute et fait donc 3600 fois moins de chemin qu'un mobile n'en ferait sur la Terre. Or 3600 est juste le carré de sa distance. VOLTAIRE conclut : «*Donc la gravitation qui agit ici sur tous les corps, agit aussi entre la Terre et la Lune précisément dans ce rapport de la raison inverse du carré des distances.*» et il continue un peu plus bas : «*Mais si cette puissance qui anime les corps dirige la Lune dans son orbite, elle doit aussi diriger la Terre dans la sienne, et l'effet qu'elle opère sur la planète de la*

Lune, elle doit l'opérer sur la planète de la Terre. Car ce pouvoir est partout le même, toutes les autres planètes doivent lui être soumises, le Soleil doit aussi éprouver sa loi, et s'il n'y a aucun mouvement des planètes, les unes à l'égard des autres, qui ne soit l'effet nécessaire de cette puissance, il faut avouer alors que toute la nature la démontre.» [165]

En Angleterre, NEWTON n'avait pas de successeurs et dès le début du XVIII^e siècle, il s'était tourné vers d'autres activités. Ainsi il fut vénéré sans pour autant être lu. Lors de sa longue présidence de la Royal Society, celle-ci déclinait suite à la longue maladie de NEWTON et ses séances furent fréquentées par de moins en moins de membres. Dans cette succession vacante, l'Europe continentale était prédestinée à reprendre le flambeau dès que l'opposition quasi métaphysique des cartésiens contre le concept de la gravitation comme une force agissant à distance, fut abandonnée. Un travail organisationnel restait quand même à faire pour développer à partir des «PRINCIPIA», qui utilisèrent presque exclusivement un langage géométrique, tout l'appareil de la mécanique analytique. CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER commencèrent ce travail en développant d'abord la mécanique céleste.

Chapitre 4

Alexis Claude Clairaut et sa détermination de l'orbite de la Lune

4.1 Clairaut — mathématicien et physicien newtonien

LE PREMIER à s'attaquer au problème de l'orbite de la Lune, devançant de quelques années D'ALEMBERT, fut Alexis Claude CLAIRAUT. En 1735, âgé tout juste de 22 ans, il séjournait ensemble avec MAUPERTUIS, après un voyage qu'ils avaient entrepris à Bâle où ils étaient les hôtes de Jean BERNOULLI, à Cirey chez Madame DU CHÂTELET. Cette femme d'une exceptionnelle intelligence et d'une indiscutable compétence scientifique associait CLAIRAUT à ses études scientifiques. Si elle concourait en 1738 pour le prix de l'Académie des Sciences sur la question de la nature du feu et qu'en 1740 elle publia ses «*Institutions de Physique*», elle entreprit à faire connaître sa compréhension d'un texte jugé l'un des plus difficiles, à savoir les «*Philosophiae naturalis principia mathematica*» de NEWTON. Sa traduction, d'ailleurs la seule complète existant en langue française, a été publiée à titre posthume en 1749, accompagnée d'une «*Exposition abrégée du Système du Monde et Explication des principaux phénomènes astronomiques tirée des Principes de NEWTON*», ainsi que d'une «*Solution analytique des principaux problèmes qui concernent le Système du monde.*» [1]

La collaboration avec CLAIRAUT s'avérait très efficace, aussi bien en ce qui concerne la traduction de l'œuvre maîtresse de NEWTON que pour l'élaboration de «*l'Exposition*» et la «*Solution analytique*». On peut affirmer que CLAIRAUT a mis dans ces deux textes beaucoup de son propre fonds. En effet le premier texte, résume, illustre et complète sur environ cent pages les thèses princi-

pales des «PRINCIPIA». Dans la «*Solution analytique*» la main de CLAIRAUT est encore plus visible et beaucoup de ses propres résultats scientifiques y sont utilisés. Ainsi dans la section sur la réfraction de la lumière, on peut reconnaître une version approchée de son traité : «*Sur les explications cartésienne et newtonienne de la réfraction de la lumière*» et les pages vouées à la figure de la Terre sont un résumé de son livre sur la «*Figure de la Terre*.»

Cette narration de la relation de CLAIRAUT avec la Marquise DU CHÂTELET est en quelque sorte une anticipation du cours des événements et il convient de nous replacer dans la suite chronologique de la vie d'Alexis Claude CLAIRAUT et de son œuvre en nous centrant sur ses travaux de mécanique céleste, d'astronomie et de géophysique.

Alexis Claude CLAIRAUT, [158] né à Paris le 13 mai 1713, fut un enfant précoce. Son père, mathématicien de son état, lui prodiguait une instruction peu ordinaire. Il apprit à connaître les lettres de l'alphabet sur les figures des «*Eléments*» d'EUCLIDE et sut lire et écrire à l'âge de quatre ans. A neuf ans il commençait à lire des ouvrages mathématiques tel que «*l'Application de l'algèbre à la géométrie*» de GUIGNÉE, une bonne introduction à la géométrie analytique et au calcul infinitésimal, pour continuer ses études avec le «*Traité analytique des sections coniques*» et «*l'Analyse des infiniments petits*» du Marquis DE L'HÔPITAL de 1696. Dans ce dernier ouvrage, celui-ci avait condensé les résultats acquis par la «*Géométrie*» de DESCARTES et ses connaissances du calcul infinitésimal reçues de Jean BERNOULLI.

DESTOUCHES, un ami de la famille des CLAIRAUT, présenta le jeune Alexis à quelques membres de l'Académie des Sciences et ce fut là le début d'une renommée qui n'allait faire que s'affirmer et grandir. A douze ans CLAIRAUT lut à l'Académie son mémoire intitulé : «*Quatre problèmes sur de nouvelles courbes*». Son intérêt pour la géométrie des courbes le porta alors à s'intéresser aux courbes à double courbure. Son ouvrage «*Recherches sur les courbes à double courbure*» parut à Paris en 1731. CLAIRAUT avait alors 18 ans.

Si CLAIRAUT abandonna, du moins partiellement, ses recherches géométriques, la cause en était son intérêt qui se manifestait alors pour l'application de l'analyse à l'astronomie. CLAIRAUT joua ici le rôle d'un pionnier dans un domaine encore inexploré et ses successeurs utilisèrent largement ses travaux, même si lui n'arrivait pas à des solutions définitives. En 1732 parut le «*Discours sur les différentes figures des astres*» de MAUPERTUIS [153] qui incita une discussion sur le newtonianisme parmi les membres de l'Académie des Sciences à laquelle CLAIRAUT appartenait depuis 1731.

En fait l'ouvrage de MAUPERTUIS traitait surtout de la forme de la Terre. NEWTON avait, conformément à sa conception de l'attraction universelle, établi et calculé l'aplatissement de la Terre suivant son axe. MAUPERTUIS se plaçait ainsi à l'encontre de la théorie cartésienne qui postulait un corps terrestre oblong dans la direction de l'axe et il validait ainsi les constatations d'un autre français, RICHER, qui en 1672 s'était rendu à Cayenne pour y faire des observations astronomiques. Arrivé sur place, il constatait que son horloge à pendule, qu'il avait réglé à Paris sur le moyen mouvement du Soleil, retardait chaque jour

de plus de deux minutes. Dédution faite de l'allongement produit sur le pendule par l'augmentation de la température moyenne, aucun autre phénomène qu'une diminution de la pesanteur en cet endroit près de l'équateur, vis-à-vis de celle régnant à Paris, ne semblait de nature à expliquer un tel résultat. Dès lors NEWTON, pour qui la pesanteur ne faisait que traduire l'attraction s'exerçant en raison inverse du carré des distances, d'en conclure que le rayon de l'équateur devait être plus long que ne l'étaient les rayons terrestres aux autres latitudes et par conséquent que la Terre était aplatie. NEWTON identifiait la cause dans la force centrifuge causée par la rotation de notre planète ainsi que dans l'action des forces attractives de la Lune et du Soleil et il généralisa le fait aussi aux autres planètes. Ainsi il énonce la PROPOSITION XVIII respectivement le **Théorème** XVI du LIVRE III des «PRINCIPIA» dans la forme «*que les axes des planètes sont plus petits que les rayons de leurs équateurs*». [1]

Le monde scientifique était dès lors pour la première fois devant la possibilité d'une validation expérimentale de la loi de l'attraction universelle. Il suffisait de mesurer la figure du globe terrestre. Car de toute évidence, en cas d'aplatissement de la Terre, les degrés de méridien devaient présenter des différences plus ou moins appréciables suivant la proportion de cet aplatissement. Il faut rappeler ici que les premières mesures géodésiques semblaient donner plutôt raison à DESCARTES qu'à NEWTON. Dès 1683 Jean-Dominique CASSINI avait entrepris, ensemble avec LA HIRE, de mesurer du Sud au nord le méridien de l'Observatoire de Paris. Ces travaux furent interrompus par la mort de COLBERT et par les guerres qui y succédèrent et ne purent être repris que vers 1700. De la comparaison du résultat obtenu, vérifié encore par de nouvelles observations de CASSINI en 1713, avec celui obtenu autrefois par PICARD entre Paris et Amiens, on pouvait conclure que la longueur des degrés diminuait vers le nord et que par conséquent le méridien à l'équateur avait un plus grand diamètre que l'axe de la Terre. Ce résultat, contraire à la théorie acceptée entre-temps aussi en France, exigea la reprise de l'ouvrage et un académicien, l'abbé BIGNON intervint auprès du DUC D'ORLÉANS pour en obtenir l'autorisation. Jacques CASSINI effectuait en 1718 les opérations géodésiques entre Paris et Dunkerque qui semblaient encore une fois confirmer les résultats antérieurs, comme quoi la Terre aurait une forme allongée et non aplatie suivant son axe.

Les résultats des CASSINI ne réduisaient pas au silence les partisans de NEWTON, ni en Angleterre ni en France. Ainsi la Royal Society discutait d'une façon intense de la question et ce fut DESAGULIERS qui menait le combat par ses articles dans les «*Philosophical Transactions*» de l'année 1725. En France, ce fut précisément le «*Discours sur la figure des astres*» qui ranima comme déjà dit le débat au sein de l'Académie des Sciences. Si au centre du débat était le point de vue théorique et la façon dont NEWTON avait envisagé le problème, la géodésie n'en continuait pas moins à retenir l'attention. Il y a eu d'abord des considérations purement géométriques sur l'ellipsoïde établie par MAUPERTUIS et CLAIRAUT en collaboration et qui sont condensées dans le travail de ce dernier : «*Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par Monsieur CASSINI, avec plusieurs méthodes d'en tirer la*

grandeur de la figure de la Terre».[167]

Même si CASSINI en 1733 entreprend le levé de la perpendiculaire à la méridienne de Paris, autre moyen pour déterminer la forme de notre globe, il persistait le besoin du mesurage d'un méridien, d'autant plus qu'au sein de l'Académie subsistaient des doutes quant aux résultats des CASSINI. Si bien que tout le monde se ralliait à l'idée lancée des 1733 par LA CONDAMINE et reprise par GODIN d'envoyer au Pérou une mission scientifique chargée d'y mesurer un degré de méridien à l'équateur. Cette mission fut entreprise en mai 1735 et GODIN, BOUGUER et LA CONDAMINE furent de la partie. Mais déjà ce n'était plus vers l'équateur que se tournaient les regards de CLAIRAUT qui, après des échanges de vues avec MAUPERTUIS préconisait une autre entreprise : prendre la mesure d'un degré le plus près possible du pôle. CLAIRAUT montrait le bien fondé de cette proposition dans un mémoire : «*Sur la mesure de la Terre par plusieurs arcs de méridien pris à différentes latitudes*» [168] rédigé en 1735. Ce fut le 2 mai 1736 que débuta l'expédition en Laponie à laquelle participaient : MAUPERTUIS, CLAIRAUT, CAMUS, Le Monnier, CELSIUS et l'abbé OUTHIER. La mission réussit à mesurer un arc de 57 minutes, qui semble être petit, même si on tient compte des difficultés particulières de l'opération. Mais l'exactitude avec laquelle avaient été faites les observations astronomiques garantissait la validité du mesurage. L'expédition fut un succès et elle permettait de décider définitivement de la forme du globe terrestre. Ce succès était dû en première ligne à l'assiduité et l'énergie de MAUPERTUIS à qui VOLTAIRE, encore en ce moment son ami, présenta des félicitations dithyrambiques parce qu'il avait : «*aplatis les pôles et les CASSINI*». Mais ces congratulations n'empêchaient pas VOLTAIRE de relativiser son jugement plus tard, quand ils n'étaient plus amis, et d'écrire : «*Vous avez confirmé dans les lieux pleins d'ennuis, ce que NEWTON connut sans sortir de chez lui*».

CLAIRAUT participe aux mesures géodésiques destinées à déterminer la forme de la Terre, le globe terrestre étant, suivant l'opinion de NEWTON, légèrement aplati dans le sens de son axe. S'il avait même calculé, sur la base des résultats de l'expédition de Laponie la quantité de cet aplatissement [158], il n'était pas encore satisfait par les résultats qu'il avait obtenu. Il continuait ses recherches et publia en 1743 sa «*Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*». [169] CLAIRAUT traite dans cet ouvrage, dans un esprit newtonien, le problème d'une masse fluide primitivement sphérique sous l'effet de la force centrifuge qui suffit pour transformer cette sphère en un sphéroïde, aplati vers ses pôles par le moyen de la rotation. CLAIRAUT se laissait guider dans ses hypothèses par les résultats obtenus dans l'expédition de Laponie et ses calculs hydrostatiques lui permettaient de retrouver le rapport de 177 à 178 entre l'axe de la Terre et le diamètre. Il restait pourtant prudent dans le sens qu'il se proposait d'insérer le cas échéant les observations qu'on attendait encore de la mission scientifique partie au Pérou, mais il était pleinement conscient que la théorie newtonienne falsifiait singulièrement les cartésiens et leurs tourbillons. «*Depuis que NEWTON a paru, écrivait-il, les cartésiens éclairés ont été forcés de reconnaître que la force de la pesanteur était répandue dans*

tout l'univers ; ils sont enfin convenus que la Lune est un corps grave qui pèse vers la Terre ; que la Terre et toutes les planètes ont une semblable gravité vers le Soleil, ainsi que les satellites vers leurs planètes principales ; et se trouvant encore obligés d'avouer que toutes ces gravités augmentent dans la même raison que le carré de la distance au corps central diminue, ils ont cherché à tirer de leurs principes l'explication de ces phénomènes». [169] Les cartésiens déterminent, par l'application de la théorie des tourbillons, modifiée pour les besoins de la cause, la raison de l'axe au diamètre de l'équateur de 576 à 577. CLAIRAUT voit dans cette valeur énoncée par les cartésiens et la comparaison avec celle résultante de la théorie newtonienne un critère de vérité pour les deux approches. Les résultats géodésiquement obtenus pourraient donc décider en faveur d'un des systèmes. CLAIRAUT est certain que cette décision sera en faveur du système newtonien. Comme le dit Joseph BERTRAND dans son éloge académique de CLAIRAUT [170] : «CLAIRAUT a lu et médité les «PRINCIPIA» et il s'est pénétré de la méthode newtonienne de recherche et de démonstration. De ce commerce est sorti un géomètre de premier plan, qui tout en menant d'autres recherches comme celles sur l'aberration optique et les lunettes achromatiques ou en manifestant d'autres intérêts comme ses projets didactiques en relation avec l'enseignement des mathématiques, reste foncièrement fixé sur la mécanique newtonienne et le principe de l'attraction universelle».

Ainsi au début des années 1740, presque en même temps qu'il écrit son travail sur la figure de la Terre, il compose un mémoire sur «*L'orbite de la Lune dans le système de M. NEWTON*» [171]. Dans celui-ci il donna sa première formulation du problème des trois corps, CLAIRAUT préludait ici à l'examen de ce fameux problème, sur lequel allaient ensuite s'exercer bon nombre d'astronomes et de mathématiciens et qui allait devenir par la suite à la fois le fondement de la mécanique céleste et le meilleur argument en faveur du système newtonien.

Deux années plus tard, en 1745, CLAIRAUT présenta à l'Académie des Sciences une exposition d'ensemble intitulée : «*Système du monde dans les principes de la gravitation universelle*» [172]. Dans cet écrit, CLAIRAUT affirme l'universalité de l'attraction considérée comme force. Un autre point sur lequel CLAIRAUT insiste est la réciprocité de l'attraction qui, pour lui, est à la base de toutes les techniques analytiques de résolution du problème des trois corps. Or celui-ci lui posait problème. Dans un mémoire de 1743, intitulée «*De l'orbite de la Lune dans le système de M. NEWTON*» [171] que nous commenterons amplement dans la suite et qui contient sa première tentative pour la résolution du problème des trois corps, il expose ses difficultés. En effet CLAIRAUT obtient des résultats inacceptables dans la détermination du mouvement de l'apogée de la Lune et il s'aperçoit avec étonnement que le calcul d'après la théorie newtonienne «*rendait le mouvement de l'apogée qui suivrait de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances serait d'environ 18 ans au lieu d'un peu moins de 9 qu'elle est réellement*». On peut s'imaginer facilement quelle répercussion devaient avoir les résultats de ses premiers calculs dans l'esprit de CLAIRAUT, partagé entre le désir de voir triompher la mécanique newtonienne qu'il avait fait sienne et le souci ardent d'accéder

à la vérité et d'écarter de ces recherches tout parti pris et toute prévention. Le bilan des premiers recherches de CLAIRAUT pesait d'autant plus lourd que dans les «PRINCIPIA», NEWTON, après avoir assigné la cause des perturbations du mouvement elliptique de la Lune, a fait voir que la variation perturbant la longitude, pouvaient être calculée avec une exactitude suffisante pour fournir une confirmation assez remarquable de la gravitation universelle.

CLAIRAUT, avec le résultat de ses calculs, avait suscité une crise qui permettait une dernière fois aux cartésiens et newtoniens de s'affronter. Mais lui ne restait pas inactif et il refaisait ses calculs pendant deux ans et en 1749 il pouvait mettre ses collègues de l'Académie des Sciences au courant de son erreur et de ses rectifications. Aussi leur déclara-t-il le 17 mai 1749 qu'il «*est parvenu à concilier assez exactement les observations faites sur le mouvement de l'apogée de la Lune avec la théorie de l'attraction, sans supposer d'autre force attractive que celle qui suit la proportion inverse du carré des distances; du moins les différences que j'ai trouvées entre mes résultats et les observations sont-elle assez légères pour pouvoir être attribués à l'omission de quelques éléments que la théorie ne peut employer que très difficilement, et qui sont heureusement de peu d'importance*». L'Astronome LALANDE expliqua l'erreur de CLAIRAUT de la façon suivante : «*le moyen que CLAIRAUT employa pour reconnaître son erreur consiste à chercher la valeur du petit terme qu'il avait soupçonné devoir être ajouté à l'expression de la force centrale en raison inverse du carré de la distance; comme ce terme devait être petit, il fallait mettre dans le calcul une précision singulière, et y faire entrer des inégalités qu'il avait jusqu'alors négligées; avec ces attentions il parvint à un résultat qui donnait zéro pour le terme additionnel, et cela lui apprit ce qu'il avait tort de négliger*». Cette affirmation à première vue sibylline, deviendra compréhensible après analyse détaillée de sa première approche qui sera faite dans la suite.

CLAIRAUT exposa dans les détails sa solution modifiée du problème de l'orbite de la Lune dans son traité : «*Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances*» [173] (1752) qui lui avait rapporté le prix de l'Académie de St-Petersbourg en 1750.

Par cette pièce, CLAIRAUT apportait à la thèse newtonienne un renforcement certain car elle triomphait brillamment et son succès devenait d'autant plus solide qu'elle avait été mise à une rude épreuve. Dans le discours préliminaire de son traité de 1752, CLAIRAUT résume son approche : «*Animé par le désir de plaire à cette Sçavante Compagnie j'ai traité la matière aussi à fond qu'il m'a paru que la seule manière de faire connaître décisivement la justesse ou l'insuffisance des principes newtoniens pour cette partie du système du Monde, était de tirer d'une solution générale, ou le Problème fut pris mathématiquement et sans employer que les données nécessaires, des formules générales, par les quelles on pût trouver le lieu de la Lune pour un instant quelconque proposé ...* » [173]

L'approche de CLAIRAUT démontre que l'approche analytique est loin d'être directe et les solutions ainsi obtenues devraient être examinées avec soin avant que des conclusions physiques soient tirées de discrèpences numériques appa-

rentes.

Dans ce qui suit, nous examinerons d'abord la première théorie de la Lune de CLAIRAUT de 1743 en utilisant une transcription moderne de ses notations et nous montrerons l'erreur dans son raisonnement. Nous suivrons ensuite les tentatives d'introduction d'une modification de la loi newtonienne, en nous appuyant surtout sur sa correspondance avec EULER et ses discussions avec BUFFON. Une exposition détaillée de son traité de 1752 contenant sa deuxième théorie de la Lune fermera le chapitre.

4.2 La première théorie de la Lune de Clairaut à travers son mémoire « Le système du monde suivant M. Newton »

NOUS avons vu que l'intérêt pour le calcul de l'orbite lunaire au XVIII^e siècle se concentrait sur le calcul de valeurs numériques des coordonnées de position de la Lune. En effet, le temps en un méridien choisi comme celui de Greenwich ou de Paris pouvait être mis en relation avec la position en longitude de la Lune et pouvait être utilisé, ensemble avec l'observation du temps local, pour déterminer la longitude d'un endroit relatif au méridien standard. Comme les équations du mouvement de la Lune sont déduites des lois de NEWTON et contiennent le temps comme variable indépendante, il fallait, dans un premier pas, convertir ces équations en des expressions avec la longitude de la Lune comme variable dépendante. Si donc cette longitude de la Lune était la variable dépendante, il fut naturel pour CLAIRAUT de travailler avec des coordonnées polaires sphériques ayant comme centre le centre de masse du système Terre–Lune. Comme l'orbite de la Lune est située non loin du plan de l'écliptique il paraissait plus naturel à CLAIRAUT de négliger en un premier temps l'inclinaison de l'orbite de la Lune, réduisant ainsi son système d'équations à deux variables.

La théorie de la Lune de CLAIRAUT, tout comme les autres théories élaborées par ses contemporains, nécessitait la connaissance de la distance radiale de la Lune ou du parallaxe. Or cette valeur n'était pas connue vu qu'elle n'était pas mesurable directement, ce qui menait à un désintéressement de ce côté de la théorie au profit des considérations sur la variation de la longitude.

CLAIRAUT [171] suppose donc d'abord que le mouvement se fait dans le plan de l'écliptique ; soient r et ν les coordonnées polaires de la Lune, l'origine étant au centre de la Terre ; S la composante de la force motrice suivant le rayon r , comptée positivement dans le sens du prolongement de r ; T la composante perpendiculaire, comptée positivement dans le sens des longitudes croissantes. Il part des formules du mouvement en coordonnées polaires écrites dans une notation moderne [124] avec $\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_r$ comme vecteurs unitaires afin de faciliter la compréhension de son approche.

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (4.2)$$

en différentiant une seconde fois, on obtient :

$$\vec{b} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi \quad (4.3)$$

avec

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi}\vec{e}_r \end{aligned} \quad (4.4)$$

en introduisant 4.4 dans 4.3 il vient :

$$\vec{b} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi \quad (4.5)$$

ou bien

$$\vec{b} = T\vec{e}_r + S\vec{e}_\varphi \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{aligned} r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} &= T \\ \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 &= S \end{aligned} \quad (4.7)$$

Après quelques manipulations algébriques, auxquelles nous reviendrons plus tard, CLAIRAUT arrive aux équations suivantes en posant $r = 1/\nu$, en prenant ν pour variable indépendante et en désignant par h une constante.

$$dt = \frac{r^2 d\nu}{h\sqrt{1 + \frac{2}{h^2} \int Tr^3 d\nu}} \quad (4.8)$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu^2} + \frac{1}{r} + \frac{Sr^2 - Tr\frac{dr}{d\nu}}{h^2 \left(1 + \frac{2}{h^2} \int Tr^3 d\nu\right)} \quad (4.9)$$

ou en posant :

$$\rho = \frac{1}{h^2} \int Tr^3 d\nu \quad (4.10)$$

$$dt = \frac{r^2 d\nu}{h\sqrt{1 + 2\rho}} \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2 \frac{h^2}{r}}{d\nu^2} + \frac{h^2}{r} + \frac{Sr^2 - Tr \frac{dr}{d\nu}}{1 + 2\rho} \quad (4.12)$$

En désignant par M le produit de la somme des masses de la Terre et de la Lune multiplié par la constante f et en nommant M/r^2 la force centrale qui produirait le mouvement elliptique non perturbé suivant la loi de NEWTON $\ddot{r} = -M/r^2$, la force perturbatrice de ce mouvement est représentée par ses composantes :

$$\begin{aligned} \phi &= r\dot{\varphi}^2 \\ T &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{aligned} \quad (4.13)$$

On obtient finalement :

$$S = -\frac{M}{r^2} - \phi \quad (4.14)$$

En posant après :

$$\Omega = \frac{\frac{\phi}{M}r^2 \frac{T}{M}r \frac{dr}{d\nu} - 2\rho}{1 + 2\rho} \quad (4.15)$$

$$U = 1 - \frac{h^2}{Mr} \quad (4.16)$$

l'expression 4.12 se transforme en

$$\frac{d^2 U}{d\nu^2} + U + \Omega = 0 \quad (4.17)$$

L'équation 4.17 est une équation différentielle non-linéaire du deuxième ordre que CLAIRAUT se propose de résoudre par la méthode des séries, tout comme NEWTON le pratiquait déjà. A cette fin il multiplie 4.17 par $\cos \nu d\nu$ et, en intégrant, il trouve :

$$\frac{dU}{d\nu} \cos \nu + U \sin \nu + \int^\nu \Omega \cos \nu d\nu = c_0 \quad (4.18)$$

En multipliant une deuxième fois par $\nu \cos^2 \nu$ et en intégrant encore, CLAIRAUT obtient :

$$\frac{U}{\cos \nu} + \int^\nu \left(\int^\nu \Omega \cos \nu d\nu \right) d \tan \nu = c_0 \tan \nu + c_1 \quad (4.19)$$

Une intégration par parties donne :

$$\frac{U}{\cos \nu} + \tan \nu \int^\nu \Omega \cos \nu d\nu - \int^\nu \Omega \sin \nu d\nu = c_0 \tan \nu + c_1 \quad (4.20)$$

En tirant de cette équation la valeur de U et en portant celle-ci dans l'équation 4.16 il vient :

$$\frac{h^2}{Mr} = 1 - c_0 \sin \nu - c_1 \cos \nu + \Delta \quad (4.21)$$

où Δ représente la quantité :

$$\Delta = \sin \nu \int_0^\nu \Omega \cos \nu d\nu - \cos \nu \int_0^\nu \Omega \sin \nu d\nu \quad (4.22)$$

En supposant $\Delta = 0$ on est en présence de l'ellipse de KEPLER. Il est aisé de calculer Δ si Ω est donné sous forme de série trigonométrique :

$$\Omega = \sum_{i=1}^n A_i \cos i\nu \quad (4.23)$$

En introduisant 4.23 dans 4.22 on obtient par un calcul facile :

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1-i^2} \cos i\nu - \cos \nu \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1-i^2} \quad (4.24)$$

d'où, en se référant à la formule 4.21

$$\frac{h^2}{Mr} = 1 - c_0 \sin \nu - \cos \nu \left(c_1 - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{i^2-1} \right) \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{i^2-1} \cos i\nu \quad (4.25)$$

La formule 4.25 représente l'équation de l'orbite de la Lune avec les coordonnées polaires r et ν . L'axe des x peut être librement déterminé en faisant $c_0 = 0$ et $\frac{h^2}{M} = p$ (le latus rectum). Il vient alors :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} \left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{i^2-1} - c_1 \right) \cos \nu - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{i^2-1} \cos i\nu \quad (4.26)$$

En examinant 4.26 il faut se rappeler que ν , et non pas t , est la variable indépendante de façon que le terme à droite est à considérer comme une quantité connue et non pas une fonction du temps. Le temps peut être calculé à partir de $1/r$ comme une fonction de ν .

La formule 4.26 souffre un cas d'exception pour $i = 1$ puisqu'alors le dénominateur s'annule. Or comme :

$$\frac{A_i}{i^2} \cos \nu - \frac{A_i}{i^2} = \frac{A_i}{i^2} (\cos \nu - \cos i\nu) \quad (4.27)$$

l'expression 4.27, lorsque i tend vers 1 a pour limite

$$\frac{A_i}{p} \left(\frac{\nu \sin i\nu}{2i} \right)_{i=1} = \frac{A_i}{2} \nu \sin \nu \quad (4.28)$$

Le résultat 4.28 prête à une prudence extrême. Si l'expression 4.23 était exacte, le terme croîtrait au delà de toute limite et il finirait par éloigner de plus en plus l'orbite de la forme elliptique. Il n'en est pas ainsi car on a négligé quelques quantités pour mettre Ω sous la forme indiquée. Tout au plus peut-on déduire qu'on ne devra compter sur l'exactitude de la solution que pendant un petit nombre de révolutions.

CLAIRAUT remarque qu'il faudra accorder la plus grande attention aux termes du développement 4.23 où i , sans être rigoureusement égal à 1, diffère seulement d'une quantité très petite. Ces termes en passant de r à $1/r$ acquièrent une valeur appréciable à travers le petit diviseur $i^2 - 1$ et peuvent donc devenir très sensibles dans $1/r$.

Les termes pour lesquels i est voisin de 0 méritent une égale attention. S'il est vrai qu'ils ne changent guère en passant de Ω dans $1/r$, il y aura sûrement des difficultés en calculant t en fonction de ν par la formule 4.8 car on est alors ramené à des intégrales de la forme :

$$\int^{\nu} \cos i\nu d\nu = \frac{\sin i\nu}{i} + cte \quad (4.29)$$

où le dénominateur est très petit. Ces termes, dans lesquels i diffère peu de 1 ou de 0, constituent la plus grosse difficulté du problème. Quant aux autres termes, leur calcul peut se faire d'une façon plus sommaire.

Le calcul des forces perturbatrices ϕ et T dans les expressions 4.13 et 4.14 peut se faire d'une façon directe. Soient X et Y les composantes de la force perturbatrice suivant les axes de coordonnées; x et y les coordonnées de la Lune; x' , y' , r' et ν' celles du Soleil. Soit encore D la distance de la Lune au soleil et M' le produit de la masse du Soleil par la constante de gravitation f . On a alors :

$$X = M' \left(\frac{x' - x}{D^3} - \frac{x'}{r'^3} \right) \quad (4.30)$$

$$Y = M' \left(\frac{y' - y}{D^3} - \frac{y'}{r'^3} \right) \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} -\Phi &= Xx + Yy \\ Tr &= xY - yX \end{aligned} \quad (4.32)$$

d'où l'on obtient :

$$\Phi = \frac{M'}{r} \left[(xx' + yy') \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{D^3} \right) + \frac{r^2}{D^3} \right] \quad (4.33)$$

$$T = \frac{M'}{r} (x'y - y'x) \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{D^3} \right) \quad (4.34)$$

Ces expressions se laissent transformer en utilisant d'abord les relations trigonométriques :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \nu \\y &= r \sin \nu \\x' &= r' \cos \nu' \\y' &= r' \sin \nu'\end{aligned}\tag{4.35}$$

puis en utilisant la formule pour la distance D entre le Soleil et la Lune :

$$D^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\nu - \nu')\tag{4.36}$$

qui doit encore être développée suivant les puissances de r/r'

$$\frac{1}{D^3} = \frac{1}{r'^3} \left[1 + \frac{3r}{r'} \cos(\nu - \nu') \right]\tag{4.37}$$

Dans cette formule les termes en $(r/r')^2$ peuvent être négligés vu que la quantité r/r' est une quantité très petite avoisinant $\simeq 1/400$. Finalement, en introduisant 4.35 et 4.37 dans 4.33 et 4.34 il en résulte :

$$\Phi = \frac{M'r}{r'^3} [1 - 3 \cos^2(\nu - \nu')]\tag{4.38}$$

$$T = -\frac{3M'r}{r'^3} \sin(\nu - \nu') \cos(\nu - \nu')\tag{4.39}$$

En transformant 4.38 et 4.39 à l'aide des théorèmes d'addition trigonométriques, en remplaçant M' par n'^2/a et en négligeant l'excentricité de l'orbite du Soleil, en posant :

$$r' = a'\nu' = n't + cte\tag{4.40}$$

on obtient pour Φ et T :

$$\Phi = -\frac{1}{2}n'^2r [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu')]\tag{4.41}$$

$$T = -\frac{3}{2}n'^2r \sin(2\nu - 2\nu')\tag{4.42}$$

Les équations du départ de CLAIRAUT 4.10, 4.11 et 4.15 donnent alors :

$$2\rho = -\frac{3n'^2}{Mp} \int r^4 \sin(2\nu - 2\nu') d\nu\tag{4.43}$$

$$dt = \frac{r^2 d\nu}{\sqrt{Mp(1 + 2\rho)}}\tag{4.44}$$

$$\begin{aligned}\Omega &= (1 + 2\rho) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{n'^2 r^3}{M} [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu')] - \frac{3}{2} \frac{n'^2 r^2}{M} \frac{dr}{d\nu} \sin(2\nu - 2\nu') - 2\rho\end{aligned}\quad (4.45)$$

Si l'on désigne par κ une quantité voisine à p et par :

$$\frac{n'^2 \kappa^3}{M} = \alpha \quad (4.46)$$

les formules précédentes donnent :

$$2\rho = -3\alpha \frac{\kappa}{p} \int \left(\frac{r}{\kappa}\right)^4 \sin(2\nu - 2\nu') d\nu \quad (4.47)$$

$$\Omega = \frac{\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{r}{\kappa}\right)^3 \left[1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu') + \frac{3}{2}\alpha \left(\frac{r}{\kappa}\right)^2 \frac{dr}{\kappa d\nu} \sin(2\nu - 2\nu') + 2\rho\right]}{1 + 2\rho} \quad (4.48)$$

Il faut éliminer maintenant r dans les formules 4.47 et 4.48 et développer Ω en série. La première approximation pour r est l'expression de l'équation de l'ellipse :

$$r = \frac{\kappa}{1 + e \cos \mu\nu} \quad (4.49)$$

μ = vitesse angulaire = $\sqrt{M\kappa/h^2}$. En négligeant en plus ρ dans l'équation 4.44, celle-ci devient :

$$dt = \frac{\kappa^2}{\sqrt{Mp}} (1 - 2e \cos \mu\nu) d\nu \quad (4.50)$$

d'où, en intégrant :

$$t + t_0 = \frac{\kappa^2}{\sqrt{Mp}} \left(\nu - \frac{2e}{\mu} \sin \mu\nu \right) \quad (4.51)$$

La deuxième expression 4.40 devient alors, en remplaçant t par 4.51 :

$$\nu' = m\nu + \sigma - \frac{2em}{\mu} \sin \mu\nu \quad (4.52)$$

avec :

$$m = \frac{\kappa^2 n'}{\sqrt{Mp}} m^2 = \alpha \frac{\kappa}{p} \quad (4.53)$$

peut être admis égal à 0 si l'on choisit proprement les origines de ν et de ν' . En appliquant la formule de TAYLOR avec :

$$\lambda = 2 - 2m \quad (4.54)$$

on obtient :

$$\cos(2\nu - 2\nu') = \cos \lambda\nu - \frac{4em}{\mu} \sin \mu\nu \sin \lambda\nu \quad (4.55)$$

$$\sin(2\nu - 2\nu') = \sin \lambda\nu + \frac{4em}{\mu} \sin \mu\nu \cos \lambda\nu \quad (4.56)$$

$\frac{\kappa^2}{\sqrt{Mp}}$ est le mouvement moyen de la Lune dans son orbite et m est le rapport des mouvements moyens du Soleil et de la Lune dans une première approximation, donc une grandeur parfaitement déterminable par observation. Il devient dès lors essentiel de déterminer d'autres paramètres du mouvement de la Lune en fonction de la quantité m et il faut d'abord déterminer la valeur de μ introduit dans 4.49. En écrivant :

$$c\Phi = (c - 1)\Phi + \Phi \quad (4.57)$$

on voit que $(c - 1)\Phi$ est l'angle à partir duquel le périégée de l'orbite lunaire est mesuré si en première approximation celle-ci est considérée comme une ellipse. En analysant 4.57 on s'aperçoit aussi que la direction du périégée n'est pas constante mais est soumise à une rotation avec une vitesse de :

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{Mp}}(c - 1)$$

Cette rotation est également un paramètre mesurable et il importe donc de déterminer la vitesse de rotation du périégée en fonction de la quantité m . Ω peut finalement être écrit sous la forme :

$$\Omega = -A\alpha \cos \lambda\nu - B\alpha \cos(\lambda - \mu)\nu - C\alpha \cos(\lambda + \mu)\nu - E\alpha \cos \mu\nu + P\alpha \quad (4.58)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{2} + \frac{3}{\lambda} \frac{\kappa}{p} \\ B &= e \left[-6 \frac{\kappa}{p} \frac{1 + \frac{m}{\mu}}{\lambda - \mu} - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{2m}{\mu} \right) + \frac{3}{4} \mu \right] \\ C &= e \left[-6 \frac{\kappa}{p} \frac{1 - \frac{m}{\mu}}{\lambda + \mu} - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{2m}{\mu} \right) - \frac{3}{4} \mu \right] \\ E &= -\frac{3}{2} e \\ P &= -\frac{1}{2} - 3c \frac{\kappa}{p} \end{aligned} \quad (4.59)$$

On a alors par la formule 4.26 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} = & \frac{1 + P\alpha}{p} \\ & - \frac{\cos \nu}{p} \left[C_1 + P\alpha + \frac{A\alpha}{\lambda^2 - 1} + \frac{B\alpha}{(\lambda - \mu)^2 - 1} + \frac{C\alpha}{(\lambda + \mu)^2 - 1} + \frac{E\alpha}{\mu^2 - 1} \right] \\ & + \frac{1}{p} \left[\frac{A\alpha}{\lambda^2 - 1} \cos \lambda \nu + \frac{B\alpha}{(\lambda - \mu)^2 - 1} \cos(\lambda - \mu)\nu \right. \\ & \quad \left. + \frac{C\alpha}{(\lambda + \mu)^2 - 1} \cos(\lambda + \mu)\nu + \frac{E\alpha}{\mu^2 - 1} \cos \mu \nu \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Différentes simplifications s'imposent. Ainsi on peut évaluer à 0 le coefficient de $\cos \nu$, puisqu'on a introduit $\cos \mu \nu$ au lieu de $\cos \nu$ et on obtient une relation pour déterminer C_1 , mais qu'on pourra laisser de côté, car C_1 ne figure dans aucune autre relation. Finalement, en remplaçant les constantes par leurs valeurs en fonction de μ et C_1 , il y a :

$$\frac{p}{\kappa} = 1 - \frac{\alpha}{2} + 3m^2 \left[\frac{1}{2(1-m)} - 4e \frac{2-m}{(2+\mu-2m)(2-\mu-2m)} \right] \quad (4.61)$$

De cette expression on trouve :

$$e = \frac{2em}{2(c^2 - 1)} \quad (4.62)$$

En éliminant e il vient :

$$c^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2 \quad (4.63)$$

ou bien :

$$c = 1 - \frac{3}{4}m^2$$

Le rapport des moyens mouvements du Soleil et de la Lune ayant pour valeur :

$$m = 0,0748 \quad (4.64)$$

il en résulte

$$1 - \mu = \frac{3}{4}m^2 = 0,00420 \quad (4.65)$$

tandis que l'observation donne :

$$1 - \mu = 0,00845 \quad (4.66)$$

La théorie fournit donc, pour le périégée, une vitesse qui n'est guère que la moitié de la vitesse réelle. Il fallait en conclure, ou que l'attraction newtonienne ne donne point le vrai mouvement, ou que la solution développée n'est pas propre à le déterminer.

Devant ce résultat CLAIRAUT resta d'abord perplexe et les importantes recherches qu'il avait fait d'abord en 1743-1744, puis de nouveau en 1746 lorsque le sujet du concours de 1748 de l'Académie fut publié et qui avait comme objet la question de trouver les causes des altérations que reçoivent les planètes de Jupiter et de Saturne dans leurs conjonctions et en général une théorie du mouvement de ces planètes, lui parurent vaines et il se mit à rechercher la cause de l'importante différence entre 4.65 et 4.66.

Afin de comprendre l'ampleur de la déception de CLAIRAUT il faut jeter un regard sur la totalité de ses recherches sur les trois corps et en particulier la théorie de la Lune tout en mettant ses efforts dans le contexte de ses relations avec D'ALEMBERT, CRAMER mais surtout EULER. Ses essais de 1743 et 1745 ont déjà été mentionnés au chapitre précédent et ses résultats de 1745 ont été présentés d'une façon détaillée dans le présent chapitre.

Mais il est intéressant de suivre le parcours de CLAIRAUT à travers sa correspondance surtout celle avec CRAMER et EULER mais aussi à travers les péripéties des concours et prix de l'Académie Royale des Sciences.

Pour des raisons de priorité, CLAIRAUT avait présenté le 20 décembre 1743 son mémoire : «*De l'Orbite de la Lune dans le système de M. NEWTON*» [171] qu'il avait rédigé de septembre à novembre de la même année. Mais son propre manque de satisfaction le fait revenir plus d'une fois sur le sujet dans ses relations épistolaires. Ainsi dans une lettre à CRAMER du 13 avril 1744 [174] il revient à son texte de l'année précédente quand il dit : «*Quant à ce que j'ai fait sur la Théorie de la Lune il est vrai comme vous le pensez que je compte le donner dans nos mémoires. J'avais pensé d'abord à en faire un ouvrage à part mais quantités d'autres occupations et la faiblesse actuelle de ma santé, m'obligent à me contenter présentement de ce que j'ai, dont la plus grande partie concerne la figure de l'orbite de la Lune que j'ai déterminé directement ...*

»

CRAMER n'est pas un concurrent mais EULER peut en être un, et CLAIRAUT veut savoir ce que celui-ci pense de la question. Ainsi après avoir envoyé son mémoire de 1743 à St-Petersbourg il demande, dans sa lettre du 23 août 1744, si EULER ne travaille pas lui-même au problème : «*Une chose que je serais surtout curieux de savoir, c'est si vous avez été plus satisfait que moi de l'article de NEWTON du mouvement des nœuds de la Lune lorsqu'il avance que la vitesse médiocre du nœud est celle qui serait la moyenne entre toutes les vitesses qu'il aurait en regardant le Soleil et le nœud comme fixe pendant chaque lunaison. Et en supposant ensuite que le mouvement moyen du nœud se trouve en prenant le milieu entre tous les mouvements médiocres, j'ai cherché la démonstration de cette proposition mais je n'ai pas été satisfait de ce que j'ai fait la dessus*». CLAIRAUT fait référence ici au **Corollaire 2** à la PROPOSITION XXX du LIVRE III des «PRINCIPIA».

Il mènerait trop loin de poursuivre la déduction de NEWTON ; il est plutôt à relever que ces phrases démontrent l'intérêt constant de CLAIRAUT pour l'orbite de la Lune et les irrégularités en résultant en vue de parfaire sa propre solution. D'ailleurs CLAIRAUT continue à marquer son intérêt pour la même question en y revenant dans une lettre du 19 janvier à EULER.

Le 5 décembre 1744 CLAIRAUT avait terminé la lecture de son mémoire de 1743 devant l'Académie Royale des Sciences de Paris. Et il reprend son travail de suite comme il ressort de sa correspondance. Mais EULER commence aussi à rassembler ses premiers résultats. Ainsi il écrit dans une lettre du 8 mai à l'astronome et mathématicien J.N. DELISLE à Paris «*Après avoir longtemps travaillé en vain à appliquer la théorie au mouvement de la Lune, j'ai enfin réussi - et je ne trouve en état de déterminer la place de la Lune plus exactement et plus aisément que par ses tables prétendues sur la théorie. Dès que j'aurai un peu de temps, je l'emploierai à calculer des tables de la Lune.*» [175] EULER rend vraie son annonce en 1745 en publiant les «*Novae et correctae Tabulae as loca Lunae coruputanda.*» [176]

La théorie de la Lune eut encore un autre impact par la prise en compte d'inégalités sensibles dans le mouvement de Saturne découvertes par P. Ch. LEMONIER et publiées dans les Mémoires de Paris en 1746/1751 [177]. A la suite de la lecture de ce mémoire les commissaires de l'Académie prirent la décision de proposer comme sujet du concours de 1746 la question de trouver les causes des alternatives que reçoivent les planètes de Jupiter et de Saturne dans leurs conceptions et en général une théorie du mouvement de ces planètes. Cette question c'est révélée par après comme étant d'une importance capitale dans le développement de la mécanique céleste.

CLAIRAUT dans sa lettre du 22 avril 1746 annonça la nouvelle à EULER «*Le sujet que nous avons proposé est bien autrement traitable pour de grands géomètres comme vous, il est question de trouver les causes des altérations que reçoivent les planètes de Jupiter et de Saturne dans leurs conjonctions et en général une théorie du mouvement de ces planètes. A vous dire vrai, je m'attends à vous le voir traiter avec toute la supériorité que vous avez dans toutes les grandes matières.*»

Le concours de 1746 sur Jupiter et Saturne chevauchait un autre concours que l'Académie avait lancé en 1745 et qui fut prolongé jusqu'en 1747 en doublant le montant du prix. Le sujet était la détermination de l'heure en mer et démontre l'intérêt qui régnait aussi en France à connaître une méthode pour la détermination exacte de la longitude d'un vaisseau [178]. Le jury pour ce concours fut composé de CASSINI, CAMPUS, CLAIRAUT, BOUGUER et de MONTIGNY.

Le prix fut partagé entre D. BERNOULLI et L. EULER. CLAIRAUT annonce cette nouvelle à EULER qu'il présume être l'auteur d'un des mémoires couronnés et l'exhorte en même temps afin de participer au concours sur les inégalités de Jupiter et Saturne «*... je me flatte que j'en aurai beaucoup plus à lire ce que vous aurez fait sur la question de Saturne qui est bien plus intéressante pour les mathématiciens, et que vous êtes capable de traiter avec toute votre supériorité.*»

Dans cette même lettre, CLAIRAUT fait état de ses propositions relatives à la théorie de Saturne. Il ne publiera ses résultats qu'en 1760. EULER dépose sa pièce pour le concours de 1746 le 27 juillet 1747, comme il l'annonce dans sa lettre à CLAIRAUT du 10 juin 1747. Il s'agit de son mémoire «*Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*» [179] qui sera publié en 1749 comme «*Pièce qui a remportée le prix de l'Académie Royale des Sciences en 1748*» [180]. Ce mémoire joua un rôle important dans la discussion sur la modification de la loi de la gravitation universelle comme il va apparaître dans la suite.

Le 3 septembre 1747 CLAIRAUT, dans l'attente de pouvoir prendre connaissance du travail d'EULER sur Jupiter et Saturne pour le concours de 1746, dont il va être désigné membre du jury le 6 septembre, communique, non seulement ces résultats d'alors, mais aussi ses réflexions sur les difficultés contre lesquelles il a buté, à EULER. «*J'ai aussi achevé tout ce que j'avais entrepris sur cette matière et j'en ai occupé longtemps l'Académie*» CLAIRAUT fait référence ici à ses multiples interventions devant cette illustre société. Ainsi, ayant obtenu des résultats importants vers la fin de 1746 [181], il dépose le 7 janvier 1747 un premier pli cacheté, bientôt suivi de deux autres déposés le 15 mars respectivement le 14 juin. Le même jour, d'ALEMBERT avait commencé la lecture de ses propres recherches devant l'Académie, recherches incitées sûrement par la grande inégalité de Jupiter et Saturne comme sujet du concours de 1746 et qui faisait éclater au grand jour l'opposition de caractère entre les deux savants. Le titre du mémoire de d'ALEMBERT était «*Méthode générale pour déterminer les orbites de toutes les planètes, eu égard à l'action mutuelle qu'elles ont les unes sur les autres*» [182]. Le jeu du dépôt de pli cachetés se poursuit entre CLAIRAUT et d'ALEMBERT, surtout après la déclaration publique du premier concernant la loi de NEWTON. CLAIRAUT lut ses recherches devant l'Académie lors des séances du 28 juin, 1, 5 et 15 juillet, 11, 23 et 28 août, 2 septembre 1747 et les publia sous forme résumée dans son mémoire «*Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle*» [172].

CLAIRAUT poursuit alors ses développements dans sa lettre du 3 septembre : «*J'ai tout expliqué excepté mon dernier résultat en nombres contenant des choses assez singuliers sur le mouvement des apsides de la Lune et sur le système général des planètes pour mériter d'être lues à notre rentrée publique ; je me contenterai de les remettre cachetées à notre secrétaire mercredi prochain dernier jour d'assemblée avant de prendre les pièces du prix*» Effectivement le 6 septembre 1747, CLAIRAUT déposa devant l'Académie un nouveau pli cacheté concernant la difficulté de concilier le mouvement observé de l'apogée de la Lune avec celui qui pouvait être obtenu par le calcul à l'aide de la loi de la gravité universelle, c'est-à-dire la discrédance existant entre les résultats 4.65 et 4.66. CLAIRAUT fait alors un exposé rapide de ses résultats tel qu'ils sont consignés dans ses mémoires. En partant de l'expression 4.15 ci-avant, CLAIRAUT fait le développement d'une formule analogue à 4.45 et parvient finalement à une formule pour $1/r$ assez similaire à 4.60 qui, à l'aide des trois équations, peut être simplifiée pour prendre la forme :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k} \left(1 - e \cos mU + \beta \cos \frac{2}{n} U + \gamma \cos \left(\frac{2}{n} - mU \right) + \delta \cos \left(\frac{2}{n} + mU \right) \right) \quad (4.67)$$

Avec r le rayon vecteur quelconque, U l'angle que fait ce rayon avec un axe fixe, e l'excentricité de l'ellipse. CLAIRAUT dit disposer des paramètres entrant dans 4.67, c'est-à-dire des éléments de l'ellipse mobile qui sert de base à l'orbite lunaire vraie. Il dit encore pouvoir calculer le mouvement des apsides, mais il ne continue pas cet exposé, sans doute pour ne pas avouer les différences avec l'observation du mouvement du périhélie qu'il a calculé et qui est la moitié de la grandeur observée.

Le 6 septembre, jour où le mémoire d'EULER sur le concours de Saturne lui fut confié, CLAIRAUT déposa un nouveau pli cacheté devant l'Académie. Le texte faisait état de la difficulté de concilier le mouvement observé de l'apogée de la Lune avec celui qui pouvait être obtenu par le calcul à l'aide de la loi de la gravitation universelle. Ce pli fut ouvert au cours de la séance de l'Académie du 2 décembre 1747 et sa lecture révèle que : *«Il me semble que la proposition newtonienne selon les carrés des distances n'est vraie qu'à peu près dans les forces des corps célestes, et que peut-être elle s'écarte d'autant plus de la vérité que les distances sont grandes.»* avoue CLAIRAUT.

CLAIRAUT poursuit dans sa lettre *«Il est vrai qu'en ajoutant quelque autre terme, on sent bien que la théorie cadrera assez bien avec les phénomènes. Mais il faut ce me semble que ce terme soit tel qu'aux distances de Mercure, de Venus, de la Terre et de Mars, il soit presque insensible vu l'extrême petitesse du mouvement des apsides. Et si comme il le semble d'abord par votre ouvrage la Loi du carré s'écartant sensiblement à la distance de Saturne et de Jupiter et qu'il fallait encore ajouter là des termes qui ne fussent sensibles qu'à cette distance, j'avoue que toute la gravitation ne me paraîtrait qu'une hypothèse controuvée.»*

CLAIRAUT propose alors une loi comme :

$$\frac{1}{d^2} + f(d) \quad (4.68)$$

Avec comme $f(d)$ une petite fonction des distances assez sensible à de petites distances comme celle de la Terre à la Lune et presque nulle dans les grands éloignements. Il remarque que sa proposition diffère sur un point important de celle d'EULER. En effet pour ce dernier le terme correctif croît avec la distance tandis que pour CLAIRAUT le terme $f(d)$ est une fonction décroissante.

Le 15 novembre 1747 CLAIRAUT déclara dans la séance publique de l'Académie son impossibilité d'expliquer le mouvement de l'apogée lunaire par la simple considération de la loi de NEWTON.

4.3 Modification de la loi de la gravitation universelle

SI L'ANNONCE PUBLIQUE de CLAIRAUT le 15 novembre 1747 devant l'assemblée publique de l'Académie des Sciences de Paris fût un scandale tout relatif, il n'était pourtant pas seul dans son initiative parce que Jean D'ALEMBERT et L. EULER s'étaient attaqués eux aussi au problème général des trois corps et ils n'étaient pas plus que CLAIRAUT capables de calculer le mouvement angulaire vrai de l'apogée lunaire, mais arrivaient dans leurs calculs à seulement la moitié de la valeur réelle. Mais ce qui distinguait CLAIRAUT des deux autres fut sa proposition pour remédier à cette anomalie. Au lieu de se contenter de suggérer l'existence d'une force encore inconnue ayant une influence sur le mouvement des planètes et satellites, CLAIRAUT émit l'hypothèse que la loi de la gravitation universelle n'était peut-être pas proportionnelle à la loi des carrés inverses tel que l'avait prouvé NEWTON, mais qu'elle avait une forme légèrement différente.[183]

Dans sa lettre du 7 décembre 1747 à EULER, CLAIRAUT donne ses réflexions dans tous les détails : *«Je ne vois pas encore la nécessité d'employer les tourbillons pour remédier à la loi du carré des distances. Il me semble que vous vous rapprochez assez des observations par votre addition à votre pièce sur Saturne»* - en effet le mémoire d'EULER comporta un *«Supplément»* - *«pour croire que si vous aviez eu de meilleurs observations, la théorie se trouverait tout à fait d'accord avec l'astronomie en ce point. Quant aux autres planètes, à Mercure, Venus, etc., il est certain qu'elles cadreront toute fort bien avec ma loi d'attraction. Que le terme à ajouter à $1/d^2$ soit par exemple : $l^2/357d^4$ - l étant la distance de la Lune à la Terre et d une distance quelconque - car à la distance de Mercure au Soleil on trouverait un mouvement d'aphélie si petit qu'il ne serait sûrement pas démenti par les observations ; et à la distance des autres planètes il serait encore moins sensible. Au reste je ne crois pas que ce terme $l^2/357d^4$ soit le vrai. Ce doit être quelque fonction et non une puissance. Car la loi d'attraction $1/d^4$ donnerait sur la Terre une attraction beaucoup trop considérable aux corps contigus ou seulement voisins.»*

Dans une lettre du 30 septembre 1747 à CLAIRAUT, EULER avait donné raison à celui-ci pour ce qui concerne l'exactitude de la loi de NEWTON : *«Que les forces, qui agissent sur la Lune, ne suivent pas exactement la règle de NEWTON, je puis alléguer plusieurs preuves, et en effet celle que vous tirez du mouvement de l'apogée est la plus éclatante, et je l'ai fait bien remarqué dans mes recherches sur la Lune, où j'ai trouvé que selon la théorie newtonienne le mouvement moyen de la Lune devrait être au mouvement de l'apogée comme 10.000.000 à 84477, le nombre 84477 étant plus que deux fois plus grand que 41046, comme vous le remarquez. Le mouvement de la ligne des nœuds, quoique la théorie soit assez d'accord avec les observations pourtant la petite différence peut aussi suffire de montrer l'insuffisance de la théorie.»*

Un peu plus loin dans la même lettre, EULER veut expliquer ces différences

entre les valeurs calculées et celles observées : « Cette circonstance me rend les tourbillons ou quelconque autre cause matérielle des forces très probable, puisqu'il est alors aisé de concevoir, que ces forces doivent être altérées, quand elles sont transmises par quelque autre tourbillon. Ainsi je soupçonne que la force du Soleil sur la Lune est altérée considérablement dans les oppositions, parce que alors elle passe par le tourbillon de la Terre. Et de même je crois que la force du Soleil sur les planètes supérieures est dérangée à cause du passage par les atmosphères ou tourbillons des inférieures : et pour la même raison la force de Jupiter sur Saturne dans les oppositions doit être considérablement dérangé. Par là on concevra aisément, que les planètes supérieures, même sans avoir égard à leurs action mutuelle, sont sujettes à des plus grands dérangements que les inférieures ; et cette explication me paraît plus probable, que celle que vous soupçonnez, que les forces soient comme $1/\text{dist}^2$ plus une petite fonction des distances assez sensible à de petites distances : car quoique la Lune semble confirmer cela, pourtant le mouvement régulier de Mercure me paraît renverser cette explication. » EULER mentionnait également ces discordances, sans pour autant revenir à la théorie des tourbillons dans une lettre à MAUPERTUIS qu'il écrivit le 2 décembre.

Il y écrivit : « Mrs CLAIRAUT et D'ALEMBERT ont bien raison de soutenir que si l'attraction de la Terre diminuait exactement en raison réciproque des carrés des distances, le mouvement de l'apogée de la Lune devrait être deux fois plus rapide qu'il n'est en effet. J'avais d'abord remarqué la même chose, laquelle avec quelques autres circonstances à savoir que la parallaxe de la Lune est plus grande qu'elle ne devrait être selon la théorie, et qu'il y a quelques inégalités dans le mouvement de la Lune qui sont incompatibles avec la théorie de NEWTON - m'a porté à soutenir que les forces des corps célestes ne suivent pas exactement la loi newtonienne ce que j'ai bien soigneusement étalé dans ma pièce sur Saturne. [185] Mais j'ai aussi remarqué que cette irrégularité peut non seulement subsister avec la théorie de NEWTON, mais qu'elle en est une suite nécessaire, car supposant que les moindres molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés des distances, pour les corps grands cette même loi ne trouve plus lieu que lorsque les corps sont parfaitement sphériques. J'ai rapporté toutes ses remarques dans une pièce sur le vrai mouvement des Planètes, que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie (de Berlin) il y a quelque temps ... »

EULER fait allusion à son essai : « Recherches sur le mouvement des corps célestes en général » [186] paru dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 1747/1749. Tout au début de ce texte EULER dit « que quelques recherches et réflexions qu'il à faites tant sur l'origine de ces forces, que sur les dérangements qu'on remarque dans le mouvement de la Lune, et des Planètes supérieures, (l'ont) porté à croire, que les forces, dont on soutient, que les Planètes s'attirent les unes et les autres, ne suivent pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, et il (lui) semble presque, que l'aberration de cette raison croît avec les distances, puisque quelques inégalités périodiques quand ne saurait attribuer à l'action des autres planètes, se trouvent beaucoup

plus grande dans Saturne que dans les autres Planètes.»

EULER recherche une raison pour expliquer le non respect de la loi newtonienne dans la mécanique céleste. Il croit l'avoir trouvé dans le fait que les planètes diffèrent plus ou moins de la forme sphérique : NEWTON n'a démontré cette loi des forces qu'au cas où la Planète est ronde, est composée de matière homogène ou du moins de couches sphériques homogènes. Or dans le cas où la figure de la Planète n'est pas sphérique, il n'est pas difficile de prouver par le calcul que la force résultante de toutes les attractions des particuliers de la matière ne décroît plus dans la raison des carrés de la distance et qu'elle est dirigée vers le centre de la Planète, ou vers quelqu'un autre point fixe.

Dans son texte sur Saturne, qu'il mentionne envers MAUPERTUIS, ce qui laisse croire que celui était au courant du contenu déjà en 1747, EULER exprime également ses doutes quant à la loi de la gravitation : *«Qu'il me soit permis cependant de découvrir mes pensées sur ce sujet. Ayant comparé fort soigneusement les observations de la Lune avec la théorie, j'ai trouvé que la distance de la Lune à la Terre n'est pas si grande qu'elle devrait être selon la théorie : d'où il s'ensuit que la gravité de la Lune vers la Terre est un peu moindre, que selon la raison inverse des carrés des distances : et quelque petites irrégularités dans le mouvement de la Lune, qu'on ne saurait expliquer par cette théorie, n'ont encore d'avantage confirmé dans ce sentiment. Il me semble donc que la proportion newtonienne selon les carrés des distances n'est vraie qu'à peu près dans les forces célestes et que peut être elle s'écarte d'autant plus de la vérité que les distances sont grandes.»*

Après sa lettre du 30 septembre 1747, EULER ne revint plus à la théorie cartésienne des tourbillons pour expliquer le problème des orbites des planètes et de la Lune, une explication constituant une véritable régression vis-à-vis de la science moderne d'alors. CLAIRAUT l'avait rendu d'ailleurs attentif que cette hypothèse était superflue. N'écrivait-il pas, comme nous l'avons vu, dans sa lettre du 7 décembre 1747 : *«Je ne vois pas encore la nécessité d'employer les tourbillons pour remédier à la Loi du carré des distances.»*

CLAIRAUT se devait d'intégrer sa proposition de modification de la loi d'attraction dans sa théorie de la Lune. Ainsi il introduisit une loi composée de deux termes exprimés par la formule.

$$\frac{m}{r^2} + \frac{kM}{r^3} \quad (4.69)$$

le terme additionnel kM/r^3 aurait pour effet de produire un mouvement direct du périégée ; il était donc facile de déterminer le coefficient k de façon à rétablir l'accord entre les deux vitesses fournies par l'observation et par la théorie.

CLAIRAUT revint ainsi à un cas de figure déjà examiné par NEWTON dans la section IX du LIVRE I des «PRINCIPIA» : *«Les mouvements des corps sur des orbites mobiles ; et le mouvement des apsides»*. La solution newtonienne a été examinée dans un chapitre précédent. NEWTON montre, sans doute aussi dans le cadre de la recherche d'une solution au problème de la Lune, par un

exemple numérique qu'une loi légèrement différente de la loi de gravitation apporte un mouvement des apsides. Il est supposé ainsi que l'apside d'un corps en révolution progresse de 3° par révolution. On arrive alors à établir que la force centripète est inversement comme : $-2, 4/243$. « *On peut en déduire que la force centripète décroît dans une raison quelque peu plus grande que la raison carrée ; mais approchant $59, 3/4$ fois plus du carré que du cube* ». NEWTON conclut dans le **Corollaire 2** à la PROPOSITION XLV ; problème XXXI : « *Ainsi si le corps, par une force centripète qui soit réciproquement comme le carré de la hauteur, fait sa révolution dans une ellipse qui ait son foyer dans le centre des forces, et qu'à cette force centripète on ôte ou on ajoute une force nouvelle quelconque ; on peut connaître (par l'exemple numérique cité) le mouvement des apsides causé par cette force nouvelle et réciproquement* ».

CLAIRAUT, fort des ses connaissances des «PRINCIPIA», considère le cas :

$$\begin{aligned} T &= 0 \\ \Phi &= -\frac{kM}{r^3} \end{aligned} \quad (4.70)$$

de sorte que la Lune serait attirée seulement par la Terre, l'attraction étant :

$$S = -\left(\frac{M}{r^2} + \frac{kM}{r^3}\right) \quad (4.71)$$

En utilisant les formules du chapitre précédent, on aurait alors :

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \frac{d^2\left(\frac{h^2}{r}\right)}{d\nu^2} + \frac{h^2}{r} - M - \frac{kM}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

ou bien :

$$\frac{d^2}{d\nu^2} \left(\frac{h^2 - kM}{r} - M \right) + \frac{h^2 - kM}{h^2} \left(\frac{h^2 - kM}{r} - M \right) = 0 \quad (4.73)$$

Cette équation linéaire peut être intégrée en désignant par H la constante d'intégration et en disposant de la direction de l'axe des x ; il vient :

$$\frac{h^2 - kM}{r} - M = H \cos \left(\nu \sqrt{1 - \frac{kM}{h^2}} \right) \quad (4.74)$$

Pour r il en résulte l'expression :

$$r = \frac{\rho'}{1 + e' \cos \mu\nu} \quad (4.75)$$

avec :

$$\begin{aligned}
\rho' &= \frac{h^2}{M} - k \\
e' &= \frac{H}{M} \\
\mu &= \sqrt{1 - \frac{kM}{h^2}} = \sqrt{\frac{M\rho'}{h^2}}
\end{aligned} \tag{4.76}$$

L'intervalle angulaire entre un maximum et un minimum du rayon r est de :

$$\frac{\Pi}{\mu} = \frac{\Pi}{\sqrt{1 - \frac{kM}{h^2}}} \tag{4.77}$$

de sorte que la ligne des apsides tourne dans le sens direct. La vitesse est égale à la vitesse moyenne du rayon vecteur multipliée par :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{kM}{h^2}}} - 1 \tag{4.78}$$

On peut écrire maintenant :

$$r = \frac{\rho'}{1 - e' \cos(\nu - \varpi)} \tag{4.79}$$

Avec :

$$\varpi = (1 - \mu)\nu \tag{4.80}$$

la Lune se mouvait toujours encore sur une ellipse ayant son foyer au centre de la Terre avec un grand axe tournant dans le sens direct de la quantité indiquée.

CLAIRAUT n'était pas satisfait de cette solution par trop facile, sans doute parce qu'elle aurait non seulement chambardé l'idée de l'attraction réciproque entre les corps célestes mais sans doute aussi par la constante ad hoc : k , n'ayant pas de signification physique réelle et servant uniquement à faire concorder observations et théorie. Il continuait ses recherches en reprenant les déductions analytiques de sa théorie et se rendait compte que le désaccord entre les vitesses fournies par l'observation et la théorie n'était pas dû à l'inexactitude de la loi de NEWTON mais bien à l'imperfection de sa solution.

Revenons à l'évolution de la question à travers la correspondance et les travaux de CLAIRAUT. Après son annonce publique du 15 décembre 1747 devant l'Académie, CLAIRAUT avait eu à répondre à diverses critiques suscitées par sa déclaration. Son premier but étant alors de documenter l'originalité de ses conclusions concernant le mouvement de l'apogée de la Lune, il relut le texte de sa déclaration devant l'Académie dès le 2 décembre et il termina cette lecture le 20 janvier 1748. Le texte lu fût le même que celui qu'il avait déposé comme

pli cacheté le 6 septembre précédent. Dans le même but, les 20 et 23 décembre 1747 il présenta des *«Remarques sur les articles qui ont rapport à la théorie du mouvement de l'apogée de la Lune, tant dans le Livre des Principes de M. NEWTON que dans le Commentaire des P.P. JACQUIER et Le Seur»* [187]

Or voici que G.L. LECLERC DE BUFFON avait présenté devant l'Académie le 24 janvier 1748 ses *«Réflexions sur la loi de l'attraction et sur le mouvement des apsides»* [188] qui critiquait la position de CLAIRAUT, la désignant comme une conclusion hâtive sans évidence physique aucune. Celui-ci fut obligé de répondre par un autre texte : *«Réponse aux réflexions de M DE BUFFON sur la loi de l'attraction et sur le mouvement des apsides»*. [189]

Comme déjà dit, CLAIRAUT continuait ses recherches, mais, même s'il fait référence *«aux nouvelles choses sur l'attraction»*, il n'y a que peu d'éléments pour reconstituer ses travaux. En effet CLAIRAUT n'intervient plus à l'Académie sur ce sujet et les pièces de sa correspondance sont peu nombreuses si l'on fait abstraction de ses relations épistolaires avec EULER et CRAMER. Une exception constitue une lettre à BRADLEY du 19 août 1748 [190]. Elle apporte d'intéressantes précisions sur la position de CLAIRAUT en ce moment. Elle est encore assez proche de celle du 15 novembre 1747 mais CLAIRAUT hésite maintenant entre l'emploi d'une loi d'attraction du type

$$\frac{1}{d^2} + \frac{a}{d^m} + \frac{b}{d^n} \quad (4.81)$$

et l'introduction en plus de *«l'attraction ordinaire de M. NEWTON (de) quelque autre espèce d'attraction particulière à la Terre, et qui agirait sur la Lune. Mais il reste persuadé qu'il faut autre chose que l'attraction ordinaire inversement proportionnelle aux carrés des distances»*.

Le 10 février 1749 dans une lettre à CRAMER, CLAIRAUT parle pour la première fois de la méthode qu'il est en train d'employer pour la révision de sa théorie : *«Pour moi j'ai repris tout le travail de la détermination de l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices. J'ai presque tout achevé le calcul qui doit conduire à des tables de la Lune. Mais il faudra le recommencer pour éviter les erreurs si aisés à commettre dans des calculs aussi fâcheux. J'espère que je serai récompensé de ma peine»* .

Un autre témoignage de la réflexion sur la loi de la gravitation de CLAIRAUT subsiste dans son expertise sur la deuxième édition de l'ouvrage de son collègue Pierre BOUGUER : *«Entretiens sur la cause de l'Inclinaison des Orbites des Planètes»* qu'il émit en 1748. Celui-ci avait ajouté à la nouvelle édition une section *«Sur l'institution des lois de l'attraction»* où, en se référant à KEILL [191] et MAUPERTUIS, [192] il proposa une loi composite du type $m/x^2 + n/x^3$ où m désignait l'intensité de la force attractive entre les molécules agissant entre elles suivant la loi newtonienne et n le nombre de molécules interagissant suivant une loi inverse des cubes des distances. De cette façon chaque corps attirerait en accord avec les lois gouvernant la matière qui le compose. BOUGUER cite même les recherches que CLAIRAUT avait entreprises sur l'orbite de la Lune

pour affirmer que celle-ci était de nature composite. CLAIRAUT déclarait dans [189] que la loi proposée par BOUGUER n'était pas contraire à ses recherches mais il préférerait la sienne, étant plus générale, car s'appliquant à tous les corps.

Fin de l'année 1748, CLAIRAUT revint à la charge. Le 20 décembre il fit parapher par le secrétaire perpétuel de l'Académie de Paris un papier concernant *«Les principes d'un mémoire sur l'orbite de la Lune»*. Ce mémoire fut déposé ensuite sous forme de pli cacheté le 21 janvier 1749. Il sera lu par CLAIRAUT le 15, 18 et 22 mars 1752 avec comme titre : *«De l'orbite de la Lune, en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices»* [193]. Ce mémoire fut également adressé au président de la *«Royal Society»* le 26 janvier 1749. Toute cette action avait comme but unique de préserver les droits de priorité de CLAIRAUT vis-à-vis de ces concurrents.

Cette démarche ressortit de sa lettre à CRAMER du 3 juin 1749 : *«Vous saurez donc qu'il y a environ 6 mois et très peu de temps après avoir envoyé mon mémoire en Angleterre, en Italie et à Bâle, j'ai trouvé par une considération dont il était si difficile de se douter que personne n'y a encore pensé, que j'ai trouvé dis-je que l'apogée de la Lune se mouvait par la théorie de l'attraction ordinaire, dans le temps que demandent les observations ou du moins dans un temps fort proche du vrai.»*

«Comme il était fort important pour moi de ne pas me laisser prévenir par personne sur une chose de cette nature, j'ai envoyé à Londres un paquet cacheté qui contenait mon nouveau résultat en priant Mr FOLKES de ne le faire ouvrir que lorsque je le lui mandera et j'ai usé de cette même précaution ici à l'Académie. Mon intention était par ce moyen d'éviter d'être relevé par personne qui put se vanter de m'avoir redressé et d'attendre à lâcher moi-même ma rétraction que j'eusse achevé entièrement le calcul qui m'y avait conduit. Comme j'étais bien aisé que cette rétraction parût en même temps que mon mémoire et que notre volume est enfin achevé d'imprimer, j'ai depuis très peu de temps lu à l'Académie un écrit dans lequel j'annonce qu'après avoir considéré la question sous un point de vue qui n'a pas encore été envisagé de personne, je suis arrivé à trouver le vrai mouvement d'apogée sans employer d'autre force que celle qui agit en raison renversée du carré de la distance. J'imprime cet écrit dans le volume de 1745 avec le mémoire [194] dont il est le correctif, mais je ne donne pas la démonstration de mon nouveau résultat parce qu'il me faut encore quelques temps (peu à ce que j'espère) pour compléter la théorie de la Lune et que je suis bien aise de donner toute ma théorie à la fois.»

Dans une lettre datée du 19 juin 1749 à EULER, CLAIRAUT fit le rapport de sa présentation devant l'Académie le 17 mai 1749 et de sa rétraction : *«M. GRISCHOW vous a rendu fidèlement ce que j'ai communiqué à l'Académie, en vous mandant que j'avais trouvé le moyen de concilier la théorie de l'attraction newtonienne avec les phénomènes par rapport au mouvement de l'apogée de la Lune. Je lus devant lui à une de nos assemblées un écrit dans lequel j'annonçais qu'après avoir examiné la question de nouveau. J'étais parvenu à trouver à peu près le vraie mouvement des apsides de la Lune, sans employer d'autres forces que celles qui agissent en raison renversées du carré des distances.»*

«Je n'ai point communiqué à l'Académie comme vous paraissez le croire la méthode qui m'a conduit à ce nouveau résultat. J'ai crû devoir me contenter de la remettre dans un paquet cacheté entre les mains du secrétaire, précaution que j'ai prise aussi pour l'Académie de Londres ou l'on épluche depuis longtemps mon mémoire avec le plus grand désir de me relever. La crainte de l'être par un autre que par moi même m'a fait prendre ces mesures et m'a forcé même de déclarer le fait quoique je n'eusse d'abord envie d'en parler qu'en donnant ma nouvelle théorie de la Lune qui est presque toute prête».

CLAIRAUT se plaint alors des tracasseries que sa rétraction lui à causées : «Quelques newtoniens non géomètres ont cru tout perdu si l'on introduisait d'autres forces que celles de Mr NEWTON et m'ont accablé de mauvaises objections que j'aurais dû mépriser mais auxquelles j'ai eu la faiblesse de répondre». CLAIRAUT pense ici surtout à BUFFON et à l'astronome LEMONNIER.

Il devient plus explicite quant à ses «tracasseries» dans sa lettre à CRAMER du 26 juillet 1749. «Ma rétractation à causé en effet du scandale, mon cher Monsieur, et m'a attiré autant de tracasseries que l'avait fait le mémoire ou j'accusais l'attraction d'insuffisance. Mr de BUFFON et LEMONNIER ont triomphé. Ce dernier n'a pas ouvert la bouche dans l'Académie. Mais l'autre à voulu faire croire que ses objections avaient dû m'aider à reconnaître la vérité». CLAIRAUT présenta alors une «Exposition abrégée de ce qui a été dit dans l'Académie sur le mouvement de l'apogée de la Lune et sur la Loi de l'attraction» [195] dans laquelle il remettait les choses au point. De ce texte suivit toute une polémique conduisant à des affirmations et des réponses que l'Académie décida d'interrompre pour insérer les textes en question dans le volume de 1745, dont la publication fut encore une fois retardée.

Il revient alors au sujet principal et il écrit : «Mrs D'ALEMBERT et EULER ne se doutaient point de l'artifice qui m'avait conduit à mon nouveau résultat. Ce dernier m'a écrit deux fois pour me dire qu'il avait fait vainement tous les efforts pour trouver la même chose que moi et qu'il me priait instamment de lui mander comment j'avais pu y parvenir. Je lui ai mandé en quoi cela pouvait consister à peu près. Il me paraît bien comme à vous que Mr NEWTON à vacillé sur la question de l'apogée. Il n'a certainement jamais résolu le problème et n'aurait pas été fâché de faire croire qu'il s'était satisfait sur cette matière. Les principes qu'il laisse entrevoir me paraissent faux.»

«J'ai été attaqué encore par un Bénédictin anglais [196] qui a prétendu trouver un défaut dans ma solution et en donner trois autres par lesquelles il arrive au vrai résultat. Mais il est bien aisé de lui répondre et de faire voir qu'il n'a pas la moindre idée de ma méthode quoi-qu'il l'ait eu entre les mains avec plusieurs éclaircissements de ma part. Quant aux siennes, ce qu'il y a de bon c'est qu'elles ne donnent toutes les trois que la moitié du mouvement de l'apogée ainsi que ma première solution».

Depuis le 17 mai 1749 tout est rentré dans l'ordre. Les doutes de CLAIRAUT se sont découverts comme étant une preuve supplémentaire sinon décisive pour la théorie newtonienne. Les autres problèmes mineurs auxquels il fut fait référence dans les textes et lettres entre 1745 à 1749 s'avèrent être non existants

respectivement furent résolus avec le temps et il appartenait à LAPLACE de réduire toutes les inégalités des planètes et de la Lune, c'est-à-dire de montrer que toutes les fois où la trajectoire s'écarte de la forme keplerienne, l'écart peut être totalement et exactement expliqué si l'on tient convenablement compte de toutes les interactions de gravitations pertinentes.

Il restait bien EULER. Malgré les explications de CLAIRAUT, celui-ci demeura encore pendant plusieurs années persuadé que la théorie newtonienne de la gravitation ne permettait pas à elle seule d'expliquer le mouvement de l'apogée de la Lune réellement observée. A cause de sa déficience à résoudre le problème, ce fut EULER qui incita l'Académie des Sciences de St-Petersbourg de choisir comme sujet de son premier concours scientifique pour l'année 1751 la question *«An omnes inaequalitates, quae in motu Lunae observantur theoriae newtonienae sint consentaneae necne? Et quaenam sit vera theoria omnium harum inaequalitatum, unde locus Lunae ad quodvis tempus quam exactissime possit definire?»* CLAIRAUT concourait et il obtenait le premier prix.

4.4 La solution modifiée du problème de l'orbite de la Lune par Clairaut

LE 17 MAI 1749 CLAIRAUT fit la rétractation de sa thèse émise le 15 novembre 1747 devant l'Académie Royale des Sciences. Mais il se garda bien de rendre publique ses calculs pour la simple raison qu'en ce moment il ne les avait pas encore terminés. Il est possible de suivre le cheminement de CLAIRAUT à travers sa correspondance avec EULER. Ainsi il écrit dans une lettre datée au 19 mars 1750, faisant allusion à son texte de 1745 [172] traitant de sa première théorie incomplète : *«Et je ne doute pas que vous n'y découvririez aisément ce qui m'a occasionné de le retoucher et d'y arriver au vrai mouvement de l'apogée de la Lune ainsi qu'à la construction des tables de la Lune.»*

CLAIRAUT relève ici que sa nouvelle théorie n'est pas construite sur d'autres hypothèses pour être foncièrement différente de la première, comme il sera le cas pour les deux théories de la Lune d'Euler. Bien au contraire, il s'agit d'une réinterprétation plus critique des équations constitutionnelles comme il le fait entendre en poursuivant : *«J'ai beaucoup perfectionné ma détermination de l'orbite de la Lune, mais le fond des idées est toujours le même en sorte que si j'avais une pièce pour le prix de St-Petersbourg, il sera difficile de n'être pas reconnu de vous.»*

CLAIRAUT continue en exprimant encore une fois sa nouvelle conviction de l'exactitude de la loi de la gravitation : *«Il y a déjà du temps que je crois avoir la solution qu'on demande, car je pense pouvoir prononcer hardiment que l'attraction inversement proportionnelle aux carrés des distances suffit pour expliquer les inégalités de la Lune et j'ai tiré de la seule théorie des tables de son mouvement.»*

Juste avant dans la même lettre, CLAIRAUT cite également D'ALEMBERT comme témoin pour appuyer sa nouvelle certitude mais aussi la continuité dans

sa méthode de raisonnement : «*Si mon mémoire [172] ne vous paraît pas assez clair ou que vous ne reconnaissiez pas facilement ce qui doit être la source de mon nouveau résultat, je vous la communiquerai avec autant de plaisir que j'en ai eu à l'expliquer à Monsieur D'ALEMBERT lorsque je me rétractais dans l'Académie. Je suis bien aise d'apprendre qu'il vous ait mandé qu'il avait trouvé la même conclusion par sa méthode. Car quoi qu'il eut déclaré dans l'Académie qu'il avait vu l'expédient dont je m'étais servi, et qu'il le reconnaîtrait quand il ferait le même changement à sa méthode, ayant ensuite supprimé sa rétractation et ne m'ayant plus parlé, je ne savais pas s'il était revenu à son premier sentiment sur cet article et la confirmation d'un homme tel que lui me flatte beaucoup.*»

En effet D'ALEMBERT a suivi de près les agissements de CLAIRAUT et il en parle dans sa correspondance. Ainsi il écrit dans une lettre à EULER du 22 février 1750 : «*Par tout le travail que j'ai fait et qui est très considérable, je vois que les mouvements de la Lune s'accordent tous aussi bien que l'on peut désirer avec la théorie de Monsieur NEWTON*», témoignant ainsi de la vérité de la loi de l'attraction newtonienne. Bien avant, le 21 septembre 1749 dans une lettre à CRAMER, D'ALEMBERT avait déjà donné quelques indications sur la nouvelle approche de CLAIRAUT : «*Je n'ai point encore examiné l'affaire de l'apogée, il est juste de la laisser à Monsieur CLAIRAUT puisqu'il a eu le bonheur de la trouver le premier, tout ce que je puis vous dire, c'est que l'erreur venait de quelques termes qu'il avait négligés et qu'on avait naturellement cru pouvoir l'être, puisqu'ils nous ont échappés à nous trois.*» [197]

CLAIRAUT lui, continuait le long de ses lettres à EULER à se découvrir. Ainsi il écrit le 24 juillet 1750 : «*Le reste et singulièrement ce qui m'a donné le vrai mouvement de l'apogée de la Lune n'étant du qu'à une attention extrême à ne négliger que le moins qu'il est possible les petites quantités qui entrent dans l'expression des forces.*»

Dans la même lettre, CLAIRAUT annonce sa participation au concours de Pétersbourg en parlant de «*ma nouvelle pièce*», le mémoire qui va remporter deux ans plus tard le prix de l'Académie Impériale.

Le 31 décembre 1750 CLAIRAUT annonce à EULER qu'il a expédié sa pièce pour le concours au début du mois. Il s'agit du mémoire : «*Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances*» [173] daté du 6 décembre 1750. CLAIRAUT donne alors des explications à celui qu'il considère comme un des juges du concours et relève les différences entre sa première théorie et les idées développées dans son mémoire envoyé mais non pas encore parvenu à sa destination. «*Je vous supplierai de commencer par relire les feuilles que je vous ai envoyées de mon Mémoire de 1745 [172] et de faire attention à ce que j'ai dit dans la page 352 sur la manière de déterminer les quantités k , p , m etc plus exactement que par le premier calcul. Vous verrez en suivant cette méthode que dès qu'on fera dans l'équation*» :

$$\frac{p}{r} = 1 - (cte) \cos \nu + \sin \nu \int \Omega \cos \nu d\nu - \cos \nu \int \Omega \sin \nu d\nu \quad (4.82)$$

$$r = -\frac{\kappa}{1 - e \cos m\nu + \gamma \cos(\lambda - \mu)\nu + cte} \quad (4.83)$$

au lieu de le faire simplement égal à :

$$r = \frac{\kappa}{1 - e \cos m\nu} \quad (4.84)$$

«on trouverait pour m sa vraie valeur. Le terme $\gamma \cos(\lambda - \mu)\nu$ est celui qui donne presque toute la partie cherchée du mouvement de l'apogée parce que les cos de $(\lambda - \mu)\nu$ qui entrent dans les valeurs de r^2 et de r^3 se trouvant multipliés par $\sin \lambda\nu$ et $\cos \lambda\nu$ qui sont les premières des expressions des $\sin(2\nu - 2\nu')$ et $\cos(2\nu - 2\nu')$ que contiennent les expressions de A à P , les produits de ces quantités donnent des termes affectés de $\cos m\nu$ aussi considérables que celui que j'avais trouvé d'abord en n'employant que le terme $\cos m\nu$ dans la valeur de r qui sert à former celle de Ω .» (Il est à noter que nous avons utilisé la notation moderne et non pas celle que CLAIRAUT emploie. De cette façon les formules écrites plus haut concordent avec celles données dans les chapitres antérieurs.) CLAIRAUT termine sa lettre par un bref exposé de son mémoire : «Vous trouverez une démonstration de mon premier lemme (de [172]) pour donner une forme finie à l'expression du temps et à l'équation de l'orbite, dont la simplicité m'a paru satisfaisante. Je passe ensuite à des manières de ne négliger dans le Problème que le moins qu'il est possible par le moyen desquelles il me semble que j'ai embrassé toutes les parties de la théorie de la Lune. Et je termine mon Mémoire par la comparaison d'une centaine d'observations avec les lieux calculés par mes tables.»

Or à St-Petersbourg l'Académie ne progresse pas et finalement le délai pour la remise des mémoires est reporté de cinq mois au 1^{er} juin 1751. CLAIRAUT en est fâché car il pense qu'il y a une machination. Ainsi dans sa lettre à EULER du 24 février 1751, il souligne «Si je m'en étais douté lorsque j'ai fait partir ma pièce, j'aurais eu plusieurs mois de plus pour lui donner un meilleur ordre et pour en perfectionner encore les calculs qui en sont toujours susceptibles ...»

CLAIRAUT en vient alors au contenu de son mémoire et aux questions qu'EULER lui avait posé dans une lettre sans doute perdue.

Ainsi CLAIRAUT insiste : «Que je n'ai point du tout négligé le terme $\frac{2}{pM} \int \Pi r^3 dv$ du diviseur de Ω (il s'agit ici de la quantité p dans la notation employée) et que j'ai eu égard à des quantités beaucoup plus négligeables en elles mêmes. Que ce terme n'a produit qu'un léger changement dans la détermination du mouvement de l'apogée et que lorsque j'ai eu considéré à la fois l'inclinaison de l'orbite qui entre bien pour 1/100 dans le mouvement cherché, l'excentricité de l'orbite du Soleil qui fait aussi quelque petite chose, j'ai trouvé pour l'arc décrit pour l'apogée dans une révolution de la Lune un nombre qui ne

diffère du vrai que de très peu de secondes et comme je n'ai jamais pu éviter de petites fautes dans les calculs arithmétiques et que le même calcul recommencé m'a donné ces mêmes erreurs tantôt d'un côté tantôt d'un autre, je ne doute point que l'on ne parvienne au vrai nombre soit en faisant les calculs plus exactement soit en ne négligeant pas quelques petits termes que je néglige encore et qui sont négligeables pour toutes les autres parties de la Théorie de la Lune.» CLAIRAUT continue : «Je ne comprends pas bien votre idée lorsque vous me dites que le simple angle n'entre pas dans la formule : $\sin \nu \int \Omega dv \cos \nu - \cos \nu \int \Omega dv \sin \nu$ qui exprime l'anomalie vraie de la Lune comptée d'un axe fixe ne doit pas entrer dans l'équation de l'orbite; on doit y trouver à sa place l'anomalie $m\nu$ comptée depuis la position de l'apogée. Or le lemme que j'emploie pour donner la valeur de $\sin \nu \int \Omega dv \cos \nu$ me sert à chasser tous les termes à simple ν que contiendrait l'équation de l'orbite et à rendre l'équation choisie» :

$$\frac{\kappa}{r} = 1 - c \cos m\nu + cte \quad (4.85)$$

«semblable à celle qui vient après la substitution de la valeur Ω dans l'équation» :

$$\frac{p}{r} = 1 - c \cos m\nu + \sin \nu \int \Omega \cos \nu dv + cte \quad (4.86)$$

«C'est là l'esprit de ma solution qui donnerait mathématiquement la vraie équation si l'on avait sa forme, et qu'on fera approcher autant que l'on voudra lorsqu'on aura bien de l'attention aux termes qui contiennent des cos de multiples de ν dont les exposants seront peu différents de l'unité ou très petits en eux mêmes.»

Le 10 avril 1751, après avoir lu le mémoire de CLAIRAUT, EULER déclare à ce dernier : «J'ai enfin la satisfaction de vous marquer que je suis maintenant tout à fait éclairci sur le mouvement de l'apogée de la Lune et que je le trouve après vous entièrement conforme avec la théorie de NEWTON. Cette recherche m'a entraîné en de terribles calculs et j'ai enfin découvert la source de l'insuffisance des méthodes que j'avais suivies jusqu'ici à cet égard qui consistait dans la détermination incomplète d'une constante que l'intégration introduisit dans le calcul, inconvénient auquel votre méthode n'était pas assujettie; mais à présent, comme deux méthodes tout à fait différentes conduisent à la même conclusion, il n'y aura plus personne qui refusera de reconnaître la justesse de votre recherche.»

EULER explique alors comment il a fait pour arriver à sa conclusion et comment il s'y est pris : «Au lieu de supposer que la force de la Terre sur la Lune est égale à m/x^2 pour la distance x , je l'ai exprimée par $m/x^2 - \mu$ dans le dessein de déterminer le terme μ en sorte que j'obtienne le même mouvement de l'apogée que les observations donnent, et j'ai enfin trouvé contre toute mon attente que ce terme doit être supposé si petit qu'on le peut regarder sans faute comme rien; au lieu que suivant mon sentiment précédent il aurait dû devenir assez considérable.»

Et EULER de conclure : *«Maintenant je m'applaudis d'autant plus d'avoir engagé l'Académie de St-Petersbourg de choisir cette question préférablement à toutes les autres qu'elle a eu en vue puisque on peut soutenir que jamais l'Académie a proposé une question aussi importante et à laquelle il ait été répondu avec un si heureux succès.»* Dans une autre lettre du 29 juin d'EULER à CLAIRAUT, le premier revient à ses conclusions déjà émises dans la lettre précédente : *«Quelque répugnance que j'ai sentie de reconnaître la justesse de votre calcul sur le mouvement de l'apogée de la Lune, j'en suis maintenant d'autant plus sensiblement pénétré : et plus je considère cette heureuse découverte, plus elle me paraît importante, et à mon avis c'est la plus grande découverte dans la théorie de l'astronomie, sans laquelle il serait absolument impossible de parvenir jamais à la connaissance des dérangements que les planètes se causent les unes les autres dans leurs mouvements. Car il est bien certain que ce n'est que depuis cette découverte qu'on puisse regarder la loi d'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances comme solidement établie d'où dépend cependant toute la théorie de l'Astronomie.»*

Le résultat du concours de l'Académie Impériale des Sciences fut proclamé dans une séance publique le 6 septembre 1751. CLAIRAUT en fut le lauréat. Dans sa lettre du 24 juin 1752 à EULER, CLAIRAUT remercie celui-ci pour l'envoi de la première feuille de son mémoire. Il avait déjà reçu le 11 mars de la même année une lettre de SCHUMACHER, conseiller de l'Académie, pour lui signaler que l'impression de sa pièce progressait. L'impression en fut terminée le premier juillet 1752 et SCHUMACHER adressa aussitôt un exemplaire à CLAIRAUT. Le 13 août 1752 celui-ci écrivit à J. D. SCHUMACHER : *«Je vous dois mille et mille remerciements pour le plaisir que vous m'avez fait en m'envoyant par la poste un exemplaire de mon ouvrage et en m'annonçant ceux qui doivent venir par le professeur de votre Académie qui est allé en Hollande. J'ai vu avec bien de la satisfaction que ma Pièce avait été fort bien imprimée malgré la difficulté de la matière, de la langue et de l'absence de l'auteur. Et comme les ordres que vous avez eu la bonté d'y donner en doivent être la cause, je ne puis trop vous en marquer ma reconnaissance et de vous assurer des sentiments de l'estime et de la parfaite considération.»*

Il faut en arriver maintenant à l'examen plus détaillé du mémoire de CLAIRAUT qui porte le titre suivant sur la première page : *«Pièce qui a remporté le prix de l'Académie Impériale des Sciences de St-Petersbourg proposé en MDCCCL sur la question : si toutes les inégalités qu'on a observées dans le mouvement de la Lune s'accordent avec la théorie newtonienne ou non ? Quel est la vraie théorie de toutes les inégalités, dont on peut déduire exactement pour un instant quelconque proposé le lieu de la Lune ? A St-Petersbourg de l'imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences 1752.»*

Le titre à la page A2 est le suivant : *«Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances.»*

Il s'agit d'un des mémoires les plus longs de CLAIRAUT avec 92 pages et 4 figures en annexe. Il est subdivisé en deux parties qui ont comme titres : *«Première partie où l'on donne la manière de trouver le lieu de la Lune dans*

son orbite ; seconde partie où l'on enseigne à trouver le mouvement des næuds de la Lune, la variation d'inclinaison de son orbite par rapport à l'Ecliptique.» CLAIRAUT en a ajouté des «*Remarques et additions*» après la remise de son texte le 6 décembre 1750. Il commence par un discours préliminaire comme il fut de coutume au XVIII^e siècle qui annonce clairement le but de son écrit : «*Vu les points les plus essentiels qu'il embrasse, la révolution de l'apogée de la Lune, a causé des discussions très délicates et a donné l'occasion de proposer des suppléments à la loi générale des Forces. A la vérité l'un des Mathématiciens qui avait eu recours à ces expédients s'est rétracté et a annoncé qu'il avait trouvé le moyen de tirer de sa Théorie le vrai mouvement de l'Apogée sans employer d'autre force que celle qui suit la proposition inverse du carré des distances. Mais outre que la solution n'est pas publique, l'examen des autres difficultés que renferme la Théorie de la Lune demande que toute la question soit reprise en entier, si l'on veut répondre d'une manière satisfaisante aux vœux qu'a eues l'Académie Impériale de Russie, en proposant le sujet qu'elle doit délivrer l'année prochaine.*»

CLAIRAUT attaque le problème à partir des mêmes hypothèses qu'il a utilisées dans son premier mémoire de 1745 [172] et il introduit les coordonnées polaires de la Lune, avec comme origine le centre de la Terre et les deux forces S et T , la première agissant dans la direction du rayon r , la deuxième étant perpendiculaire à ce même rayon.

Il établit ainsi les formules identiques à sa première théorie numérotées dans le chapitre s'y rapportant de 4.1 à 4.16. Après avoir introduit dans l'expression Ω de la force 4.15 les formules pour les composantes S et T établies en 4.41 et 4.42 il retrouve, tout comme dans son premier mémoire l'expression suivante pour Ω :

$$\Omega = \frac{\frac{1}{2}\alpha \left(\frac{r}{\kappa}\right)^3 [1 + 3 \cos(2\nu - 2\nu')] + \frac{3}{2}\alpha \left(\frac{r}{\kappa}\right)^2 \frac{dr}{\kappa d\nu} \sin(2\nu - 2\nu') + 2\rho}{1 - 2\rho} \quad (4.87)$$

C'est alors qu'il remarque que la valeur r/κ à substituer dans 4.6 doit absolument contenir outre la partie

$$1 + e \cos \mu\nu \quad (4.88)$$

aussi les termes :

$$\beta \cos \lambda\nu + \gamma \cos(\lambda - \mu)\nu + cte \quad (4.89)$$

en vue d'obtenir l'orbite exacte à partir de la formule 4.26.

Il dit : «*Ainsi si l'on a rien négligé en déterminant Ω on sera sur que l'orbite s'écartera à la fin fort considérablement d'une ellipse et changera entièrement de forme. Si on a négligé quelques quantités on ne pourra pas former la même assertion, mais il faudra au contraire ne compter sur l'exactitude de la solution précédente que pendant un petit nombre de révolutions.*»

CLAIRAUT continue dans son mémoire à raisonner en coordonnées polaires et après l'examen de plusieurs approches possibles il arrive à la relation :

$$\frac{\kappa}{r} = 1 - e \cos \mu\nu + \beta \cos \lambda\nu - \gamma \cos(\lambda - \mu)\nu + \delta \cos(\lambda + \mu)\nu - \zeta \cos(\lambda - 2\mu)\nu \quad (4.90)$$

CLAIRAUT explique que 4.90 constitue une seconde approximation vis-à-vis de 4.49 qu'il faut faire entrer dans l'expression 4.87 de la force Ω .

Le produit des termes contenus dans 4.90 et surtout ceux en $\cos(\lambda - \mu)\nu$ renfermés dans $(r/\kappa)^3$ et $(r/\kappa)^4$ avec les sin et cos de $\lambda\nu$, et d'autres termes du développement en série des $\cos(2\nu - 2\nu')$ respectivement $\sin(2\nu - 2\nu')$ introduisent d'autres termes dans l'équation pour E en 4.59, qui elle aurait modifié l'expression :

$$\mu^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2 \quad (4.91)$$

Pour ne donner qu'une idée de la modification de la formule précédente, CLAIRAUT ne raisonne que sur les termes $\gamma \cos(\lambda - \mu)\nu$ et κ/r , qui sont plus sensibles, parce que γ contient seulement le facteur m , tandis que β et δ renferment m^2 . En ajoutant à peu près

$$-4\gamma \cos(\lambda - \mu)\nu \quad (4.92)$$

à la valeur de $(r/\kappa)^4$, on aura pour l'intégrale :

$$\int \left(\frac{r}{\kappa}\right)^4 \sin(2\nu - 2\nu') d\nu \quad (4.93)$$

l'accroissement :

$$-4\gamma \int \sin \lambda\nu \cos(\lambda - \mu)\nu d\nu = 2\gamma \left[\frac{\cos(2\lambda - \mu)\nu}{2\lambda - \mu} + \frac{\cos \mu\nu}{\mu} \right] \quad (4.94)$$

dont il ne faut retenir que la partie :

$$\frac{2\gamma}{\mu} \cos \mu\nu \quad (4.95)$$

ce qui donne l'accroissement suivant :

$$-\frac{6\alpha\gamma}{\mu} \frac{\kappa}{p} \cos \mu\nu = -\frac{45}{4}em^3 \cos \mu\nu \quad (4.96)$$

On trouvera de la même façon l'accroissement de :

$$\frac{3}{2}\alpha \left(\frac{r}{\kappa}\right)^3 \cos(2\nu - 2\nu')$$

à :

$$-\frac{9}{4}m^2\gamma[\cos(2\lambda - \mu)\nu + \cos \mu\nu] \quad (4.97)$$

dont on retient :

$$-\frac{9}{4}m^2\gamma \cos \mu\nu = -\frac{135}{32}em^3 \cos \mu\nu \quad (4.98)$$

De même la partie à retenir pour :

$$\frac{3}{2}\alpha \frac{r^2}{\kappa^3} \frac{dr}{d\nu} \sin(2\nu - 2\nu') \quad (4.99)$$

est de :

$$\frac{45}{32}em^3 \cos \mu\nu \quad (4.100)$$

L'expression 4.87 de Ω recevra donc un accroissement de :

$$\left(\frac{45}{4} + \frac{135}{32} - \frac{45}{32}\right)em^3 \cos \mu\nu = \frac{225}{16}em^3 \cos \mu\nu \quad (4.101)$$

En remplaçant alors le coefficient E par :

$$E = -\frac{3}{2}e - \frac{225}{16}em \quad (4.102)$$

et en l'introduisant dans :

$$\frac{E\alpha}{\mu^2 - 1} \frac{\kappa}{p} = e \quad (4.103)$$

on obtient :

$$\mu^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2 - \frac{225}{16}m^3 \quad (4.104)$$

d'où :

$$1 - \mu = \frac{3}{4}m^2 + \frac{225}{32}m^3 \quad (4.105)$$

On a donc obtenu l'accroissement $+\frac{225}{32}m^3$ ce qui donne :

$$1 - \mu = 0,00714 \quad (4.106)$$

valeur assez proche de la valeur réelle.

CLAIRAUT ne s'arrête pas à la détermination de l'orbite par son hypothèse initiale. Il examine en plus l'influence de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique et de l'excentricité de l'orbite du Soleil.

Puis il se penche sur le problème de la détermination du temps. En route il fait des considérations sur la manière de former les valeurs des puissances de r

qui doivent être substituées dans Ω , ainsi que de la façon de trouver les valeurs de $\sin 2t$, $\cos 2t$, etc. qui entrent dans les expressions des forces.

CLAIRAUT investit beaucoup dans les calculs numériques et obtient des formules pour l'équation de l'orbite, la valeur générale de la longitude moyenne et la longitude vraie.

Dans la seconde partie de son ouvrage CLAIRAUT montre comment trouver le mouvement des nœuds et la variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire par rapport à l'écliptique. Une comparaison de valeurs calculées et d'observations fournies par l'abbé LA CAILLE termine le mémoire.

Sans doute pour documenter sa priorité dans la solution du problème de la Lune aussi en France, et pour palier aux retards dans l'impression de son mémoire [173] de St-Petersbourg, CLAIRAUT avait déposé le 21 janvier 1749 à l'Académie, sous pli cacheté, son texte : «*De l'orbite de la Lune, en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*» [193], texte qui y fut lu le 15 mars 1752 donc après la remise de son travail pour le prix de l'Académie Impériale mais avant la publication de celui-ci.

Le mémoire contient le développement de la seconde approximation que CLAIRAUT avait entrepris de faire du mouvement perturbé de la Lune, et qui lui fit découvrir la vérité au sujet du mouvement de l'apogée. Vu que le texte du mémoire en question est concis et qu'il constitue la version primaire de la théorie définitive de la Lune de CLAIRAUT, il vaut la peine de le résumer dans ce qui suit, ne serait-ce que pour être plus près de la genèse de ce premier triomphe de la mécanique céleste.

CLAIRAUT suppose, comme dans son mémoire de 1747 [172], que les deux orbites sont dans le même plan, que celle du Soleil est sans excentricité. Il ne prend pas égard aux termes qui seraient introduits dans les valeurs des forces ϕ et Π , si l'on ne négligeait pas le carré du rapport des distances du Soleil et de la Lune à la Terre. CLAIRAUT introduit donc, tout comme dans sa première tentative de solution, les forces :

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{Nr}{l^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2T \right) \\ \Pi &= -\frac{3N}{2l^3} \sin 2T\end{aligned}\tag{4.107}$$

Ces formules sont les mêmes que 4.41 et 4.42 avec V étant la masse du Soleil, M la somme des masses de la Terre et de la Lune, r le rayon vecteur quelconque de l'orbite de la Lune, l le rayon de l'orbite du Soleil et T l'élongation des deux astres. CLAIRAUT a donc, comme dans son premier mémoire, l'équation générale de l'orbite, produite par les forces $M/r^2 + \phi$ et π :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{C}{p} \cos \nu + \frac{1}{p} \sin \nu \int \Omega \cos \nu d\nu - \frac{1}{p} \cos \nu \int \Omega \sin \nu d\nu \tag{4.108}$$

Il suppose que ν soit l'angle compris entre le rayon vecteur quelconque r et

celui passant par la Lune dans sa position de l'apogée au moment où les forces ϕ et π ont commencé à agir et que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{c}{p} \cos \nu \quad (4.109)$$

exprime la section conique que la Lune décrirait sans les forces perturbatrices et que Ω soit la quantité :

$$\Omega = \frac{\frac{\phi r^2}{M} + \frac{\pi r dr}{M d\nu} - \frac{2}{pM} \int \pi r^3 d\nu}{1 + \frac{2}{pM} \int \pi r^3 d\nu} \quad (4.110)$$

qui peut être mise sous la forme :

$$\Omega = \left(\frac{\phi r^2}{M} + \frac{\pi r dr}{M d\nu} - 2\rho \right) (1 - 2\rho + 4\rho^2) \quad (4.111)$$

avec :

$$\rho = \frac{1}{pM} \int \pi r^3 d\nu \quad (4.112)$$

et où il néglige les puissances de $\rho > 2$.

L'expression générale du temps devient alors :

$$\frac{1}{pM} \int r^2 d\nu \left(1 - \rho - \frac{3}{2}\rho^2 \right) \quad (4.113)$$

Après avoir posé ces préliminaires, CLAIRAUT déclare qu'il ne va pas se contenter de poser dans la valeur de Ω l'expression :

$$r = \frac{k}{1 - e \cos m\nu} \quad (4.114)$$

qui est l'équation d'une ellipse immobile dans l'espace, ni de prendre dans celle de T pour la valeur du temps la quantité :

$$\frac{k^2}{\sqrt{pM}} \left(\nu + \frac{m}{2e} \sin m\nu + \frac{3e^2}{4m} \sin 2m\nu \right) \quad (4.115)$$

mais de faire le calcul entier. Il suppose donc :

$$\begin{aligned} \frac{k}{r} = & 1 - e \cos m\nu + \beta \cos \left(\frac{2}{n} \nu \right) - \gamma \cos \left(\frac{2}{n} - m \right) \nu \\ & + \delta \cos \left(\frac{2}{n} + m \right) \nu + \zeta \cos \left(\frac{2}{n} - 2m \right) \nu \end{aligned} \quad (4.116)$$

avec k la valeur du rayon moyen de la Lune à la Terre. L'équation du temps ou plutôt l'anomalie moyenne de la Lune est donnée par l'équation générale :

$$x = \nu + be \sin m\nu + ge^2 \sin 2m\nu + h\alpha \sin \left(\frac{2}{n} - m \right) \nu - q\alpha \sin \frac{2}{n} \nu \quad (4.117)$$

Les coefficients que CLAIRAUT introduit sont tous connus depuis son premier mémoire. Il les substitue dans les fonctions perturbatrices ρ et Ω et de là dans l'expression de l'orbite 4.108 et dans l'expression du temps 4.113 pour arriver à l'équation de l'anomalie moyenne de la Lune :

$$\begin{aligned} x = \nu + \frac{2e}{m} \sin m\nu - \int (2\xi + \rho) d\nu - 2e \int (3\xi + \rho) \sin m\nu d\nu \\ + \frac{3e^2}{4m} \sin 2m\nu + \int \left(3\xi^2 + 2\rho\xi + \frac{3}{2}\rho^2 \right) d\nu + \dots \end{aligned} \quad (4.118)$$

Ce résultat permet à CLAIRAUT de trouver des expressions plus exactes pour $\sin 2T$ et $\cos 2T$ qu'il peut substituer ensuite dans celles de r et de ses puissances, ainsi que dans les valeurs générales de ρ et de Ω , en ayant égard dans celles-ci, au développement des trois premiers termes de son dénominateur. Après avoir fait tous les développements, il substitue la valeur de Ω dans l'expression générale de l'orbite perturbée et il en tire pour r une nouvelle valeur plus exacte, ce qui lui donne une des équations cherchées. Sa substitution, ainsi que celle de ρ dans l'expression du temps, lui donne, après des calculs très longs, la deuxième équation, à savoir un développement en fonction des sinus des multiples de ν déjà connus, et d'autres tels que $3m\nu$, $(\frac{2}{n} + 2m)\nu$, $(\frac{2}{n} - 3m)\nu$, ceux-ci multipliés par de très petits coefficients. «*Pour déterminer en nombres les constantes qui entrent dans les équations précédentes, je n'ai besoin que de deux éléments astronomiques, l'un est le rapport de la révolution du Soleil à la révolution périodique moyenne de la Lune, l'autre est l'excentricité de l'orbite de la Lune. La première de ces deux quantités est si simplement déterminée par les observations, que la manière de l'employer ne souffre aucune difficulté ... ; quant à l'excentricité de l'orbite lunaire, elle est beaucoup plus difficile à employer, parce que la manière dont les astronomes ont considéré les mouvements de l'orbite de la Lune ne répondant pas à la théorie précédente, il faut une discussion particulière, et assez délicate, pour découvrir la valeur numérique de la quantité nommée e ci-dessus, qui exprime l'excentricité de l'ellipse que l'on peut regarder comme la base ou la directrice de l'orbite lunaire. En attendant cette recherche, on peut, sans commettre une erreur considérable, du moins pour les termes qui suivent les deux premiers dans l'équation de l'orbite et dans l'expression du temps, regarder e comme l'excentricité moyenne de la Lune, laquelle est, suivant M. NEWTON, égale à 0,05505.*» [193]

Comme CLAIRAUT a une prédilection pour les expressions numériques, il fait les calculs correspondants et il trouve l'équation de l'orbite :

$$\begin{aligned} \frac{k}{r} = & 1 - 0,05505 \cos \nu + 0,007179 \cos \frac{2}{n} \nu - 0,011181 \cos \left(\frac{2}{n} - m \right) \nu \\ & + 0,000204 \cos \left(\frac{2}{n} + m \right) \nu + 0,001004 \cos \left(\frac{2}{n} - 2m \right) \nu \end{aligned} \quad (4.119)$$

La longitude moyenne devient :

$$\begin{aligned} & \nu + 0,110206 \sin m\nu & -0,009167 \sin \frac{2}{n} \nu \\ & -0,000719 \sin \left(\frac{2}{n} + m \right) \nu & +0,002241 \sin 2m\nu \\ & +0,022684 \sin \left(\frac{2}{n} - m \right) \nu & +0,0000384 \sin \left(\frac{2}{n} - 3m \right) \nu \\ & +0,000055 \sin 3m\nu & -0,001388 \sin \left(\frac{2}{n} - 2m \right) \nu \\ & -0,0000388 \sin \left(\frac{2}{n} + 2m \right) \nu \end{aligned} \quad (4.120)$$

CLAIRAUT souligne que sa nouvelle solution diffère essentiellement de la première dans la détermination du coefficient m qui donne le mouvement de l'apogée : «*Le terme de $\cos m\nu$, qui entre dans la valeur de Ω et qui donne le terme de même espèce dans la valeur de r , par lequel on détermine m , se trouve à peu près doublé par l'addition qu'on fait des termes :*»

$$\beta \cos \frac{2\nu}{n} - \gamma \cos \frac{2\nu}{n} + \dots \quad (4.121)$$

à la valeur $1 - e \cos m\nu$, dont on se contentait dans la première solution, et par ce moyen, le mouvement de l'apogée se trouve assez conforme aux observations, sans supposer la Lune poussée vers la Terre par aucune autre force que celle qui agit inversement comme le carré de la distance ; et il y a lieu de croire même qu'en faisant toutes les considérations que j'ai omises ici, la légère différence qui se trouve entre la théorie et les observations s'évanouira tout à fait. [193]

CLAIRAUT termine son mémoire par une «*Démonstration de la proposition fondamentale de ma théorie de la Lune.*»

4.5 Les autres travaux en astronomie théorique de Clairaut



À CÔTÉ de la théorie de la Lune, CLAIRAUT a tenté deux applications de sa théorie des trois corps, la première consistant dans le «*Mémoire sur l'orbite apparente du Soleil*» [198] soutenu à l'Académie le 9 juillet 1757 et sa «*Théorie du mouvement des comètes*» [199], dont il a lu un mémoire à l'Académie le 14 novembre 1758 avant de publier un livre sur le même sujet, celui-ci spécialement centré sur le retour de la comète de HALLEY en 1759.

Dans le texte [198], CLAIRAUT applique sa solution du problème des trois corps en calculant l'effet de la Lune sur l'orbite de la Terre, tout en prenant en considération l'excentricité de l'orbite de la Lune. CLAIRAUT ne considère pas les dérangements produits par les planètes principales sauf Jupiter et Vénus tout comme le fit L. EULER d'une façon analogue dans sa pièce qui remporta le prix de l'Académie sur la même matière. Mais il se réfère aux recherches de l'Abbé DE LA CAILLE sur le Soleil tant à Paris qu'au cap de Bonne Espérance afin de déterminer si les observations de celui-ci s'accordaient avec sa théorie des trois corps.

CLAIRAUT profite de la comparaison entre la théorie et l'observation pour en tirer une détermination de la masse de la Lune «*que je désire de voir confirmée par un plus grand nombre d'observations, mais qui peut avoir dès à présent un degré considérable de probabilité.*» [198] CLAIRAUT éprouve des difficultés avec la détermination de cette masse qu'il considère sensiblement moindre que celle que NEWTON avait trouvée en partant de ses recherches sur le flux et le reflux de la mer. CLAIRAUT se trouve ici en bonne compagnie avec D'ALEMBERT et EULER qui ont, eux aussi, obtenu un résultat également moindre que celui que NEWTON a indiqué. Il constate encore que «*Quant aux masses des planètes principales, qui ne sont pas encore connues, la manière de les déterminer par les observations du Soleil deviendra trop compliquée et trop incertaine, si l'on était obligé de les employer toutes; mais comme deux des trois masses inconnues, celles de Mars et de Mercure, paraissent devoir être assez petites pour ne pas produire d'effet sensible sur le mouvement apparent du Soleil, la question est bientôt réduite à la détermination de l'action de la masse de Vénus, qu'il est très possible de tirer des observations, malgré la petitesse de l'objet à mesurer et l'extrême précision que sa mesure exige*» [198] ainsi que la prise en compte de l'action de Jupiter comme étant la plus grosse planète du système solaire. CLAIRAUT indique alors la méthode la plus directe pour la détermination de la masse de Vénus, et qui serait d'avoir un grand nombre d'observations du Soleil dans des temps où l'action de la Lune est nulle. Or, l'Abbé DE LA CAILLE n'en possède pas et CLAIRAUT a dû imaginer un autre moyen consistant dans la prise en compte du fait que l'action de Vénus varie peu pendant la distance

d'une quadrature de la Lune à la suivante et qu'il est donc possible de fixer la masse de notre satellite sans être obligé de connaître que très médiocrement la masse de Vénus.

«Ainsi par un tâtonnement très facile, on sépare les deux difficultés de la question : la première étant résolue, il ne faut plus, pour venir à bout de la seconde, que parcourir la suite des équations que l'action de Vénus, supposée d'abord de masse égale à la Terre, donnerait pour tous les lieux du Soleil observés, et chercher ensuite dans quel rapport constant, il convient de diminuer ou d'augmenter toutes ces équations pour les faire cadrer le mieux qu'il est possible avec les observations. Par cette méthode, on trouve qu'une masse qui serait environ les deux tiers du Soleil observés par M. l'abbé DE LA CAILLE.» [198]

CLAIRAUT commence la partie technique de son mémoire par un exposé très clair et concis de sa théorie des trois corps que nous avons rencontré déjà dans un chapitre antérieur. Il obtient ainsi :

- l'équation de l'ellipse représentant l'orbite non perturbée

$$\frac{p}{r} = 1 - c \cos \nu \quad (4.122)$$

- les forces perturbatrices ϕ dans le sens du rayon vecteur et π perpendiculaire à la première ;
- les expressions

$$\begin{aligned} \rho &= \int \frac{\Pi r^3 d\nu}{pM} \\ \Omega &= \frac{\frac{\phi r^2}{M} + \frac{\Pi r dr}{M d\nu} - 2\rho}{1 + \rho} \end{aligned} \quad (4.123)$$

où ν est l'angle entre la ligne des apsides et le rayon vecteur r ; M est la force avec laquelle la planète Q tend vers F sans tenir compte d'une perturbation ;

- l'équation de l'orbite perturbée

$$\frac{p}{r} = 1 - c \cos \nu + \sin \nu \int r \cos \nu d\nu - \cos \nu \int r \sin \nu d\nu \quad (4.124)$$

- et l'expression du temps pour parcourir l'arc AQ :

$$t = \int \frac{r^2 d\nu}{\sqrt{pM'} \sqrt{1 + 2\rho'}} \quad (4.125)$$

CLAIRAUT explique ensuite la théorie de la transformation de l'expression Ω quand cette quantité est une suite de termes proportionnels à des cosinus de multiples de ν . Puis il montre qu'on doit absolument tenir compte de l'expression d'une ellipse mobile dans Ω et que cela pourra le mieux se faire par une approche itérative dans le but d'obtenir la formule optimale de l'orbite.

CLAIRAUT indique encore des simplifications pour les expressions des forces perturbatrices ϕ et Π quand celles-ci sont très petites comme il est le cas de l'orbite de la Terre. Il donne ensuite les expressions des forces perturbatrices d'une façon générale et obtient :

$$\phi = -N \left(\frac{RF}{RQ^3} - \frac{1}{RF^2} \right) \cos t + \frac{NQF}{RQ^3} \quad (4.126)$$

$$\Pi = -N \left(\frac{RF}{RQ^3} - \frac{1}{RF^2} \right) \sin t \quad (4.127)$$

avec :

- AQ l'orbite troublée qui sans l'existence des forces perturbatrices serait une ellipse ayant F pour foyer ;
- BR : l'orbite de la planète troublante ;
- M : la somme de la masse de la planète Q et de celle autour de laquelle elle tourne ;
- N : la masse de la planète troublante ;
- t : l'angle RFQ ou élongation des deux planètes.

Les expressions 4.126 et 4.127 sont obtenues par de simples considérations géométriques.

Dans l'article second, CLAIRAUT applique les formules déduites à la correction du lieu du Soleil qui est due à l'attraction de la Lune. Il ne se contente pas des expressions algébriques mais détermine tout de suite des formules numériques pour les différentes expressions. CLAIRAUT obtient ainsi la correction de l'expression du temps :

$$-0,005361\chi \sin \omega\nu - 0,00128\chi \sin(n+m)\nu + 0,001195\chi \sin(n-m)\nu \quad (4.128)$$

où m est le rapport du mouvement de l'anomalie moyenne au mouvement moyen même du Soleil et $\chi = Nk^2/Mf^2$. L'orbite de la Lune est supposée circulaire.

Un problème subsiste avec la détermination de la masse de la Lune insuffisamment estimée par NEWTON, et CLAIRAUT propose de la déduire des observations même du Soleil. Finalement, il trouve l'équation de correction du lieu du Soleil relativement à l'action de la Lune :

$$+12'' \sin t + 2,9'' \sin(t+z) - 2,7'' \sin(t-z) \quad (4.129)$$

où t est le lieu de la Lune moins celui du Soleil et z l'anomalie moyenne du Soleil.

L'article troisième discute la correction du lieu du Soleil due à l'action de Jupiter. CLAIRAUT suit sa méthode employée déjà dans le cas de la Lune. La correction de l'expression du temps devient :

$$\begin{aligned}
&+0,00003429 \sin n\nu - 0,00001295 \sin 2n\nu \\
&-0,00000194 \sin(n-m)\nu + 0,00000735 \sin(2n-m)\nu
\end{aligned} \tag{4.130}$$

et l'équation de correction du lieu du Soleil due à l'action de Jupiter a la forme :

$$-7,1'' \sin t + 0,4'' \sin(t-y) + 1,5'' \sin(2t-y) + 2,7'' \sin 2t \tag{4.131}$$

avec $n x = t$ le lieu moyen de la Terre moins celui de Jupiter, et $m x = y$ l'anomalie moyenne de la Terre.

Dans le quatrième article, CLAIRAUT entre dans les aspects d'un développement en série trigonométrique d'une fonction quelconque T . Cette transformation devient nécessaire dans le cas où les rayons des deux orbites ont un rapport qui ne permet pas de réduire T à peu de termes si l'on veut préserver une précision assez grande dans les calculs. Tel est le cas dans la détermination de l'action de Vénus sur la Terre qui sera le sujet de la dernière partie du mémoire [198]. Ce problème ressemble beaucoup au calcul de l'action de Jupiter sur Saturne traité par L. EULER [200] en 1748 et à laquelle CLAIRAUT se conforme. Il développe la méthode dans toute sa généralité et souligne qu'elle peut être appliquée «à des fonctions de t beaucoup plus compliquées que celles que l'on a traitées jusqu'à présent.» [198] CLAIRAUT spécialise alors pour la série :

$$t = (h - \cos t)^m \tag{4.132}$$

dont il aura besoin pour traiter de l'action de Vénus sur le Soleil, sujet qui fait l'objet de l'article cinquième du mémoire. CLAIRAUT, pour ses calculs, suppose circulaires les deux orbites de la Terre et de Vénus et obtient suivant ses déductions de l'article premier les expressions pour les forces perturbatrices ϕ et Π . IL peut alors calculer ρ et r et remplacer dans ces expressions les constantes numériques. Ainsi, CLAIRAUT obtient, pour la correction de l'expression du temps, l'expression :

$$\begin{aligned}
&-\frac{P}{M} \quad (9,6475, \sin n\nu - 11,1174 \sin 2n\nu \\
&\quad -1,3597 \sin 3n\nu - 0,4089 \sin 4n\nu)
\end{aligned} \tag{4.133}$$

M étant la somme des masses du Soleil et de la Terre et P la masse de Vénus. La correction du lieu vrai s'obtient par un renversement des signes de 4.133 et le remplacement de $n\nu$ par t qui est le lieu héliocentrique de Vénus moins celui de la Terre.

Il reste à connaître P/M , c'est-à-dire le rapport de la masse de Vénus à celle du Soleil : «Comme ce rapport n'est point donné par les phénomènes, il

faut, ainsi que nous l'avons déjà dit, commencer par le supposer le même que celui de la Terre au Soleil, c'est-à-dire, suivant NEWTON, de 1 à 169.282, calculer la Table de correction qui en résulte, et tirer de la comparaison des lieux calculés aux lieux d'observations, la proportion des masses de la Terre et de Vénus.» [198] CLAIRAUT entre alors dans une séquence d'itérations et il pose finalement le rapport de 1 à 1,17552 et trouve l'équation du lieu de la Terre relativement à l'action de Vénus :

$$+10'' \sin t - 11,5'' \sin 2t + 1,4'' \sin 3t - 0,4'' \sin 4t \quad (4.134)$$

l'argument étant le lieu héliocentrique de Vénus moins celui de la Terre.

CLAIRAUT connaît très bien les points faibles de son argumentation, qui sont les masses respectives de la Lune et de Vénus. Voilà pourquoi il a absolument besoin des résultats de l'Astronomie observationnelle. Ainsi, il souligne que l'Abbé DE LA CAILLE a fait d'excellentes observations du Soleil et a rectifié l'équation du centre avec le plus grand soin en vue de fixer la quantité de la plus grande équation lunaire [201]. En ce qui concerne la détermination de la masse de Vénus, CLAIRAUT souhaite un plus grand nombre d'observations de lieux du Soleil dans le temps où l'action de la Lune est nulle, lors des syzygies. Au cas où l'on possédait ces informations, il est facile de calibrer la position du lieu vrai du Soleil. CLAIRAUT conclut : «*On a fixé la masse de la Lune par la méthode ci-dessus expliquée, et l'on a cherché ensuite dans quelle proportion il fallait diminuer les équations de Vénus résultantes de notre table, pour que les lieux calculés s'écartassent le moins qu'il est possible des lieux observés. M. l'Abbé DE LACAILLE, qui a pris la peine de faire cette comparaison, a trouvé qu'en réduisant aux trois quarts les équations de Vénus, l'accord de la théorie et des observations était le plus complet. Donc, comme notre table des équations de Vénus suppose une masse qui est à celle de la Terre comme 1 à 1,1755, il suit des observations dont on a fait usage, que la masse de Vénus est environ les deux tiers de celle de la Terre. On sent bien que cette détermination ne peut être regardée que comme un essai : il faudrait faire une comparaison plus ample de la théorie avec les observations, pour pouvoir être entièrement satisfait sur une matière aussi délicate*» [198]. CLAIRAUT laisse donc amplement du pain sur la planche à ses successeurs.



DANS L'«*Avertissement*» à son livre sur les Comètes [199], CLAIRAUT rappelle les circonstances de la rédaction de son travail. Il y voit une confirmation nouvelle pour la théorie newtonienne de la gravitation et le retour de la comète de 1682 dans le temps prescrit par la théorie newtonienne à «*dissiper le dernier nuage qui pouvait encore demeurer sur le système de l'attraction*» [199]. Il passe ensuite en revue ses propres contributions à la solution du problème

des trois corps et il dit songer en 1757 à appliquer sa théorie du problème des trois corps, en vue de prédire le retour de la comète en question et de contrôler ainsi la prévision faite par HALLEY. En outre, CLAIRAUT savait que l'action des grosses planètes sur la comète pouvait produire une ou plusieurs années de variation dans sa période et il se proposait : « *d'employer ma théorie à la recherche du vrai temps où la Comète attendue devait passer à son périhélie* » [199]

CLAIRAUT, en somme, aurait pu être satisfait de son travail, s'il n'avait pas essuyé « *les contradictions de quelques Géomètres et Astronomes. Ils ont prétendu que toute la gloire de la prédiction devait appartenir à HALLEY, et que mes calculs n'avaient apporté aucun degré d'exactitude à la conjecture de ce célèbre Astronome. Ils ont taxé d'erreur, et d'erreur considérable, la différence qui se trouvait entre le résultat de mon calcul et celui des observations ...* » [199]. Ce reproche va directement en direction de D'ALEMBERT pour ses publications dans différents journaux scientifiques .

Dans le « *Mémoire sur la comète de 1682* » lu à l'Académie Royale des Sciences le 14 novembre 1758 [199], CLAIRAUT souligne encore une fois la grande différence existant entre la détermination de l'orbite des planètes et celle des comètes : « *Dans le cas des Comètes, il n'en est pas de même ; les rayons vecteurs, loin d'être peu différents les uns des autres, varient dans une plus grande raison que celle de 1 : 60 ; les expressions qui donnent la relation entre le temps employé à parcourir les arcs, les rayons qui aboutissent à ces arcs, et les angles que comprennent ces rayons, sont toutes très compliquées et remplies de termes affectés d'arcs de cercles, et d'autres quantités difficiles à employer ...* » [199]

Dans sa conclusion, CLAIRAUT appelle encore à la prudence : « *On sent avec quels ménagements je présente une telle annonce, puisque tant de petites quantités, négligées nécessairement par les méthodes d'approximation, pourraient en altérer le terme d'un mois, comme dans le calcul des périodes précédentes ...* » [199]

Dans la partie technique de son mémoire, CLAIRAUT démêle les difficultés auxquelles il s'attend. Il distingue plusieurs étapes dans l'orbite d'une comète. Ainsi, il distingue d'abord le parcours loin de la source perturbatrice : « *Lorsque la Comète sera dans les régions fort éloignées du Soleil, et par conséquent, de la planète perturbatrice, on pourra, sans commettre une erreur considérable, négliger l'action directe qu'elle reçoit de la planète et n'avoir égard qu'à la force sur le Soleil ...* » [199] Dans le cas de la rencontre plus rapprochée de la planète perturbatrice, la prodigieuse excentricité de l'orbite de la Comète est la cause que les arcs parcourus par elle varient énormément pour des accroissements égaux d'anomalie vraie, et il est plus avantageux d'adopter l'anomalie excentrique comme variable indépendante. CLAIRAUT devra donc transformer les équations générales, établies déjà pour sa théorie de la Lune [193].

Dans le cas, où il ne faut prendre égard qu'à la force de la Comète sur le Soleil, l'expression générale des forces se réduit à :

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{JSj \cos t}{JS^3} \\ \Pi &= \frac{JSj \sin t}{JS^3}\end{aligned}\tag{4.135}$$

où J est le lieu de la planète perturbatrice, j , la projection du point J sur le plan de l'orbite de la Comète et t la projection des deux astres sur la même orbite. CLAIRAUT doit maintenant déterminer l'instant quand les forces perturbatrices sont modifiées afin de tenir compte de l'action de la planète. D'abord, il fait le calcul en admettant que l'orbite de la planète soit une parabole. Celle-ci n'a pas de centre fixe mais un centre mobile formé par une très petite ellipse que le Soleil parcourt autour du centre de gravité comme du Soleil et de la planète perturbatrice. CLAIRAUT doit décomposer les forces attractives en celles dirigées vers le centre fixe et la planète, et il en résulte pour chaque intervalle de temps une nouvelle décomposition des forces en jeu. L'orbite de la Comète devient elliptique, vue à partir du centre de gravité commun du Soleil et de la planète, quand les deux courbes possèdent un point commun et la même tangente.

CLAIRAUT se confine dès le début aux calculs numériques, décision qui demande des déductions spécifiques pour chaque partie de la trajectoire. Et il livre les résultats de ces calculs dans tous les détails. Ainsi, la seconde partie de son mémoire est consacrée à l'application de la théorie développée dans la première partie, au calcul des effets de Jupiter et de Saturne sur la comète de 1759 pendant les trois révolutions connues. Ainsi CLAIRAUT calcule d'abord l'action de Jupiter depuis le périhélie de 1531 à celui de 1607, puis celle de la même planète de 1607 à 1682 pour aboutir à la troisième période allant de 1682 à 1759.

CLAIRAUT s'est rendu très vite compte que l'action de Saturne sur la Comète doit également être prise en considération. Celle-ci était particulièrement importante pour la période 1607 à 1682 quand Saturne et Jupiter étaient très près l'une de l'autre et cette grande proximité des deux astres exigeait que les calculs fussent faits avec toute l'exactitude possible. CLAIRAUT se rend compte : «... que la négligence de ces éléments pour la première révolution de la Comète, et la plus grande partie de la seconde rend la comparaison de ces deux périodes beaucoup plus imparfaites que celle de la seconde et de la troisième.» [199] CLAIRAUT rentre alors dans les détails : il suppose d'abord qu'à la fois Jupiter et Saturne soient dans le plan de l'orbite de la Comète et il obtient, après des considérations plutôt subtiles le résultat que l'action de Saturne n'avait pas un effet sensible sur le total des actions dirigées vers la comète et il se demande que «si l'on fait attention au peu d'importance de l'objet de ce calcul, on verra qu'il ne valait pas la peine de refaire tant d'opérations pénibles.» [199] Cependant CLAIRAUT persiste et il dresse des tableaux pour donner les résultats de la différence cherchée entre les deux périodes.

La cinquième section compare les deux révolutions de 1531 à 1607 et de 1607

à 1682 en ne considérant que l'action de Saturne sur le Soleil, avec le résultat de l'effet total des forces de Jupiter et de Saturne sur la Comète pendant ces mêmes révolutions. Il parvient à un résultat mathématique de 425, 65 jours pour l'action combinée des deux planètes, un résultat qui ne diffère que d'environ 33 jours de celui que les observations ont donné.

La troisième partie du mémoire enseigne à déterminer les changements que l'action des Planètes peut causer aux éléments des orbites des Comètes. CLAIRAUT avait déjà conclu au résultat de son travail dans le mémoire de 1682 : *« On voit ainsi que la théorie donne à un mois près, la différence si remarquable qui est entre les deux révolutions connues de notre Comète ; or si l'on fait attention à la longueur de ces périodes, à la complication des deux causes, qui en ont produit l'inégalité, et la nature du problème qui les mesure, on trouvera peut-être cette nouvelle vérification du système newtonien, aussi frappante qu'aucune de celles qu'on ait données jusqu'à présent. »* [199]

La prédiction de CLAIRAUT sur le passage de la Comète s'avérait exacte et elle passa son périhélie vers la mi-avril de 1759.

Chapitre 5

D'Alembert et la mécanique céleste

5.1 D'Alembert, philosophe et mathématicien



EN tête de ses *«Eléments de Philosophie»*, D'ALEMBERT définit lui-même ce XVIII^e siècle dont il est un des principaux artisans à la fois sur le plan des sciences que celui de la philosophie. Il dit : *«Pour peu qu'on considère avec des yeux attentifs, le milieu du siècle où nous vivons, les éléments qui nous agitent, ou du moins qui nous occupent, nos mœurs, nos ouvrages, et jusqu'à nos entretiens, il est bien difficile de ne pas apercevoir qu'il s'est fait à plusieurs égards un changement bien remarquable dans nos idées ; changement qui, par sa rapidité, semble nous en promettre un plus grand encore. C'est au temps à fixer l'objet, la nature et les limites de cette révolution, dont notre postérité connaîtra mieux que nous les inconvénients et les avantages . . . Notre siècle s'est donc appelé par excellence le siècle de la Philosophie . . . Si on examine sans prévention l'état actuel de nos connaissances, on ne peut disconvenir des Progrès de la Philosophie parmi nous. La science de la nature acquiert de jour en jour de nouvelles richesses ; la Géométrie en reculant ses limites, a porté son flambeau dans les parties de la Physique qui se trouvaient le plus près d'elle ; le vrai système du monde a été connu, développé et perfectionné . . . Depuis la Terre jusqu'à Saturne, depuis l'Histoire des Cieux jusqu'à celle des insectes, la Physique a changé de face. Avec elle presque toutes les autres Sciences ont pris une nouvelle forme . . . Cette fermentation, agissant en tous sens par sa nature, s'est portée avec une espèce de violence sur tout ce qui s'est offert à elle, comme un fleuve a brisé ses digues . . . Ainsi depuis les principes des sciences profanes jusqu'aux fondements de la révélation depuis la Métaphysique jusqu'aux matières*

de goût, depuis la Musique jusqu'à la Morale, depuis les disputes de Théologiens jusqu'aux objets du commerce, depuis les droits des Princes jusqu'à ceux des peuples, depuis la loi naturelle jusqu'aux lois arbitraires des Nations, en un mot depuis les questions qui nous touchent davantage jusqu'à celles qui nous intéressent le plus faiblement, tout a été discuté, analysé, agité du moins. Une nouvelle lumière sur quelques objets, une nouvelle obscurité sur plusieurs, a été le fruit ou la suite de cette effervescence générale des esprits, comme l'effet du flux et du reflux de l'océan est d'apporter sur le rivage quelques matières, et d'en éloigner les autres.» [202]

Avec ce court passage, D'ALEMBERT a su donner une idée claire de l'allure et de la direction de toute la vie intellectuelle de son époque que nous nommons aujourd'hui le «*Siècle des Lumières*». C'est une époque qui engendre dans son sein une force neuve au travail et qui est fascinée beaucoup plus par son mode d'action que par les créations inlassables de cette même force. Il n'y a eu guère de siècle qui ait été aussi intimement enthousiasmé de l'idée du progrès intellectuel que le siècle des Lumières. Mais le «*progrès*» n'est pas considéré dans le sens quantitatif, comme une simple extension du savoir, il y a toujours une détermination qualitative visant à trouver la certitude et l'unité de l'esprit humain. Cette unité, le XVIII^e siècle l'identifie dans la raison. La raison est une et identique pour tout sujet pensant, pour toute nation, toute époque, toute culture. De toutes les variations des dogmes religieux, des maximes et des convictions morales, des idées et des jugements théoriques, se détache un contenu ferme et immuable, homogène, et son unité et sa consistance sont justement l'expression de l'essence propre de la raison. [203] Cette raison a ses manières propres pour se manifester au XVIII^e siècle. Si au courant des cent années précédentes, on mettait le poids, avec DESCARTES et MALEBRANCHE, avec LEIBNIZ et SPINOZA sur la «*déduction*» et l'explication systématique, le XVIII^e siècle chercha une autre conception de la vérité et de la «*philosophie*» qui donne aux deux des formes plus libres et à la fois plus concrètes. Au lieu du «*Discours de la Méthode*», le nouveau siècle se rapporte aux «*PRINCIPIA*» et aux «*Regulae philosophandi*» contenues au troisième livre de l'œuvre maîtresse de NEWTON pour résoudre le problème central de la méthode de la philosophie. La voie newtonienne n'est pas celle de la déduction pure mais celle de l'analyse. NEWTON ne part pas d'un ensemble de principes et d'axiomes plus ou moins universels pour arriver, moyennant des raisonnements abstraits, à la connaissance des simples «*faits*». Pour lui les phénomènes sont le donné dont il faut déduire les principes. Voilà pourquoi seulement l'expérience et l'observation peuvent mener à des conclusions qui serviront à formuler des principes généraux. Pourtant le newtonisme ne présuppose comme objet et condition inviolable de la recherche que l'ordre et la légalité parfaite de la réalité empirique à travers l'existence d'une forme qui les pénètre et les unit et qui est de nature mathématique. C'est ce nouveau programme méthodologique qui a empreint de sa marque toute la pensée du XVIII^e siècle.

La philosophie du Siècle des Lumières met en effet ce paradigme au centre de ses intérêts tout en généralisant son application. Elle ne se contente pas

de voir dans l'analyse l'outil exclusif des sciences physico-mathématiques, mais la considère comme l'instrument nécessaire en vue de générer une pensée en général. Tous les philosophes s'accordent pour proclamer que la vraie méthode de la métaphysique est en fait la méthode newtonienne. VOLTAIRE ne dit-il pas dans son *«Traité de Métaphysique»* que l'homme n'a besoin de rien de plus pour s'orienter intellectuellement : *«Il est clair qu'il ne faut jamais faire d'hypothèse ; il ne faut point dire : Commençons par inventer des principes avec lesquels nous tâcherons de tout expliquer. Mais il faut dire : Faisons exactement l'analyse des choses ... Quand nous ne pouvons nous aider du compas des mathématiques, ni du flambeau de l'expérience et de la physique, il est certain que nous ne pouvons faire un seul pas.»* [204]. VOLTAIRE est optimiste même s'il croit que la pénétration jusque dans l'être absolu de la matière ou de l'âme humaine restera interdite à tout jamais. Il voit dans la raison humaine un instrument pour parcourir en toute sûreté ce monde empirique en vue de l'habiter commodément, et non pas une clé vers le monde de la transcendance. Le statut de la raison a ainsi profondément changé vis à vis de celui qu'elle avait dans la pensée du XVII^e siècle. En effet pour DESCARTES et SPINOZA, la raison était la région des *«vérités éternelles»*, ces vérités qui sont communes à l'esprit humain et à l'esprit divin. Le XVIII^e siècle est devenu à la fois plus terre à terre et plus modeste. D'une participation à la transcendance, la raison est devenue une forme d'acquisition de la vérité, une condition indispensable de toute certitude. Elle délie l'esprit de tous les simples faits, des simples données, de toute croyance fondée sur la révélation, la tradition et l'autorité ; elle veut mettre en pièces la croyance et la vérité tout faite. Mais après ce travail dissolvant, ce travail d'analyse, une reconstruction s'impose : il faut faire reconstruire une nouvelle totalité. Mais en créant elle-même cette totalité, en amenant les parties à constituer le tout selon la règle qu'elle a elle-même édictée, la raison s'assure une connaissance parfaite de la structure de l'édifice ainsi engendré. Elle comprend cette structure parce qu'elle peut en reproduire la construction dans sa totalité et dans l'enchaînement de ses moments successifs. C'est par ce double mouvement intellectuel que l'idée se caractérise pleinement : non comme l'idée d'un être mais comme celle d'un faire. [203]

S'il y a accord sur la méthode, il fallait quand même se mettre à la recherche de la frontière entre l'esprit philosophique et l'esprit mathématique, entre les sciences exactes et les sciences humaines. Les mathématiques apparaissaient comme l'exemple et le modèle de la raison mais n'épuisent pas toute la raison. Voilà pourquoi la pensée philosophique veut se libérer des limites que les mathématiques semblent imposer à l'esprit humain sans pour autant s'affranchir de leur domination exclusive, mais en la justifiant par une autre voie. En restant centrée sur l'analyse, qui constitue la forme essentielle de la pensée mathématique, elle veut mettre à profit cette méthode pour ses propres recherches. Ainsi FONTENELLE déclare dans la préface de son ouvrage *«De l'utilité des mathématiques et de la physique»* que : *«L'esprit géométrique n'est pas lié si exclusivement à la géométrie qu'il ne puisse s'en séparer et se transporter en d'autres domaines. Un ouvrage de morale, de politique, de critique,*

voie un ouvrage d'éloquence ne sera jamais, toutes choses égales d'ailleurs, si beau et si parfait que s'il est conçu dans un esprit géométrique». [205] Pour le XVIII^e siècle, l'esprit géométrique devient synonyme d'analyse pure et de par ce fait, est applicable à la fois au domaine du psychique et au plan du social. Et cette dernière devient la source d'une nouvelle intelligibilité qui ouvre de nouveaux domaines à l'autorité de la raison pourvu que celle-ci apprenne à se soumettre à sa méthode spécifique, c'est-à-dire la réduction analytique suivie d'une reconstruction synthétique.

Avec la position centrale donnée à l'analyse par l'épistémologie du XVIII^e siècle, la construction de «*systèmes*» philosophiques devient caduque. Ceux-ci se construisaient à partir d'une idée première, impliquant une certitude suprême intuitivement saisie, pour communiquer cette première certitude à travers la méthode de la démonstration et de la déduction rigoureuse à d'autres propositions en vue de parvenir, au moyen de cette connexion médiate, à parcourir tout entière la chaîne du connaissable et à la clore sur elle-même. Les maillons de cette chaîne sont tous interdépendants et aucun de ceux-ci ne s'explique par lui-même. Le siècle des Lumières n'a que faire de telles explications systématiques sans pour autant perdre tout intérêt pour l'esprit systématique qu'il distingue soigneusement de l'esprit de système. Le «*Traité des Systèmes*» de CONDILLAC donne la justification de cette distinction dans la théorie de la connaissance. L'auteur essaie dans cet ouvrage de critiquer les grands systèmes du XVII^e siècle et montre pourquoi un DESCARTES, un MALEBRANCHE ou un SPINOZA ont dû échouer. Au lieu de s'attacher aux faits et de laisser les concepts se former à leur contact, ces auteurs ont élevé au rang de dogme, unilatéralement, le premier concept venu. CONDILLAC propose que le nouvel esprit systémique soit bâti sur les liens nouveaux entre l'esprit «*positif*» et l'esprit «*rationnel*». Ces liens n'éviteront pas tous les conflits mais pourront quand même mener à une médiation si l'on ne cherche pas l'ordre ou la raison comme une règle antérieure aux phénomènes, concevable et exprimable a priori, mais qu'on découvre cette raison dans les phénomènes comme la forme de leur liaison interne et de leur enchaînement permanent. En conséquence, le physicien devra en définitive faire abandon de l'idée d'une explication totale de l'univers pour se concentrer sur les relations déterminées qui unissent ses divers éléments. Il s'en suit que le modèle géométrique déductif doit être remplacé par celui de l'arithmétique qui offre l'exemple le plus clair et le plus simple d'une théorie des relations en général et de la logique sous-jacente [206]. VOLTAIRE a adopté et fait sienne cette réflexion au cours de ces luttes contre la physique cartésienne. Plus encore : il y voit un principe général, nullement valable pour la seule physique, mais pour tout savoir en général qui dorénavant se soumet à des conditions et des restrictions bien déterminées. «*Quand nous ne pouvons nous aider du compas des mathématiques, ni du flambeau de l'expérience et de la physique, il est certain que nous ne pouvons faire un seul pas ... C'est en vain que nous espérons déchiffrer jamais l'essence des choses, leur pur en soi. Nous ne pourrons pas plus comprendre, par des idées générales, comment il est possible qu'une fraction de matière agisse sur une autre que nous ne parvien-*

drons à nous faire une idée nette de la naissance de nos propres représentations. Dans un cas comme dans l'autre, il faudra nous contenter d'établir le «quoi» sans avoir la moindre idée du «comment». Nous demander «comment» nous pensons et sentons, comment nos membres obéissent au commandement de notre volonté, c'est nous interroger sur les secrets de la création. Or tout savoir ici nous abandonne : il n'y a pas de savoir des premiers principes. Rien de véritablement premier, d'absolument originaire ne sera jamais pleinement et adéquatement connu de nous. Aucun premier ressort, aucun premier principe ne peut être saisi par nous» [207].

Le texte cité de VOLTAIRE fixe assez bien les possibilités de la raison humaine et limite en même temps notre compréhension de l'univers. La nouvelle théorie de la connaissance dérive les principes des faits qui en sont à l'origine. Il n'est aucun principe qui soit certain en soi ; chacun d'eux doit sa vérité et sa crédibilité à l'usage qu'en font les hommes. Cette affirmation peut être vue comme la base d'une logique de la science expérimentale cultivée surtout par les savants hollandais. Ils associaient d'une manière exemplaire les possibilités d'observation des faits débouchant sur une méthode expérimentale rigoureuse et un style de pensée critique tendant à déterminer, avec clarté et certitude, le sens et la valeur de l'hypothèse scientifique. Ainsi Christian HUYGENS dans son *«Traité de la lumière»* de 1690 établit nettement qu'il n'est pas question d'atteindre en physique la même évidence que dans les déductions mathématiques. Il souligne qu'il n'existe aucune certitude intuitive des vérités physiques. Tout ce que l'on peut obtenir en physique est une *«certitude morale»* qui peut éventuellement s'élever à un si haut degré de probabilité qu'elle ne le cède en rien à une démonstration rigoureuse. Si les conclusions qu'on a tirées sous la présupposition d'une hypothèse déterminée sont confirmées par l'expérience, si l'on peut en particulier, prévoir de nouvelles observations en se fondant sur ces conclusions et qu'on en trouve la confirmation dans l'expérience, on a effectivement atteint cette sorte de vérité à laquelle la physique peut prétendre.

Quelques décennies avant, GALILEI et KEPLER avaient conçu dans la lignée de l'approche méthodologique formulée par HUYGENS, l'idée de la loi naturelle dans toute son ampleur et sa profondeur. L'application globale de cette conception, qu'ils avaient introduite par les cas particuliers de la chute des corps et le mouvement des planètes, fut apportée par l'œuvre de NEWTON. Il ne s'agissait plus d'amener une légalité limitée dans un champ phénoménal bien circonscrit, mais de réglementer le cosmos tout entier par une loi fondamentale que NEWTON apportait avec sa théorie de la gravitation. Ce fut le triomphe du savoir humain égalant le pouvoir créateur de la nature, le remplacement des systèmes philosophiques du XVII^e siècle par un nouveau paradigme. Et c'est ainsi que le XVIII^e siècle a compris et apprécié l'œuvre de NEWTON. Il honore en NEWTON non seulement le grand savant expérimental qui a su donner à la nature des règles fixes et durables, mais qui, en même temps a réformé la philosophie par les *«regulae philosophandi»* [1] dont il a prouvé, à travers les résultats de ses recherches, leur valeur en physique. L'admiration et la vénération que le XVIII^e siècle a manifestées à NEWTON se fondent sur cette interprétation de

l'ensemble de son œuvre qui, non seulement a obtenu des résultats scientifiques prestigieux mais qui a surtout ouvert une voie nouvelle. NEWTON le premier a tracé le chemin qui, des hypothèses arbitraires et fantastiques, conduit à la clarté du concept, des ténèbres à la lumière, comme POPE le formulait. Avec lui la physique avait trouvé le fondement inébranlable pour les deux cent trente années à venir. La correspondance de la nature et de la connaissance humaine fut établie une fois pour toutes avec un lien indissoluble créant une harmonie parfaite entre l'homme et le cosmos. La loi de la gravitation n'est pas une loi que les choses reçoivent de l'extérieur, mais elle découle de leur propre essence qui est dès l'origine implantée en elles. Et elle fut découverte non pas en projetant dans la nature des représentations subjectives, mais en observant celle-ci et en la soumettant à l'expérimentation, à la mesure et au calcul. L'entendement humain est valorisé par le rapport à ses fonctions universelles de comparaison et de dénombrement, d'association et de distinction. La philosophie des Lumières montre alors l'indépendance de la nature en même temps que l'indépendance de l'entendement. Tous deux ont à la fois une originalité propre mais peuvent être mis en corrélation de façon que toute médiation entre eux se réclamant d'une transcendance devient du coup superflue. La philosophie des lumières proclame pour la nature comme pour la connaissance le principe de l'immanence. «*Il faut concevoir nature et esprit par leur essence propre qui n'est pas en soi quelque chose d'obscur et de mystérieux, d'impénétrable à l'entendement, qui consiste au contraire en principes qui lui sont pleinement accessibles, qu'il est capable de découvrir et d'expliquer par lui-même rationnellement.*» [203]. D'ALEMBERT était intimement lié à l'introduction non seulement de la science newtonienne mais aussi de sa philosophie comme en témoigne la citation au début de ce chapitre. Sa biographie reflète son engagement constant à partir de ses débuts avec le «*Traité de Dynamique*» jusqu'à l'Encyclopédie et ses «*Mélanges*».



JEAN LE ROND D'ALEMBERT est non seulement une figure clé du siècle des Lumières mais aussi, un des grands mathématiciens de son temps. Né le 16 novembre 1717, il fut abandonné par sa mère, la marquise de TENCIN sur les marches de l'église St Jean le Rond à Paris. Son père, le chevalier DESTOUCHES, militaire de petite noblesse, réussit à découvrir la trace du nouveau-né et le plaça auprès de la femme d'un vitrier Mme ROUSSEAU que D'ALEMBERT considéra toujours comme sa véritable mère. Il passa la plus grande partie de sa vie dans cette humble maison et il y vécut jusqu'à l'âge de quarante-huit ans. Mais grâce aux soins de son père il put entrer en 1730 au collège des Quatre Nations et jusqu'en 1735 il y fut l'élève de maîtres cartésiens et malebranchistes. Il se passionna vite pour les mathématiques profitant du fait que le Collège était le seul de son espèce à posséder une chaire de mathématiques qui avait compté parmi ses premiers titulaires Pierre VARIGNON. Bachelier ès arts en

1735, D'ALEMBERT avait accumulé ses connaissances grâce à ses propres lectures et il avait su profiter amplement de la riche bibliothèque du Collège. Ne pouvant vivre de sa fortune, D'ALEMBERT devait se former pour une profession. Il fit d'abord des études de droit, obtenant le titre d'avocat en 1738, pour entreprendre ensuite des études de médecine. Mais sa passion pour les mathématiques ne l'abandonna plus et il revint définitivement à la géométrie. Il s'y consacra dès lors si complètement raconte-t-il «*qu'il abandonna absolument pendant plusieurs années la culture des belles-lettres, qu'il avait cependant fort aimées durant ses premières études*» [208]. Dès 1739, D'ALEMBERT, comme il se fit appeler depuis lors, envoya plusieurs mémoires à l'Académie Royale des Sciences de Paris qui furent favorablement remarqués par CLAIRAUT. Sur la proposition de celui-ci il fut admis en 1741 à l'Académie comme «*Associé astronome adjoint*» à l'âge de vingt-quatre ans. D'ALEMBERT connut alors une longue et riche période productive : mémoires de mathématiques et d'astronomie, livre sur la dynamique et l'hydrodynamique, qui fut marqué d'abord par le «*Traité de Dynamique*» lu devant l'Académie en 1742 et publié en 1743. Ce premier chef-d'œuvre influença grandement le développement de la mécanique rationnelle et fut suivi par le «*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*» paru en 1744. Les deux traités assurèrent la célébrité de D'ALEMBERT dans le monde scientifique et lui firent faire la connaissance de MAUPERTUIS alors président de l'Académie de Berlin mais aussi de Daniel BERNOULLI et de Leonard EULER, qui eux aussi furent membres de la même académie. En 1743 D'ALEMBERT soumit sa pièce «*Réflexions sur la cause générale des vents*» au concours de l'Académie de Berlin, gagna le premier prix et en fut élu membre. Sa participation à un deuxième concours en 1749 ne fut pas couronnée de succès mais fut l'origine de son «*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*» publié en 1752 qui fonda la physique des milieux continus.

D'Alembert continua ses travaux en mathématiques et en mécanique dans les années suivantes. Ainsi il trouva la première solution du problème de l'équation des cordes vibrantes en 1747 et ouvrit ainsi, avec EULER, le nouveau domaine des équations aux dérivées partielles.

La même année il fit paraître son premier mémoire sur le problème des trois corps : «*Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle*» qui est imprimé dans le volume de 1745 des Mémoires de l'Académie de Paris [209]. Dans ses «*Recherches sur la précession des Equinoxes et sur la mutation de l'axe de la Terre*» parues en 1749, il apporta l'explication théorique de ces phénomènes en les rapportant à un problème particulier de trois corps englobant le Soleil, la Terre et la Lune.

Si D'ALEMBERT était entré à l'Académie des Sciences grâce à CLAIRAUT, leur compétition serrée surtout dans la théorie de la Lune se transforma peu à peu en hostilité déclarée. Il en résulta d'incessantes querelles de priorité qui amenaient D'ALEMBERT à publier ses principaux travaux quelquefois avant d'avoir terminé définitivement la rédaction. Ainsi ses textes, édités dans la hâte, gardaient une certaine allure brute et confuse qui les rendent difficilement

lisibles.

La dernière grande œuvre scientifique de D'ALEMBERT fut en 1754 ses «*Recherches sur différents points importants du système du monde*» [210] qui contient sa théorie de la Lune suivie encore en 1761 et les années suivantes par les «*Opuscles mathématiques*» [210] dont la qualité n'atteint pas celle de ses œuvres antérieures.

L'hostilité de CLAIRAUT bloquait D'ALEMBERT dans son avancement au sein de l'Académie Royale des Sciences et il demeura «*Associé astronome adjoint*» jusqu'à ce qu'il puisse succéder en 1765 à CLAIRAUT après la mort de celui-ci. La rivalité avec EULER ne fut pas moindre qu'avec CLAIRAUT. En effet le premier soignait ses travaux bien mieux que D'ALEMBERT, toujours hanté par la sauvegarde de la primeur de ses découvertes. Et ainsi il arriva que le mérite d'une découverte fut quelquefois attribué à EULER à cause de son présentation plus directe et élégante d'autant plus qu'il reprenait les idées de D'ALEMBERT sans le citer. Ainsi les relations entre les deux hommes qui furent amicales jusqu'en 1751 se tendirent de plus en plus. Après l'échec de D'ALEMBERT pour le prix de l'Académie de Berlin en 1749, dû à l'intervention d'Euler, la rivalité scientifique entre eux se doublait d'un ressentiment d'EULER à l'égard de D'ALEMBERT qui exerçait une grande influence intellectuelle sur le roi FRÉDÉRIC II. Ce dernier refusa d'accorder à EULER la présidence de l'Académie de Berlin et voulut persuader D'ALEMBERT de reprendre la succession de MAUPERTUIS. Comme celui-là refusait, MAUPERTUIS garda le titre de président de l'Académie de Berlin jusqu'à sa mort en 1759.

En raison de l'hostilité d'EULER, D'ALEMBERT eut de plus en plus de difficultés à faire publier ses travaux dans les Mémoires de l'Académie de Berlin ceci jusqu'à ce que LAGRANGE accéda à la présidence de cette institution. Cette situation l'amena à chercher un autre moyen de publication. Il le trouva avec ses «*Opuscles mathématiques*» [210] dont 8 volumes seront publiés, les deux premiers en 1761. D'ALEMBERT élaborait son œuvre scientifique pour l'essentiel entre 1742 et 1754 tout en poursuivant ces travaux quoique à un rythme moins rapide. Son intérêt pour les sciences tarissait à partir de 1764, ceci à cause de son engagement philosophique de plus en plus marqué. En effet D'ALEMBERT comme philosophe fut un des premiers à établir un nouveau rapport entre les sciences naturelles et la philosophie telle qu'elle se pratiquait au XVII^e siècle. Méfiant envers les systèmes métaphysiques qui prétendaient tout expliquer, D'ALEMBERT proposait un programme plus modeste pour remplacer les systèmes de DESCARTES et de LEIBNIZ. D'ALEMBERT proclamait la fin des grands systèmes philosophiques sans pour autant renoncer à l'idée d'une unité fondamentale de la nature se manifestant par une unification de la connaissance. Or il ne supposait pas acquise cette unité d'emblée mais il recherchait à démontrer celle-ci à travers la contemplation de cas concrets. Voilà pourquoi la philosophie de D'ALEMBERT ne se présente pas sous la forme de traités systématiques sans pour autant être incohérente. Ses investigations critiques sur les concepts à la base des sciences physiques et mathématiques, mais aussi ses analyses sur la genèse et la nature des connaissances scientifiques ont, en fait

imprégné durablement la pensée de la génération des savants suivant sa génération, tels que LAGRANGE et LAPLACE, mais ont eu aussi une influence sur des philosophes-savants jusqu'au XX^e siècle.

Son épistémologie des principes pour établir une théorie physique fut une sorte de greffe de la mécanique newtonienne sur la conception cartésienne de l'intelligibilité mathématique et physique. [208]. Elle avait l'avantage de ne pas précéder les élaborations scientifiques de D'ALEMBERT mais de les accompagner, profitant ainsi d'une boucle itérative garantissant à la fois la construction de l'édifice scientifique tout en lui donnant des fondations solides.

D'ALEMBERT fut un cartésien dans son souci de parvenir à une rationalisation totale de l'unité des phénomènes et de la connaissance, dans sa conception de l'évidence, de la certitude et de l'intuition qu'il s'imagine enracinée dans la pensée de chaque être humain en vue de s'assurer de la réalité du monde et de celle de sa propre conscience. Déjà son éducation au Collège des Quatre nations par MALEBRANCHE le familiarisait avec la philosophie de DESCARTES telle qu'elle fut enseignée en France et interprétée par celui-ci. Dès lors il lui restait une inclinaison certaine pour cette philosophie d'autant plus que ses sources en mathématiques provenaient toutes du cercle de MALEBRANCHE, son professeur au Collège qui lui apprit aussi la physique cartésienne avec ses idées innées et les tourbillons expliquant les mouvements dans le système solaire. Même si D'ALEMBERT soulignait avoir abjuré le cartésianisme cela n'est pas complètement vrai et beaucoup de concepts provenant de DESCARTES peuvent être découverts dans ses écrits philosophiques.

D'ALEMBERT abhorrait la métaphysique, mais son engagement presque positiviste en philosophie était pourtant bâti sur certains présupposés incontrôlables auxquels il souscrivait. Ainsi sa croyance en l'unité de toutes les sciences était un tel dogme et non pas une découverte empirique. Egalement son affirmation que tous les résultats scientifiques étaient soit mathématiques soit physiques était a priori. La foi de D'ALEMBERT en la suprématie et l'unité de la raison avait clairement des racines cartésiennes. Déjà à celui-ci, la possibilité de pouvoir appliquer les mathématiques à toute la physique révélait une unité de notre savoir. Celles-ci trouvaient leur emploi non seulement en astronomie, en optique et en acoustique, que les anciens classaient sous le nom de mathématiques, mais aussi dans l'ensemble de la physique. En adoptant le vocabulaire des anciens, DESCARTES qualifia à son tour la science du nom de «*mathématiques universelles ... , science générale qui explique tout ce qu'on peut chercher touchant l'ordre et la mesure.*» D'ailleurs, dit-il «*ce dont il faut se persuader c'est que toutes les sciences sont tellement liées ensemble*» qu'elles doivent être tenues «*comme dépendant les unes des autres*» et formant un tout. Pour DESCARTES, cette unité fondamentale ne doit jamais être perdue de vue et quiconque l'aura parfaitement comprise pourra être assuré d'avoir accompli un «*progrès considérable*» dans l'entendement de la nature, ce que ne pourrait réaliser quelqu'un qui resterait limité à sa vision d'une «*science particulière*» comme il le formulait dans ses «*Règles pour la direction de l'esprit*». [211, 212]

D'ALEMBERT, en épousant l'épistémologie cartésienne, ne se rend même

plus compte de l'influence de DESCARTES et de MALEBRANCHE sur ses écrits. Et il peut développer, en se fondant sur les idées de ces derniers, une généalogie des sciences et une classification de ces dernières fondée sur elles. D'après lui, par un dépouillement des propriétés sensibles et physiques des corps réels, on peut passer de l'objet à son extension et de là aux grandeurs d'espace, et donc de la physique à la géométrie. Viennent ensuite les nombres, l'arithmétique et l'algèbre : «*Par des opérations et des abstractions successives de notre esprit, nous dépouillons la matière de presque toutes ses propriétés sensibles, pour n'envisager en quelque manière que son fantôme.*» [213]. L'algèbre devient aussi l'idéal de vérité mathématique parce qu'étant plus abstraite que la géométrie. Elle prend dans la réflexion de D'ALEMBERT la place que la «*mathématique universelle*» occupait chez DESCARTES. D'idéales, les mathématiques deviennent rationnelles, servant à la représentation devant la raison et quittent le statut de science purement intellectuelle et abstraite dont l'objet n'existe que dans l'esprit humain. L'avènement de l'analyse a consommé ce changement de point de vue. Elle remplit aux yeux de D'ALEMBERT une fonction unitaire en donnant les moyens d'embrasser d'un seul regard une totalité complexe, voire de réduire en un système unique basé sur un petit nombre de principes toute la science. L'analyse convertit des arguments complexes et multiples en signes et concentre ainsi en peu de place un grand nombre de «*vérités*» de sorte que : «*par la seule étude d'une ligne de calcul, on peut apprendre en peu de temps des sciences entières, qui autrement pourraient être apprises en plusieurs années*» [213]. Ainsi les mathématiques traduisent-elles le réel, quoique un réel abstrait, le seul que l'homme puisse connaître en raison, donc avec quelque certitude. La qualité comme catégorie de la connaissance est rejetée et l'équation dans laquelle s'exprime un problème physique n'est pas le phénomène lui-même mais se juxtapose en quelque sorte à lui et sert à l'exprimer. D'ALEMBERT ne conçoit pas l'abstraction des concepts mathématiques comme une construction purement mentale mais plutôt comme des découvertes préexistant en quelque sorte dans le ciel des idées platoniciennes que la raison mathématique découvre et dévoile beaucoup plus qu'elle ne construit.

D'ALEMBERT entre à l'Académie Française en 1754 et en devient le secrétaire perpétuel en 1772. Il s'impose alors le devoir, que ses prédécesseurs négligeaient depuis quelque temps, de continuer l'histoire de cette compagnie. Ainsi il se consacra à la rédaction des «*Eloges historiques*» qui occupent un tiers de son œuvre purement littéraire et philosophique. Leur rédaction devient son activité principale dans la dernière partie de sa vie. La «*Correspondance littéraire*» les décrit comme «*un cours de littérature d'une forme neuve et piquante*» qui «*permettait de répandre les plus grandes clartés sur la métaphysique des arts et du goût*» et par là sur la connaissance de soi. [208]. D'ALEMBERT, s'il recueillait un succès mondain certain par ses écrits, fut aussi critiqué. En effet, il y avait un inconfort dans sa position à cheval, sur les sciences et la philosophie ; il fut parfois mal vu des mathématiciens parce qu'il était philosophe, et des philosophes et gens de lettres parce qu'il était géomètre.

Malgré cette position un peu équivoque, D'ALEMBERT était un savant en-

gagé philosophiquement. Et cet engagement s'est marqué avant tout dans l'œuvre monumentale de l'Encyclopédie dont il fut co-directeur avec DIDEROT. Vingt-huit volumes in folio, plus de 71'800 articles, 2'885 gravures, 140 collaborateurs identifiés et bien d'autres restés anonymes, une vingtaine d'années de travail, ces quelques chiffres suffisent à prendre la mesure de l'immense entreprise qui a été la réalisation du «*Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*».

L'idée d'une telle somme, formant un inventaire complet des connaissances humaines au milieu du XVIII^e siècle n'était pas nouvelle puisqu'un siècle auparavant, BACON, le penseur de la science expérimentale en avait posé les bases. Mais l'œuvre de D'ALEMBERT et de DIDEROT est loin d'être la simple reproduction d'un programme tout tracé outre-Manche. La Grande Encyclopédie est spécifique, non seulement par sa taille, mais aussi par son ambition philosophique. Elle est d'abord une mise à jour des connaissances scientifiques dans leurs formes les plus avancées mais aussi et surtout une source pour alimenter les débats que ces sciences suscitent. Finalement elle est un outil pour ouvrir les brèches que la société traditionnelle montre d'une façon toujours plus voyante et devient par là un engagement contre l'obscurantisme et l'arbitraire, pour la Raison et la condition de son exercice : la Liberté. L'Encyclopédie eut une part considérable dans la préparation des esprits aux changements que symboliserait la Révolution française, et son influence sur l'évolution ultérieure des idées continua durablement. Elle affirma le rôle désormais majeur des sciences et des techniques dans la société et dans la culture.

D'ALEMBERT restait à la tête de cette entreprise gigantesque qu'était la rédaction de l'Encyclopédie, ensemble avec DIDEROT. Au début, les deux co-directeurs étaient d'accord sur la marche à suivre : tout faire pour ne pas être inquiété par la censure. Et D'ALEMBERT insistait depuis le début sur l'impossibilité pour des savants d'écrire sans écrire librement. DIDEROT, lui, pensait pouvoir contourner la censure par une utilisation à la fois subtile et subversive de renvois d'un article à l'autre. Si l'entreprise n'était pas sans problèmes les premières années, la crise déterminante entre D'ALEMBERT et DIDEROT éclata en 1759 après des attaques publiques survenant de tous les côtés. En effet, l'article «*Genève*» rédigé par D'ALEMBERT avait suscité des remous et mené une controverse publique avec Jean-Jacques ROUSSEAU. En plus D'ALEMBERT s'attira les foudres des clergés catholique et calviniste. Après que DIDEROT ait mis en doute l'opportunité des remarques théologiques contenues dans l'article, D'ALEMBERT se brouilla avec le premier et se retira de l'entreprise. Après bien des péripéties, il accepta de revenir sur sa décision mais pour s'occuper désormais uniquement de la partie «*mathématique*» renonçant à toute nouvelle préface et à plus forte raison, à toute prétention à la direction idéologique de l'ouvrage.

La célébrité de D'ALEMBERT comme philosophe est surtout fondée sur son «*Discours préliminaire de l'Encyclopédie*» [214]. Il y esquisse une philosophie naturaliste de la connaissance, fondée sur les sensations, et approchée sous un double point de vue, génétique et historique. D'ALEMBERT nous prévient que

son Discours, à l'instar de l'Encyclopédie elle-même, contiendra deux parties. La première partie du Discours est l'exposition d'une théorie de la connaissance dans la tradition de LOCKE et de CONDILLAC telle qu'elle a été référée plus haut. Ainsi l'épistémologie exposée dans le Discours semble tourner le dos à celle de Descartes pour se rattacher directement à ce qu'on appelle depuis le XIX^e siècle, le sensualisme : doctrine d'après laquelle toute connaissance vient des sensations et d'elles seules. Le sensualisme, puisqu'il nie l'existence d'axiomes en tant que principes de connaissance logiquement distincts de l'expérience, est une forme de l'empirisme, il débouche volontiers sur le positivisme et le scepticisme comme nous l'avons montré plus haut. La première partie du Discours correspond au premier but de l'Encyclopédie qui est de donner sur chaque science et sur chaque art des principes généraux qui en sont à la base pour les ordonner dans l'enchaînement des connaissances humaines. La deuxième partie du Discours contient un tableau précis de la marche des sciences depuis leur renouvellement par BACON jusqu'au temps même de D'ALEMBERT. Il montre dans cette partie l'évolution de l'histoire de la science et en même temps celle de la philosophie pour conclure que les progrès des sciences vont de pair avec les progrès de la raison.

L'œuvre de D'ALEMBERT s'inscrit dans une double filiation newtonienne et cartésienne et fut déterminante pour le développement d'une vue du monde rationnelle mais aussi pour une conception moderne de la physique mathématique. Celle-ci a pu se développer dans les ouvrages classiques de ses disciples, la «*Mécanique Analytique*» de LAGRANGE et la «*Mécanique Céleste*» de LAPLACE. Son influence, à la fois dans les sciences et la philosophie portera loin dans le XIX^e siècle. En prenant ses distances par rapport à la métaphysique des systèmes philosophiques du XVII^e siècle, il exprima à sa façon le nouveau rapport d'anatomie relative dans une mutuelle implication qui s'instaurait entre les sciences et la philosophie. [208]. D'ALEMBERT est mort le 29 octobre 1783 d'une maladie de la vessie.

—III—

TRÈS JEUNE ENCORE, D'ALEMBERT applique ses idées épistémologiques à la mécanique dans son admirable «*Traité de dynamique*» [215] paru en 1743 et réédité en 1758 dans une édition soigneusement revue et considérablement augmentée. Il est intéressant, aussi dans le contexte de l'étude des travaux de mécanique céleste de D'ALEMBERT, de se familiariser avec ses idées concernant le statut de la mécanique et de la nature de ses lois, surtout celle du mouvement des corps.

Quelle est la place à accorder à la mécanique dans la hiérarchie des sciences et quel est son degré de certitude ? Ces deux questions, D'ALEMBERT les pose dans le «*Discours préliminaire*» de son «*Traité*». D'ALEMBERT distingue une certitude appuyée sur des principes physiques qu'il désigne comme étant une

vérité d'expérience et une certitude appuyée sur des principes nécessairement vrais et évidents par eux-mêmes. Il assimile à cette sorte de certitude les sciences traitant du calcul des grandeurs et des propriétés générales de l'étendue : l'Algèbre, la Géométrie et la Mécanique. D'ALEMBERT, parmi ses trois sciences, introduit encore une espèce de gradation : *«plus l'objet qu'elles embrassent est étendu et considéré d'une manière générale et abstraite, plus aussi leurs principes sont exempts de nuages et faciles à saisir. C'est par cette raison que la Géométrie est plus simple que la Mécanique, et l'une et l'autre moins simples que l'Algèbre.»* [215].

D'ALEMBERT affirme donc pleinement que la mécanique est un système rationnel. A première vue, il suit donc les traces de NEWTON et des «PRINCIPIA» qui construit la mécanique sur des axiomes ou des principes abstraits à partir desquels l'ensemble des théorèmes de la mécanique sont démontrés. Pourtant ces principes ne sont pas a priori, NEWTON les déduit des phénomènes pour les généraliser par induction et suit ainsi, tout en la généralisant, l'approche empirique anglaise. D'ALEMBERT voit des problèmes dans la démarche newtonienne, notamment en ce qui concerne le statut des lois du mouvement et le concept de force. Et il propose dans le discours préliminaire de son *«Traité»* non seulement : *«de reculer les limites de la Mécanique et d'en aplanir l'abord»* mais surtout de *«dédire les principes de la Mécanique des notions plus claires»* et de *«les appliquer aussi à de nouveaux usages ; de faire voir tout à la fois, et l'inutilité de plusieurs principes qu'on avait employés jusqu'ici dans la Mécanique, et l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science ; en un mot, d'étendre les principes en les réduisant.»* [215].

Avant de discuter les axiomes de la mécanique, D'ALEMBERT poursuit son analyse des trois sciences qu'il considère comme nécessairement vraies et évidentes par elles-mêmes. Il substitue au critère de simplicité de l'objet d'une science, le domaine d'extension de celui-ci. Ainsi le critère de certitude d'une science devrait dépendre du pouvoir d'abstraction et de généralisation de celle-ci. D'ALEMBERT reprend ici en partie les idées de DESCARTES en établissant la proportionnalité entre la simplicité et l'objet d'une science.

En ce qui concerne la mécanique, D'ALEMBERT propose une présentation hiérarchique des degrés de simplicité de ses éléments : l'étendue et l'impénétrabilité, la nature du mouvement et les lois de la percussion. Il constate que cette science a été négligée à cet égard : *«aussi la plupart de ses principes, ou obscurs par eux-mêmes, ou énoncés et démontrés d'une manière obscure, ont-ils donné lieu à plusieurs questions épineuses. En général, on a été plus occupé jusqu'à présent à augmenter l'édifice qu'à en éclairer l'entrée ; et l'on a pensé principalement à l'élever, sans donner à ses fondements toute la solidité convenable.»* [215]

D'ALEMBERT veut parfaire la présentation conceptuelle de la mécanique et reculer les limites de l'indémontrable jusqu'aux idées claires et distinctes de DESCARTES. Ainsi il écrit dans sa préface : *«Je me suis proposé dans cet Ouvrage de satisfaire à ce double objet, de reculer les limites de la Mécanique et*

d'en aplanir l'abord ; et mon but principal a été de remplir en quelque sorte un de ces objets par l'autre, c'est-à-dire, non seulement de déduire les principes de la Mécanique des notions plus claires, mais de les appliquer aussi à de nouveaux usages ; de faire voir tout à la fois et l'inutilité de plusieurs principes qu'on avait employés jusqu'ici dans la Mécanique, et l'avantage qu'on peut tirer de la combinaison des autres pour le progrès de cette Science, en un mot, d'étendre les principes en les réduisant.» [215]

D'ALEMBERT se propose donc de démontrer les principes de la mécanique en les déduisant de principes encore plus simples et des «*notions les plus claires*» telles que l'espace et le temps, notions sur lesquelles s'accordent intuitivement et primitivement tous les esprits. Mais cette croyance en un sens commun est en réalité un problème métaphysique que D'ALEMBERT évite pour le moment. Il pose simplement qu'il n'y a pas besoin de définir des idées simples parce que celles-là font l'unanimité chez tous les hommes : «*Tout mot vulgaire qui ne refermera qu'une idée simple ne peut et ne doit pas être défini dans quelque science que ce puisse être, puisqu'une définition ne pourrait en mieux faire connaître le sens.*» [216]

Pour D'ALEMBERT les notions primitives exprimant des idées simples s'enchaînent en définitions qui explicitent la composition d'une idée et permettent ainsi d'arriver à la formulation des lois ou principes qui ne sont rien d'autre que des enchaînements rigoureux de définitions. D'ALEMBERT suit ici assez exactement DESCARTES et son «*Discours de la Méthode*». Ainsi «*La mécanique si l'on parvient à énoncer l'ensemble des notions primitives et des définitions qui constitue son cadre conceptuel, deviendrait un système rationnel puisque toutes ses propositions seraient déduites et mathématiquement démontrées à partir de cet ensemble. Les principes ou lois de la mécanique ne seraient plus posés comme des axiomes mais seraient d'une part fondés sur l'accord des esprits reconnaissant aux notions primitives un même sens et seraient d'autre part démontrés à partir de définitions nettes et précises.*» [217]

Vers la fin du «*Discours préliminaire*» D'ALEMBERT revient au statut des lois de la mécanique qu'il se propose de réduire à trois : celle de la force d'inertie, celle du mouvement composé et celle de l'équilibre. Il écrit : «*Pour fixer nos idées sur cette question, il faut d'abord la réduire au seul sens raisonnable qu'elle puisse avoir ... La question proposée se réduit donc à savoir si les lois de l'équilibre et du mouvement qu'on observe dans la nature sont différentes de celles que de la matière abandonnée à elle-même aurait suivies ; développons cette idée. Il est de la dernière évidence qu'en se bornant à supposer l'existence de la matière et du mouvement, il doit nécessairement résulter de cette double existence certains effets ; qu'un corps mis en mouvement par quelque cause, doit-on s'arrêter au bout de quelque temps, ou continuer toujours à se mouvoir ; qu'un corps qui tend à se mouvoir à la fois suivant les deux côtés d'un parallélogramme, doit nécessairement décrire, ou la diagonale, ou quelque autre ligne ; que quand plusieurs corps en mouvement se rencontrent ou se choquent, il doit nécessairement arriver en conséquence de leur impénétrabilité mutuelle quelque changement dans l'état de tous ces corps, ou du moins dans l'état de*

quelques uns d'entre eux. Or des différents effets possibles, soit dans le mouvement d'un corps isolé, soit dans celui de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres, il en est un qui dans chaque cas doit infailliblement avoir lieu en conséquence de l'existence seule de la matière, et abstraction faite de tout autre principe différent qui pourrait modifier cet effet ou l'altérer. Voici donc la route qu'un philosophe doit suivre pour résoudre la question dont il s'agit. Il doit tâcher d'abord de découvrir par le raisonnement quelles seraient les lois de la Statique et de la Mécanique, telles que l'expérience les donne, sont de vérité contingente, puisqu'elles seront la suite d'une volonté particulière et expresse de l'Être suprême ; si au contraire les lois données par l'expérience s'accordent avec celles que le raisonnement seul fait trouver, il en conclura que les lois observées sont de vérité nécessaire, non pas en ce sens que le Créateur n'eut pu établir des lois toutes différentes, mais en ce sens qu'il n'a pas jugé à propos d'en établir d'autres que celles qui résultaient de l'existence même de la matière.» [215]. Un peu plus loin, il conclut : «De toutes ces réflexions, il s'ensuit que les lois de la Statique et de la Mécanique ... sont celles qui résultent de l'existence de la matière et du mouvement. Or l'expérience nous prouve que ces lois s'observent en effet dans les corps qui nous environnent. Donc les lois de l'équilibre et du mouvement, telles que les observations nous les font connaître, sont de vérité nécessaire.» [215]

Le raisonnement de D'ALEMBERT est bien sûr un paralogisme. Pour le voir il faut se demander ce que signifie la démarche du «*raisonnement seul*» qui ne tient compte que de l'existence de la matière. L'idée que nous pouvons avoir de celle-ci ne peut venir que de nos sens et tout raisonnement humain ne peut se fonder que sur les sens et l'expérience. Comment, à partir d'un tel fondement expérimental et sensible du raisonnement et de l'idée de matière, les résultats des deux démarches pourraient-ils alors différer ? Or D'ALEMBERT est un représentant du siècle des Lumières et malgré son approche sensualiste, il est partisan d'une autonomie de la raison et de la toute-puissance du raisonnement qui porte en lui sa propre nécessité. Et c'est pourquoi la mécanique, en tant que science rationnelle, doit se situer au-dessus des sciences expérimentales.

—IV—

D'ALEMBERT se propose de démontrer les trois principes de la mécanique : la force d'inertie, le mouvement composé et l'équilibre, à partir de définitions et notions préliminaires de la mécanique qui sont les idées simples de l'espace, du temps, du lieu et du mouvement d'un corps.

Dans le «*Discours préliminaire*», D'ALEMBERT parle d'abord des propriétés du mouvement : «*Rien n'est plus naturel, je l'avoue, que de concevoir le mouvement comme l'application successive du mobile aux différentes parties de l'espace indéfini, que nous imaginons comme le lieu des corps ...*» [215]. Après une sortie contre les cartésiens, «*secte qui à la vérité n'existe presque*

plus aujourd'hui» [215], D'ALEMBERT se propose «de regarder le mouvement comme le transport du mobile d'un lieu dans un autre.» [215] et il fait des considérations sur le rapport des parties du temps avec celui des parties de l'espace parcouru, pour arriver à la conclusion que : «Il est donc évident que par l'application seule de la Géométrie et du calcul, on peut, sans le secours d'aucun autre principe, trouver les propriétés générales du mouvement, varié suivant une loi quelconque.» [215]. D'ALEMBERT vient alors parler de la dynamique : «On voit d'abord fort clairement qu'un corps ne peut se donner le mouvement à lui-même. Il ne peut donc être tiré du repos que par l'action de quelque cause étrangère. Mais continue-t-il à se mouvoir de lui-même ou a-t-il besoin pour se mouvoir de l'action répétée de la cause ? Quelque parti qu'on pût prendre là-dessus, il sera toujours incontestable que l'existence du mouvement étant une fois supposée sans aucune autre hypothèse particulière, la loi la plus simple qu'un mobile puisse observer dans un mouvement est la loi d'uniformité, et c'est par conséquent celle qu'il doit suivre ... Le mouvement est donc uniforme par sa nature : j'avoue que les preuves qu'on a données jusqu'à présent de ce principe ne sont peut-être pas fort convaincantes ; ... Il me semble que cette loi d'uniformité essentielle au mouvement considéré en lui-même, fournit une des meilleures raisons sur lesquelles la mesure du temps par le mouvement uniforme puisse être appuyée.» [215]

Pour D'ALEMBERT, toute la mécanique est construite autour de l'idée du mouvement, dont le cas particulier le plus important est le mouvement rectiligne et uniforme dont découle le principe d'inertie. «La force d'inertie, c'est-à-dire la propriété qu'ont les corps de persévérer dans leur état de repos ou de mouvement étant une fois établie, il est clair que le mouvement, qui a besoin d'une cause pour commencer au moins à exister, ne saurait non plus être accéléré ou retardé que par une cause étrangère.» [215]. Le chapitre I du «Traité de Dynamique» a pour objet de démontrer ce principe d'inertie. Dans le paragraphe 2, D'ALEMBERT écrit : «J'appelle avec Monsieur NEWTON force d'inertie, la propriété qu'ont les corps de rester dans l'état où ils sont.» [215]. Comme un corps peut être soit en repos, soit en mouvement, D'ALEMBERT scinde ses explications en deux parties : «Un corps en repos y persistera, à moins qu'une cause étrangère ne l'en tire.» pose-t-il pour les corps en repos. Pour ceux en mouvement, il écrit : «Un corps, mis une fois en mouvement par une cause quelconque, doit y persister toujours uniformément et en ligne droite, tant qu'une nouvelle cause, différente de celle qui l'a mis en mouvement, n'agira pas sur lui ; c'est-à-dire qu'à moins qu'une cause étrangère et différente de la cause motrice n'agisse sur ce corps, il se mouvra perpétuellement en ligne droite et parcourra en temps égaux des espaces égaux.» [215]. D'ALEMBERT justifie la première partie de sa loi d'inertie par le principe de raison.

En effet : «un corps ne peut se déterminer de lui-même au mouvement, puisqu'il n'y a pas de raison pour qu'il se meuve d'un côté plutôt que d'un autre.» [215]. Après avoir souligné dans un corollaire situé après la première loi de l'inertie d'un corps en repos, la passivité des corps qui ne peuvent de leur propre pouvoir accélérer ou retarder un mouvement, D'ALEMBERT entre-

prend la démonstration de la loi d'inertie des corps en mouvement. Comme D'ALEMBERT distingue la cause instantanée et la cause continuée pour l'action sur un corps, sa démonstration doit être double. Il démontre dans le premier cas que, passé le premier instant, l'action de la cause n'existe plus, mais que le mouvement rectiligne et uniforme que le corps a reçu néanmoins subsiste encore. Cette première démonstration repose sur le corollaire. Puisque ce corps ne peut de lui-même accélérer ni retarder le mouvement qu'il a reçu, donc si le mouvement dure au-delà de l'impulsion elle-même, le corps continuera à se mouvoir uniformément si rien ne l'en empêche et en ligne droite. La démonstration concernant le cas où la force motrice exerce une action continuée est basée sur l'identité des effets produits, ce qui est une autre formulation de l'axiome de causalité selon lequel de l'identité des causes on peut conclure à l'identité des effets. En posant cet axiome, D'ALEMBERT démontre le deuxième cas : *« Dans le second cas puisqu'on suppose qu'aucune cause étrangère et différente de la cause motrice n'agit sur le corps, rien ne détermine donc la cause motrice à augmenter ni à diminuer ; d'où il s'ensuit que son action continuée sera uniforme et constante, et qu'ainsi pendant le temps qu'elle agira, le corps se mouvra en ligne droite et uniformément. Or la même raison qui a fait agir la cause motrice constamment et uniformément pendant un certain temps, subsiste toujours tant que rien ne s'oppose à son action, il est clair que cette action doit demeurer continuellement la même, et produite constamment le même effet. »* [215]. Il faut noter que la Remarque I s'ajoutant à la démonstration ne contribue pas à l'éclaircissement de celle-ci. En effet elle retient que *« le corps est donc en quelque manière à chaque instant dans un nouvel état, dans un état qui n'a rien de commun avec le précédent. »* [215]. On est en présence d'une contradiction explicite avec la première partie de la démonstration qui stipule au contraire que le corps reste toujours dans le même état. D'ALEMBERT, avec son affirmation suit LEIBNIZ en supposant que la cause motrice qui tire le corps de l'état de repos doit s'exercer continûment lorsque le corps est en mouvement. Les démonstrations de D'ALEMBERT, et il le ressent lui-même, sont loin d'être concluantes au même titre que des démonstrations géométriques mais *« elles peuvent servir à établir le principe de la force d'inertie qui ne paraît pas devoir être considéré comme un simple principe d'expérience. »* [218]. Force est de constater que D'ALEMBERT a échoué dans sa tentative de vouloir démontrer le principe d'inertie car ses démarches telles que présentées à travers les définitions, notions préliminaires et principe de raison suffisante, ne sont pas épurées de tout présupposé métaphysique dans son cadre conceptuel. Il n'arrive pas à détacher le principe d'inertie de toute expérience ni de toute contingence. Par le même fait, il ne parvient pas à bannir la notion de force de la mécanique quoiqu'il cherche à l'éliminer de cette science parce qu'il croit cette notion surdéterminée, ouvrant la porte à toutes sortes de réflexions métaphysiques.

D'ALEMBERT parle des forces accélératrices au premier chapitre du *« Traité »* : *« La plupart des géomètres présentent sous un autre point de vue l'équation $\varphi dt = du$ entre les temps et les vitesses. Ce qui n'est selon nous, qu'une hypothèse, est érigé par eux en principe. Comme l'accroissement de la vitesse*

est l'effet de la cause accélératrice, et qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces géomètres ne regardent pas seulement la quantité φ comme la simple expression du rapport de du à dt ; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant constant ; de là, ils tirent cet axiome général que le produit de la force accélératrice par l'élément du temps est égal à l'élément de la vitesse.» [215]

Quel est le statut de cette affirmation ? Après avoir mentionné l'avis d'EULER qui considère le principe comme une vérité nécessaire tandis que le professeur de ce dernier Daniel BERNOULLI a opté pour un statut de vérité contingente, D'ALEMBERT déclare le prendre pour une simple définition et *«d'entendre seulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnel.»* [215]. La force motrice, pour D'ALEMBERT est donc : *«le produit de la masse qui se meut par l'élément de sa vitesse, ou, ce qui est la même chose, par le petit espace qu'elle parcourrait dans un instant donné en vertu de la cause qui accélère ou retarde son mouvement.»* [215]. Avec ces réflexions, la question de l'existence des forces a trouvé une réponse pour D'ALEMBERT. Il y voit *«des problèmes qui appartiennent pour le moins autant à la Géométrie qu'à la Mécanique, et dans lesquels la difficulté n'est que le calcul.»* [215]. Le *«Traité de Dynamique»* se passe donc de la notion de force pour le développement ultérieur de la mécanique. Et aussi dans les travaux de mécanique céleste de D'ALEMBERT, l'idée de la force gravitationnelle ne dépasse pas le statut d'une définition.

-V-

DANS LE CHAPITRE II du *«Traité de Dynamique»*, D'ALEMBERT examine le principe du mouvement composé. Les démonstrations qu'il y développe pèchent par la même insuffisance relevée au paragraphe précédent. Elle se traduit par le recours aux mêmes principes implicites : le principe de raison suffisante et le postulat de causalité.

D'ALEMBERT considère le mouvement d'un corps qui change de direction et il le regarde comme composé du mouvement qu'il avait d'abord et d'un nouveau mouvement qu'il a reçu. Il s'ensuit que le principe de la composition du mouvement est itératif et qu'il est toujours possible de composer un mouvement quelconque par un mouvement nouveau qu'a pris le corps et d'un autre qu'il a perdu. Il est donc clair pour D'ALEMBERT *«que les lois du mouvement, changé par quelques obstacles que ce puisse être, dépendent uniquement des lois du mouvement détruit par ces mêmes obstacles.»* [215]. Pour lui, il est évident *«qu'il suffit de décomposer le mouvement qu'avait le corps avant la rencontre de l'obstacle en deux autres mouvements, tels que l'obstacle ne nuise point à l'un, et qu'il anéantisse l'autre.»* [215]

D'ALEMBERT formule le théorème du mouvement composé dans le paragraphe 28 du chapitre II de son *«Traité»* dans la forme suivante : *«Si deux puissances quelconques agissent à la fois sur un corps au point A pour le mouvoir, l'une de A en B uniformément pendant un certain temps, l'autre de A en C uniformément pendant le même temps, et qu'on achève le parallélogramme ABDC, je dis que le corps A parcourra la diagonale AD uniformément, dans le même temps qu'il eût parcouru AB ou AC.»* Comme pour la démonstration du principe de la force d'inertie, D'ALEMBERT explique beaucoup plus qu'il ne démontre. En assimilant la notion de puissance à celle de force, D'ALEMBERT reprend en quelque sorte la formulation de NEWTON du principe de la composition des forces où il avait déjà été précédé par ROBERVAL et VARIGNON. Mais dans une remarque à la suite de sa *«démonstration»*, D'ALEMBERT insiste encore une fois sur son intention de réduire les principes de la mécanique au plus petit nombre. Dans cette idée il ne veut pas introduire la notion de la force, si ce n'est que pour éviter de prendre position dans la querelle des forces vives et voilà pourquoi il se limite à *«tirer tous ces principes de la seule idée du mouvement, c'est-à-dire de l'espace parcouru et du temps employé à le parcourir, sans y faire entrer en aucune façon les puissances et les causes motrices.»* [215]

Au chapitre III, D'ALEMBERT revient à la question du mouvement détruit ou changé par des obstacles, dont il a parlé au *«Discours préliminaire»* : *«Un corps qui se meut peut rencontrer des obstacles qui altèrent ou même anéantissent tout à fait son mouvement; ces derniers, ou sont invincibles par eux-mêmes, ou n'ont précisément de résistance que ce qu'il en faut pour détruire le mouvement imprimé au corps.»* [215]. Il expose alors son idée de la destruction du mouvement : *«Si l'obstacle, invincible ou non, que le corps rencontre, ne fait qu'altérer et changer son mouvement sans le détruire, de sorte que le corps ayant, par exemple, la vitesse a avant de rencontrer l'obstacle, il soit obligé de prendre une vitesse b dont la quantité et la direction soient différentes de la première, il est évident qu'on peut regarder la vitesse a que le corps a lorsqu'il rencontre l'obstacle comme composée de la vitesse b et d'une autre vitesse c, et qu'il n'y a que la vitesse c qui ait été détruite par l'obstacle.»* [215]

A partir de cette formulation, D'ALEMBERT arrive à exprimer son théorème sur l'équilibre de corps matériels après avoir retenu : *«Si les obstacles que le corps rencontre dans son mouvement n'ont précisément que la résistance nécessaire pour empêcher le corps de se mouvoir, on dit alors qu'il y a un équilibre entre le corps et ces obstacles.»* [215]. L'énoncé du théorème prend alors la forme : *«Si deux corps, dont les vitesses sont en raison inverse de leurs masses, ont des directions opposées, de telle manière que l'un ne puisse se mouvoir sans déplacer l'autre, il y aura un équilibre entre ces deux corps.»* [215]. La loi de l'équilibre prend donc la forme :

$$\frac{m}{m'} = -\frac{v'}{v} \quad (5.1)$$

où v, v' sont les vitesses avec lesquelles les masses m et m' tendent à se

mouvoir. Nous sommes ici en présence du principe des travaux virtuels qui servira à D'ALEMBERT à énoncer le théorème qui porte aujourd'hui encore son nom. D'ALEMBERT conclut : «*Donc dans l'équilibre le produit de la masse par la vitesse, ou, ce qui est la même chose, la quantité de mouvement peut représenter la force.*» [215]

D'ALEMBERT, à la fin du «*Discours préliminaire*» se montre convaincu qu'il n'a pas seulement réduit les principes à la base de la mécanique au plus petit nombre, mais qu'en plus il est parvenu à prouver qu'ils ont la nature d'une vérité nécessaire. En effet, il écrit : «*De toutes ces réflexions, il s'ensuit que les lois de la statique et de la Mécanique, exposées dans ce livre, sont celles qui résultent de l'existence de la matière et du mouvement. Or l'expérience nous prouve que ces lois s'observent en effet dans les corps qui nous environnent. Donc les lois de l'équilibre et du mouvement, telles que l'observation nous les fait connaître, sont de vérité nécessaire.*» [215]. Après s'être refusé de réfléchir sur les conséquences métaphysiques de son assertion, il conclut : «*... nous pouvons seulement entrevoir les effets de cette sagesse (celle de l'Etre suprême) dans l'observation des lois de la nature lorsque le raisonnement mathématique nous aura fait voir la simplicité de ces lois, et que l'expérience nous en aura montré les applications et l'étendue.*» [215].

Après ce tour d'horizon des vues de D'ALEMBERT sur le statut et le contenu de la mécanique, nous pouvons conclure qu'à la fois DESCARTES, MALEBRANCHE et NEWTON contribuaient à ses conceptions. S'il est vrai qu'aussi BERKELEY, HUME et MAUPERTUIS critiquaient la notion de Force, ils avaient peu d'influence sur D'ALEMBERT et ses sources sont à chercher auprès des trois premiers nommés. D'ALEMBERT a dû se considérer à la fois comme cartésien et newtonien et il ne ressentait pas l'incommensurabilité entre les mécaniques cartésienne et newtonienne comme en témoignent de nombreux passages dans ses écrits et aussi dans son «*Traité de Dynamique*». Mais en fait la position intellectuelle de D'ALEMBERT n'est guère surprenante. Ses aspirations allaient vers une philosophie mathématique qu'il découvrit à la fois chez DESCARTES et NEWTON. Sans le réaliser, il se départit de NEWTON quand il écrit une mécanique de corps abstraits plutôt qu'une mécanique de corps réels. Si le terme de «*mécanique rationnelle*» fut emprunté à NEWTON, le réalisme de celui-ci était différent de la pensée de DESCARTES et de MALEBRANCHE. Comme nous l'avons vu, NEWTON ne prétendait jamais que ses lois de la mécanique sont a priori. Bien au contraire, il cherchait à les démontrer à travers l'expérience. D'ALEMBERT se prétendait newtonien parce qu'il croyait en l'existence des atomes et du vide, parce qu'il admettait la loi de la gravitation et parce qu'il abhorrait la construction de systèmes métaphysiques. Mais sous sa foi en NEWTON persistait un fort attachement à DESCARTES. [219]

5.2 L'engagement de d'Alembert pour la mécanique céleste

BIEN QUE D'ALEMBERT ait déjà évoqué certains sujets liés à la mécanique céleste dans son «*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*» [220], il ne commença à s'intéresser à cette discipline qu'à partir du mois de mars 1746, à la suite de la décision prise par l'Académie des Sciences de Paris de choisir comme sujet de son concours pour l'année 1748 la grande inégalité de Jupiter et de Saturne. Curieusement il adressa à l'Académie de Berlin ses premiers travaux de mécanique céleste et plus particulièrement ceux concernant la théorie de la Lune [221]. Son second mémoire : «*Idée générale d'une méthode par laquelle on peut déterminer le mouvement de toutes les planètes en ayant égard à leur action mutuelle*» est resté inédit sous sa forme originale et fut publié en 1749 dans les Mémoires de l'Académie de Paris [209]. La troisième pièce portait sur la théorie de la Lune et fut présentée par EULER devant l'Académie de Berlin en date du 23 février 1747. D'ALEMBERT écrivit à ce sujet dans une lettre à EULER datée du 24 mars 1747 : «*Je n'ai prétendu vous envoyer dans mon mémoire sur la Lune que le commencement d'un plus grand nombre de recherches. Je conviens de la vérité de tout ce que vous me dites, et je tâcherai par la suite d'y satisfaire. Mais il fallait bien commencer par la détermination de l'orbite, Problème dont il me semble qu'on n'avait point encore donné une solution analytique. D'ailleurs, il me semble que la méthode que je donne pour trouver le mouvement des nœuds et l'inclinaison renferme des méthodes d'intégration assez singulières, et que d'ailleurs elle ne suppose point le Soleil immobile, comme celle de NEWTON et ceux qui l'ont suivi.*» [222]. Le début de la citation de D'ALEMBERT se rapporte sans doute à une lettre perdue dans laquelle EULER critiquait certaines parties de son mémoire. Dans une autre lettre du 15 avril 1747, EULER atténua certainement ses critiques antérieures concernant le mémoire de D'ALEMBERT sur la Lune quand il écrit : «*Votre pièce sur le mouvement de la Lune est sans doute de la dernière profondeur et votre supériorité dans les calculs les plus difficiles y éclate partout. La remarque que j'ai pris la liberté de vous écrire ne regardait que l'application de votre analyse à l'usage des tables astronomiques. Il s'agit pour cet effet des approximations faciles pour le calcul, et il me semblait que la manière dont vous traitez ce problème n'était pas trop propre par rapport à ces approximations. Car ayant manié cette question de quantités de manières différentes, je n'ai trouvé qu'un seul chemin, qui fut propre pour l'usage astronomique, duquel j'ai aussi calculé mes tables de la Lune.*» [223]. Même en l'absence de certaines pièces essentielles dont le texte original du mémoire, on peut saisir facilement les points importants de la discussion. En effet, tout en reconnaissant la virtuosité de l'approche de D'ALEMBERT, EULER se permet de douter de son utilité pratique. En effet D'ALEMBERT s'est, une fois pour toutes, décidé à donner une orientation théorique à ses travaux, tandis qu'EULER a opté dans tous ses travaux de mécanique pour leur application pratique. Au courant de l'année

1747, D'ALEMBERT envoya encore deux autres mémoires à sujet astronomique à l'Académie de Berlin qui se situent de façon évidente dans la suite directe des écrits antérieurs. Ils furent repris par leur auteur avant que n'intervienne leur publication.

Après avoir commencé à travailler dans ce domaine assez nouveau, D'ALEMBERT a reconnu intuitivement l'importance essentielle des questions alors en discussion : qu'il s'agisse du problème des trois corps en général ou de cas particuliers comme la grande inégalité de Jupiter et de Saturne qui fut l'enjeu du concours de prix de l'Académie de Paris pour 1748 et la théorie de la Lune. Tout comme CLAIRAUT, D'ALEMBERT mettra en doute la validité de la loi de la gravitation comme nous le verrons plus bas. Pendant l'année 1747, D'ALEMBERT poursuit ses difficiles travaux de mécanique céleste, ceci d'autant plus activement qu'il a peur d'être pris de vitesse par CLAIRAUT qui multiplie plis cachetés et mémoires qu'il dépose devant l'Académie. Au centre des recherches de D'ALEMBERT se situe le problème des trois corps. Du 14 au 23 juin 1747, il lit devant l'Académie un mémoire intitulé : «*Méthode générale pour déterminer les orbites de toutes les planètes en égard à l'action mutuelle qu'elles ont les unes sur les autres.*» [209] en y omettant pourtant un passage essentiel qu'il fait dater par le secrétaire perpétuel DE FOUCHY. Il s'agit probablement d'extraits du même mémoire qu'il avait envoyé à Berlin et qui fut présenté par EULER à l'Académie.

Le 15 novembre 1747, CLAIRAUT prit ouvertement position contre l'universalité de la loi de NEWTON. D'ALEMBERT lui, reste plus prudent tout en cherchant à préserver ses droits de priorité par le dépôt de plis cachetés. A son tour, il présente ses nouveaux résultats concernant la théorie de la Lune . «*Application de ma méthode pour déterminer les orbites des planètes à la recherche de l'orbite de la Lune*» [224]. Et tout comme CLAIRAUT, D'ALEMBERT obtient l'autorisation de l'Académie d'insérer ses travaux dans le volume de 1745 des «*Mémoires de Paris*» en cours de préparation. Les travaux des deux savants sont ainsi antidatés de deux années. D'ALEMBERT prépare ainsi un important mémoire : «*Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes en ayant égard à leur action mutuelle*» [209] déjà mentionné plus haut.

La discussion épistolaire que D'ALEMBERT et EULER mènent pendant toute l'année 1748 apporte maintes éclaircissements sur les réflexions des deux savants. D'ALEMBERT est d'abord surpris par la position radicale de CLAIRAUT. Ainsi dit-il dans sa lettre du 20 janvier 1748 à EULER : «*Dites-moi aussi, Monsieur, si vous croyez que la différence entre le mouvement réel des apsides de la Lune et celui qu'on trouve par la Théorie prouve nécessairement que l'attraction n'est pas exactement en raison inverse du carré de la distance. Tout ce qu'on en doit conclure, ce me semble, c'est que la force qui attire vers la Terre le centre de gravité de la Lune n'est pas comme le carré de la distance, mais il me paraît que cela doit être si la Lune n'est pas un corps sphérique et composée de couches concentriques homogènes. Comme cette planète nous tourne toujours la même face, il est assez vraisemblable que sa figure et l'arran-*

gement mutuel de ses parties sont assez irrégulières ... » [225]. Dans les lettres suivantes, D'ALEMBERT et EULER continuent la discussion sur la forme de la loi de la gravitation en vue de tenir compte des problèmes que pose l'orbite de la Lune. Nous allons y revenir dans les détails au chapitre suivant. Dans leur correspondance, on voit les deux interlocuteurs modifier certains de leurs raisonnements tout en constatant les insuffisances de la mécanique céleste de leurs temps.

Néanmoins la correspondance entre les deux savants fait apparaître une concordance assez grande dans leurs vues concernant le mouvement de la Lune. Mais D'ALEMBERT est beaucoup plus préoccupé quant aux travaux de CLAIRAUT sur le même sujet. Bien qu'il soit certain que les résultats de leurs travaux parallèles ne peuvent différer que de très peu, il avoue dans une lettre à CRAMER qu'il *«est assez désagréable de travailler en même temps qu'un autre sur un sujet comme celui-là ; c'est ce qui a fait que je me suis pressé de finir pour m'emparer de la précession des équinoxes qui est une matière vierge.»* [225]

Le 17 mai 1749, D'ALEMBERT se trouve à nouveau confronté aux problèmes du mouvement de la Lune à la suite de la sensationnelle rétractation publique de CLAIRAUT. Comme auparavant, D'ALEMBERT reste très prudent. Dans une lettre à EULER en date du 20 juillet 1749 il écrit : *«... il est vrai que j'ai cru, comme vous Monsieur et Monsieur CLAIRAUT, que la Théorie ne donnait que la moitié du mouvement observé, mais je pourrais bien m'être trompé en cela ; je désire même m'être trompé ; car je ne voyais pas sans quelque peine, que ce phénomène ne cadra pas avec les observations, étant certain que toutes les autres inégalités du mouvement de la Lune sont aussi bien d'accord qu'on puisse le désirer avec les Tables ; car la différence n'est que de 10 à 12', comme j'ai eu l'honneur de vous le marquer ; il est vrai que si le mouvement de l'apogée n'est que de 18 ans, l'erreur pourrait aller à 12°, mais j'avais supposé une force ajoutée à la gravitation, et qui fit faire à l'apogée son tour en neuf ans. Reste à savoir si cette force est inutile ; c'est ce qu'il faut examiner avec grand soin, et je n'ai pas envie de prononcer là dessus à la légère ; l'expérience me rendra sage à l'avenir»* [226]. Même si D'ALEMBERT était occupé en 1748 et 1749 à la rédaction de son ouvrage : *«Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le mouvement newtonien»* [227], il continuait aussi ses recherches de la théorie de la Lune sans pour autant parvenir à des résultats décisifs concernant les limites d'application de la loi de la gravitation. Cette situation ne le retenait pas d'approuver le changement de position opéré par CLAIRAUT, quoique le lendemain il fit parapher par DE FOUCHY l'ensemble de ses recherches sur la Lune sans doute pour préserver ses droits de priorité. Puis il retira son approbation à la proposition de CLAIRAUT et faute d'arguments décisifs concernant le mouvement de l'apogée lunaire ses vues relatif au problème demeurent incertaines et ambiguës.

En 1750 parvenait à Paris le programme du concours que l'Académie de St-Petersbourg se proposait de lancer en cette année et qui avait comme sujet la théorie de la Lune. Le sujet fut choisi sur la recommandation d'EULER qui n'avait pas encore surmonté ses propres difficultés théoriques concernant

le mouvement de la Lune. D'ALEMBERT, tout en préparant l'édition du premier tome de l'«*Encyclopédie*» continue pendant toute l'année 1749 à réfléchir au problème de la Lune sans pour autant se préoccuper spécialement du problème crucial du mouvement de l'apogée. Le 21 septembre 1749, il écrit à CRAMER concernant cette question : *«Il est juste de la laisser à Monsieur CLAIRAUT puisqu'il a eu le bonheur de la trouver le premier, tout ce que je puis vous dire, c'est que l'erreur vient de quelques termes qu'il avait négligés, et qu'on aurait naturellement cru pouvoir l'être puisqu'ils nous ont échappés à tous trois.»* [228]. L'annonce du concours renforçait encore l'intérêt de D'ALEMBERT à la question et le 12 février 1750 déjà il écrit à CRAMER qu'il est *«en état de répondre à la première partie du programme et de démontrer papiers sur table que la Théorie cadre à merveilles avec les tables de NEWTON»*, mais qu'il ne sait pas, faute d'une *«suite d'observations bien conditionnées»* s'il aura *«le temps de pousser le calcul assez loin pour donner des tables plus exactes»* [229]. D'ALEMBERT est certain de pouvoir montrer que sa méthode est bien supérieure à toutes les autres et il pense achever dans le courant de l'année 1750 son ouvrage donnant non seulement la résolution du problème posé mais traitant aussi d'autres questions de mécanique céleste.

Presqu'en même temps le 22 février 1750 il écrit à EULER *«Depuis que j'ai achevé cet ouvrage, (c'est-à-dire son livre sur la précession des équinoxes) j'ai été distrait par d'autres occupations qui m'ont empêché de me remettre à la Lune avant le mois de décembre dernier, et par tout le travail que j'ai fait, et qui est très considérable, je vois que les mouvements de la Lune s'accordent tous aussi bien que l'on peut désirer, avec la Théorie de Monsieur NEWTON. Je dis aussi bien qu'on le peut désirer, parce que les différences sont assez petites pour pouvoir être attribuées ou aux négligences du calcul, ou aux observations mêmes. Je ne sais pas cependant si je concourrai pour le prix de l'Académie de St-Petersbourg parce qu'un an me paraît bien court pour trouver le lieu de la Lune par cette Théorie quam exactissime. Je crois qu'il faut pour cela bien du temps, et je ne désespérerai pas d'en venir à bout, peut être même assez promptement si j'avais un recueil de bonnes observations ... »* [230]. Un bon mois plus tard, le 30 mars 1750, D'ALEMBERT donne d'autres précisions sur son travail concernant le mouvement de la Lune dans sa lettre à EULER : *«Je continue mon travail sur la Lune, et je suis prêt même d'en voir la fin : car je crois avoir poussé les calculs aussi loin que la patience humaine peut les porter. J'ai fait, chemin faisant, plusieurs observations sur les problèmes de ce genre ; et j'ai trouvé en particulier des choses très singulières dans le calcul du lieu de la Lune. A l'égard du mouvement de l'apogée, je le trouve assez conforme aux observations, et je ne doute pas que vous ne le trouviez comme Monsieur CLAIRAUT et moi, si vous voulez vous donner la peine de calculer plus exactement la valeur du rayon vecteur de l'orbite lunaire, en vous servant pour cela de la belle méthode de votre pièce sur Saturne [231]. Mais il y a sur cet article une remarque essentielle à faire, que je ne sais si personne n'a faite, et sans laquelle il me semble qu'on ne peut s'assurer de la bonté de la solution. Je suis actuellement occupé à des calculs relatifs à cette remarque, et je ne doute*

point qu'ils ne confirment la Théorie newtonienne. J'aurai l'honneur de vous mander ce que j'aurai trouvé, mais je vous prie de ne rien écrire en France de ce que je vous dis ici. Du reste, le mouvement de l'apogée est à mon avis une des choses des moins essentielles dans la Théorie de la Lune, puisque quand ce mouvement ne s'accorderait point avec l'attraction, en raison inverse du carré des distances, cette attraction ne serait pas détruite pour cela. Il ne serait même pas nécessaire d'en changer la loi; puisqu'on pourrait attribuer ce phénomène à quelque cause particulière, comme la vertu magnétique, ou etc... » [232]. Dans les deux lettres citées, c'est la première fois que D'ALEMBERT annonce avoir réussi à prévoir correctement le mouvement de l'apogée de la Lune tout comme il était le cas pour CLAIRAUT. Sur la base des affirmations de D'ALEMBERT, dans la première des deux lettres, EULER avait mis au courant CLAIRAUT qui fut très satisfait du succès de D'ALEMBERT.

Au début de l'année 1750, D'ALEMBERT était encore désireux de participer au concours de l'Académie de St-Petersbourg mais il se ravisa et n'expédia pas son travail. La raison en est probablement que EULER lui apparaissait comme le principal responsable de l'échec qu'il avait subi au concours de mathématiques de l'Académie de Berlin de 1750 sous prétexte qu'il n'avait pas mis suffisamment l'accent sur l'accord de ses calculs avec l'expérience. Il répugne donc à participer à un nouveau concours dont il sait qu'EULER sera le principal juge. Ainsi écrit-il à celui-ci le 4 janvier 1751 : «*Ma théorie de la Lune est achevée il y a plus de trois mois. J'y ai examiné à fond l'affaire de l'apogée, et je crois savoir à quoi m'en tenir sur cette question sur laquelle je crois que tout le monde est encore bien loin du but. Il ne me convient pas de vous dire si je l'ai envoyée à St-Petersbourg, mais quand je ne l'aurais pas fait, j'aurais eu pour cela de très bonnes raisons que vous devez savoir mieux que personne.*» [233]. Le 18 octobre 1750 D'ALEMBERT avait écrit encore à CRAMER : «*J'ai enfin achevé de vérifier tous mes calculs sur la Lune, et je m'en tiendrai à ce que j'ai fait. Vous aurez sûrement cet ouvrage l'année prochaine, et je le mettrai sous presse, si je peux avant que l'Académie de St-Petersbourg fasse paraître la pièce qu'elle couronnera.*» [234].

En effet D'ALEMBERT fera déposer le 10 janvier 1751 son étude au secrétariat de l'Académie de Paris. Celle-ci constituera la partie principale du tome I de ses «*Recherches sur différents points importants du système du monde*» [235].

Le manuscrit déposé à l'Académie est pratiquement conforme au texte du premier volume des «*Recherches*» publié au début de 1754 après avoir fait l'objet d'un rapport favorable daté du 29 août 1753 et rédigé par Messieurs NICOLE et LEMONNIER. Le «*Discours préliminaire*» de ce premier volume a pour but l'exposition de l'ensemble de la théorie de la Lune, mais D'ALEMBERT profita également de l'occasion pour justifier sa manière de faire : «*Tels sont les principaux objets que j'ai traités dans le premier Livre de cet Ouvrage, qui a pour objet la Théorie de la Lune. L'Académie de St-Petersbourg avait choisi il y a deux ans cette Théorie pour le sujet du prix qu'elle proposa. Elle insista surtout dans son programme sur le Problème du mouvement de l'Apogée; du*

reste cette savante Académie observe très judicieusement, que tout ce qu'on peut exiger de la Théorie c'est qu'elle conduise à peu près au même résultat que donnent les observations et que d'ailleurs c'est au temps seul à assurer la valeur exacte des équations qu'on trouve par le calcul, ou à faire connaître ce qui manque à cette valeur. Je croyais donc avoir rempli autant qu'il m'était possible, les principales vues de l'Académie de St-Pétersbourg. Mais quelques raisons particulières m'ayant empêché de concourir, je me suis contenté de remettre une Théorie de la Lune entre les mains du Secrétaire de l'Académie des Sciences, près de 9 mois avant le Jugement de l'Académie de St-Pétersbourg et longtemps avant qu'aucun ouvrage sur la Théorie de la Lune eut été mis au jour.» En voilà pour les droits de priorité de l'auteur qui termine l'alinéa en écrivant : «il doit m'être permis de me conserver aussi la possession de ce qui peut m'appartenir.»

Le texte en question, contrairement à celui précédant le «*Traité de Dynamique*» [215] ou le «*Discours préliminaire de l'Encyclopédie*» [214] n'a pas d'ambitions philosophiques ou épistémologiques. Dès le début il se déclare être dans la ligne des «*PRINCIPIA*» de NEWTON qu'il considère comme exemplaire, très proche de ce que CONDILLAC [206] appelle un «*vrai système*». Pourtant, pour D'ALEMBERT, des problèmes subsistent dans l'ouvrage de NEWTON notamment en ce qui concerne le statut des lois du mouvement, le concept de force, mais aussi certains aspects du problème des trois corps et la théorie de la Lune, dont il parlera en détail. Son intérêt pour la mécanique céleste s'explique aussi sans doute par la possibilité de pouvoir appliquer son «*principe général*», développé dans le «*Traité de Dynamique*», à la théorie newtonienne de l'attraction et sa traduction rendue possible par la découverte du calcul infinitésimal de LEIBNIZ. Il considère la dynamique du mouvement des corps célestes comme étant représentable à l'aide de ses concepts fondamentaux qui sont le principe d'inertie, la composition des mouvements et le principe d'équilibre, et veut contribuer ainsi à une clarification de certains aspects de la mécanique newtonienne.

Pourtant le «*Discours Préliminaire*» s'ouvre, à la manière des discours philosophiques en vogue au XVIII^e siècle, avec un aperçu historique qui démarque les Modernes, connaissant les véritables causes des mouvements célestes, des Anciens qui : «*ne fussent pas assez exactement instruits des Phénomènes célestes pour entreprendre de les expliquer en détail*». D'ALEMBERT insiste aussi sur l'impossibilité de la physique d'ARISTOTE de décrire les phénomènes astronomiques car celle-ci : «*consistait plus dans la connaissance des faits que dans la recherche de leurs causes*». Enfin il reconnaît aussi la déficience fondamentale des Anciens qui : «*n'eussent pas fait assez de progrès dans les sciences Physico-mathématiques, pour être en état de réduire aux lois de la Mécanique les mouvements des corps célestes*». Même si les hypothèses à la base de la physique des Modernes peuvent être entrevues en germe chez les Anciens, ce que ceux-ci : «*ont imaginé sur le système du Monde, ou du moins ce qui nous reste de leurs opinions là dessus, est si vague et si mal prouvé, qu'on n'en saurait tirer aucune lumière réelle*». En effet : «*on n'y trouve point ces détails précis,*

exacts et profonds qui sont la pierre de touche de la vérité d'un système, et que quelques Auteurs affectent d'en appeler l'appareil, mais qu'on ne doit regarder comme le corps et la substance, parce qu'ils en referment les preuves les plus subtiles et les plus incontestables, et qu'ils en font par conséquent la difficulté et le mérite.»

D'ALEMBERT, de par ses études des œuvres de VARIGNON, DE L'HÔPITAL, GUISNÉE, et REYNEAU qui tous les quatre appartenaient au cercle de Nicolas MALEBRANCHE, était d'abord cartésien avant d'épouser la théorie de NEWTON [219]. Il voit dans DESCARTES : *«le premier qui ait traité du système du Monde avec quelques soins et quelque étendue.»* Son hypothèse des Tourbillons, paraissant au premier coup d'oeil expliquer les phénomènes : *«Les détails et l'examen approfondi de ces mêmes Phénomènes, ont fait voir qu'elle ne pouvait subsister; c'est ce qui obligea NEWTON à lui substituer l'hypothèse de la gravitation universelle, qui a cessé presque entre ses mains d'être une hypothèse par son accord admirable avec les observations astronomiques les plus délicates et les plus singulières.»*

D'ALEMBERT se tourne alors vers la théorie de la Lune et énonce le cas particulier du problème des trois corps : *«La Lune est attirée non seulement par la Terre, mais encore par le Soleil et c'est à cette Attraction qu'on doit attribuer les irrégularités de son cours.»* Après avoir expliqué que les attractions respectives du Soleil vers la Terre et la Lune ne sont pas des forces parallèles, il continue : *«La cause des irrégularités de la Lune vient donc de l'inégalité et de la direction différente des deux Attractions; et il n'est pas difficile de comprendre ni la cause de cette inégalité, ni comment cette inégalité jointe à la différence des directions altère les mouvements de cette Planète. La Lune par son mouvement autour de la Terre, se trouve tantôt plus près tantôt plus loin du Soleil que la Terre, et par conséquent, suivant les lois de l'Attraction, elle doit être tantôt plus, tantôt moins attirée par le Soleil que la Terre; de plus, il est aisé de voir que la ligne menée du Soleil à la Lune, fait presque toujours un angle avec la ligne menée du Soleil à la Terre, et qu'ainsi quand les deux Attractions seraient égales, leurs directions ne seraient presque jamais parallèles. Cela posé, au lieu de la force simple par laquelle le Soleil attire la Lune, on peut par le principe de la décomposition des forces en substituer deux autres; l'un sera égal et parallèle à l'action du Soleil sur la Terre et par conséquent ne produira aucun dérangement dans l'orbite de la Lune autour de la Terre; et l'autre sera celle par laquelle le mouvement de la Lune est altéré. Mais si on est d'abord naturellement porté à regarder cette dernière force comme la cause des irrégularités de la Lune, on ne peut aussi en être pleinement convaincu, qu'après avoir calculé les effets qu'elle doit produire, et après s'être assuré qu'ils répondent aux Phénomènes.»*

Après cette excursion expliquant à la fois la méthode de résolution du problème, mais donnant aussi une courte vue de sa philosophie des sciences qui, tout en prônant l'importance des idées abstraites, avait retenu de BACON que la comparaison des calculs avec les phénomènes est essentielle, D'ALEMBERT revient à NEWTON : *«Monsieur NEWTON ne s'est donc pas contenté de donner*

dans le premier Livre de son Ouvrage, une explication des principales inégalités de la Lune, suffisante à ceux qui en matière d'explications physiques se bornent à une espèce de coup d'oeil général», mais «C'est l'objet d'une partie du troisième Livre des *«Principes»* de calculer plusieurs des inégalités de la Lune pour les trouver conformes aux observations.» Car : «Un seul article où l'observation démentirait le calcul, ferait écrouler l'édifice et relèguerait la Théorie newtonienne dans la classe de tant d'autres systèmes, que l'imagination a enfantés et que l'analyse a détruits.»

D'ALEMBERT explique alors avec quelques détails les développements newtoniens de la théorie lunaire : «*Les inégalités de la Lune dont Monsieur NEWTON a donné le calcul, du moins dans un certain détail, sont en premier lieu celle qui est connue sous le nom de «variation», qui a été découvert par TYCHO, et qui monte à 35' environ dans les octants, c'est-à-dire lorsque le lieu de la Lune est à 45° de celui du Soleil ou de la Terre; en second lieu le mouvement annuel et rétrograde des nœuds, c'est-à-dire des points où l'orbite de la Lune coupe l'écliptique; ce mouvement est d'environ 19° par an : en troisième lieu, la principale équation ou inégalité du mouvement des nœuds qui monte à 1°30'; et enfin la variation de l'inclinaison de l'orbite Lunaire au plan de l'écliptique, variation qui est d'environ 8 à 9 minutes, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre.*» NEWTON, avant de faire ses calculs, a introduit certaines hypothèses qu'il a négligé de démontrer : «*Il est vrai que si on néglige plusieurs circonstances du mouvement de la Lune, on trouve qu'en ayant même égard à l'action du Soleil sur elle, elle décrit autour de la Terre à peu près une Ellipse dont le grand axe est mobile.*» Mais en tenant compte de la réalité du mouvement de l'astre lunaire : «*cette figure elliptique s'évanouit*» car elle ne prend pas en compte les inégalités du mouvement de l'Apogée et les variations de l'excentricité de l'orbite.

D'ALEMBERT en vient alors aux déficiences des développements newtoniens et surtout à la partie de la théorie de la Lune que NEWTON dit avoir découverte sans pour autant la décrire dans les détails mathématiques : «*A l'égard des autres équations de la Lune, il en est quelques-unes que Monsieur NEWTON dit avoir calculées par la Théorie de la gravitation, mais sans nous apprendre le chemin qu'il a pris pour y parvenir. Telles sont, celle de 11'49'' qui dépend de l'équation du centre du Soleil, c'est-à-dire de l'inégalité qu'on observe dans le mouvement de cet Astre, et celle de 47'' qui dépend de la distance du Soleil au nœud de la Lune.*» Et puis il y a les inégalités que NEWTON a négligé de calculer : «*Monsieur NEWTON fait encore mention de deux autres équations de la Lune, l'équation annuelle du mouvement des nœuds, et celle du mouvement de l'Apogée. Ici, il ne se contente pas d'établir l'une de 9'27'', l'autre de 19'52'', il expose en peu de mots la méthode par laquelle il est parvenu à les trouver. Mais la question étant très compliquée, le raisonnement sur lequel cette méthode est appuyée, ne me paraît pas propre à satisfaire ceux qui sont déterminés à ne se rendre qu'à l'évidence la plus complète.*» D'ALEMBERT revient alors à la question cruciale de la théorie de la Lune, celle du mouvement de l'apogée : «*Enfin il y a de très grandes inégalités du mouvement de la Lune, que Mon-*

sieur NEWTON s'est borné à déduire des observations ; savoir le mouvement de l'Apogée, l'équation considérable de ce mouvement, la variation de l'excentricité et quelques autres.». D'ALEMBERT conclut alors : «*que malgré tout le cas qu'on doit faire de la Théorie de Monsieur NEWTON sur la Lune, malgré les Tables qui ont résulté de cette Théorie, et qui sont beaucoup plus exactes que toutes les précédentes, il s'en faut beaucoup que cette matière soit épuisée. Peut être même, si on ose le dire, son illustre Auteur n'a fait qu'en ébaucher les premiers traits*». D'ALEMBERT termine ses réflexions par un éloge de l'auteur des «PRINCIPIA» : «*La Philosophie naturelle a tant d'obligations à ce grand homme, et il a montré tant de génie et de sagacité dans les choses mêmes où il a été le moins heureux, que nous ne devons point cesser de l'admirer, et de le regarder comme notre maître, même lorsque nous nous écartons de ses principes, ou lorsque nous ajoutons à ses découvertes. Quelque lumière qu'il ait portée dans le système de l'univers, il n'a pu manquer de sentir qu'il laissait encore beaucoup à faire à ceux qui le suivraient. C'est le sort des pensées d'un grand homme d'être fécondes non seulement entre ses mains, mais dans celles des autres*».

D'ALEMBERT expose alors les changements intervenus dans l'approche mathématique pour la résolution des problèmes de mécanique céleste. Si NEWTON a encore utilisé exclusivement les méthodes géométriques, c'est l'Analyse qui est devenue l'instrument principal des géomètres au milieu du XVIII^e siècle. Il se réfère explicitement à cette méthode : «*C'est donc par le calcul analytique, employé avec toute l'attention possible que j'ai recherché les inégalités du mouvement de la Lune. Quand je parle de ces inégalités, j'entends ici seulement celles qui sont produites par l'action du Soleil. Car il est facile de voir que l'action des Planètes sur la Terre et sur la Lune n'étant pas la même, cette différence doit produire aussi quelque altération dans les mouvements de notre Satellite. Mais il y a beaucoup d'apparence que ces inégalités doivent échapper à l'observation*». D'ALEMBERT mentionne là un problème qui a occupé la mécanique céleste depuis Euler, en passant par HILL [236], HANSEN [237] et TISSERAND [124], occupation dont résultent un certain nombre d'inégalités à longue période. L'effet gravitationnel des planètes sur la Lune est surtout indirect. La distance de la Terre au Soleil, tout comme l'angle entre le Soleil et le système Terre-Lune subissent des perturbations dues aux actions des planètes et le mouvement de la Terre n'est pas elliptique. De là résultent des inégalités lunaires et une accélération séculaire de notre satellite.

D'ALEMBERT vient maintenant à exposer sa propre théorie de la Lune : «*La détermination de l'orbite de la Lune autour de la Terre dépend de trois éléments : de la projection de cette orbite sur le plan de l'Ecliptique, qui donne pour chaque instant le lieu de la Lune dans l'Ecliptique même ; de la position que doit avoir dans un instant quelconque la ligne des nœuds ; enfin, de l'inclinaison de l'orbite dans ce même instant : connaissant ces trois éléments, on connaîtra évidemment le lieu de la Lune dans le ciel*». Le principe de la composition des forces donne alors la situation suivante : «*Les puissances qui agissent à chaque instant sur la Lune ou sur le mobile qui la représente, peuvent*

être réduites à deux autres, dont l'une soit dirigée vers la Terre, et l'autre soit perpendiculaire au rayon vecteur. Ainsi il faut d'abord déterminer l'équation de l'orbite décrite en vertu de ces deux forces. Une simple analogie fait connaître la puissance qui tendant uniquement vers la Terre, ferait décrire à la Lune son orbite telle qu'elle est ; cette puissance, ainsi qu'il est aisé de le présumer, renferme les deux forces dont il s'agit ; et comme on connaît depuis longtemps l'équation de l'orbite décrite en vertu d'une seule puissance dirigée vers un point fixe, on parvient sans peine à une équation différentielle du second degré qui est celle de l'orbite Lunaire. » Or il faut intégrer cette équation par approximations successives. Et c'est là que les difficultés commencent : *« En effet, non seulement il faut trouver une méthode pour intégrer cette équation aussi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui ne se présente pas facilement, et qui demande plusieurs adresses de calcul : il faut encore savoir distinguer les termes qui doivent entrer dans cette approximation. Quelques uns des quantités qui paraîtraient devoir être négligées, à cause de la petitesse des coefficients qu'elles ont dans la différentielle, augmentent beaucoup par l'intégration, et deviennent très sensibles dans l'expression du rayon vecteur de l'orbite. Quelques autres qui paraissent assez petites dans l'expression du rayon vecteur, ou qui ont déjà augmenté par l'intégration, deviennent beaucoup plus sensibles, ou même assez grandes, par l'intégration nouvelle dont on a besoin pour tirer de l'expression du rayon vecteur celle du temps que la Lune emploie à parcourir un Arc quelconque »*. D'ALEMBERT parle alors, sans le détailler, de l'épisode du calcul de l'apogée de la Lune par CLAIRAUT avec les faux résultats dans son premier essai [172] : *« On pourra remarquer par exemple, la nécessité d'avoir égard à certains termes qui étant négligés mal à propos, donneraient 30 à 40 minutes de différence entre le lieu de la Lune calculé et son lieu observé, ce qui conduirait à ces conséquences très fausses contre le système de la gravitation et irait à renverser trop légèrement ce système. Les termes dont il s'agit, sont ceux qui dépendent de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune, je crois être le premier qui les a calculés exactement, et qui par là a constaté du moins à cet égard l'accord de la Théorie avec les observations : il ne serait pas difficile d'en donner des preuves, mais cette discussion n'importerait en rien au système du Monde. »*

Pendant tout le XVIII^e siècle, le but principal de la résolution du problème de l'orbite de la Lune fut la construction de tables de notre satellite en vue de la détermination de la longitude en mer. D'ALEMBERT se conforma à ce projet et construisit lui aussi des tables donnant la position de la Lune : *« Pour construire ces Tables plus commodément, j'ai d'abord réduit en formules celles qui ont été construites jusqu'ici, tant d'après les observations, que d'après la Théorie de Monsieur NEWTON ; et par ce moyen, j'ai facilement reconnu les changements qu'il fallait faire à ces dernières tables pour les rendre sinon plus exactes, au moins plus conformes aux résultats que mes calculs m'avaient donnés. C'est à l'usage seul et à la comparaison des différentes Tables à nous faire connaître celles qui répondront le mieux aux observations »*. D'ALEMBERT vient alors à parler des Tables de la Lune de Tobias MEYER, professeur d'astrono-

mie à Göttingen qui étaient réputées être les plus exactes et qui avaient trouvé l'aval d'EULER comme leur correspondance le témoigne [238]. D'ALEMBERT relativise quelque peu cette appréciation : *«Il est vrai qu'un Géomètre moderne qui a publié depuis peu des Tables de la Lune, calculées, si on l'en croit d'après la Théorie, assure que ses Tables sont infiniment plus exactes qu'aucune de celles qui les ont précédées. Je ne prétends point détruire les prétentions de cet Auteur; mais deux choses sont nécessaires pour les affermir, le détail de ses calculs qu'il n'a pas donnés, et une comparaison longue et suivie qu'il ne paraît pas avoir fait des observations avec ses calculs. D'ailleurs de savants Mathématiciens qui ont aussi construit des Tables d'après la Théorie, qui ont fait entrer dans ces Tables beaucoup plus d'éléments que lui, et qui les ont comparés avec quelques observations seulement, ont trouvé plus de 4 minutes de différence, et peut-être en poussant la comparaison plus loin, en auraient trouvé l'avantage.»* D'ALEMBERT préfère comparer ses travaux à ceux de NEWTON directement et de relever les améliorations qu'il a apportées à ceux-ci : *«La seule chose que je doive remarquer ici, c'est que par la comparaison de nos Tables avec celles de Monsieur NEWTON, on trouvera dans les nôtres plusieurs équations que les Tables de ce grand Géomètre ne donnent pas; qu'il y a presque toujours des différences sensibles entre les équations qui nous sont communes, et que souvent même ces différences sont assez considérables.»* D'ALEMBERT fait alors un inventaire très étendu de ces différences mais aussi de ses ajoutes pour parler ensuite de modifications plus fondamentales issues de ses recherches, telle que la modification de la parallaxe de la Lune qu'il met en relation avec la masse de celle-ci. Il résume : *«Voilà, à l'exception d'un article, dont je parlerai plus bas et qui mérite un examen à part, le précis de mes Recherches sur la Théorie de la Lune. Il est impossible par une infinité de raisons, que les résultats de ces recherches s'accordent exactement avec ceux que pourront donner d'autres calculs. Pour n'être point étonné de cette différence, il suffit de faire attention, non seulement aux éléments que les différents calculateurs peuvent employer, et qui pour la plupart n'étant pas fixés dans la dernière rigueur, ne sauraient être absolument les mêmes; mais encore à la quantité d'équations qu'on peut employer ou négliger, aux parties mêmes qu'on peut employer ou négliger dans les équations auxquelles on a égard; enfin aux légères erreurs de toute espèce presque inévitables dans un travail où il est difficile et dangereux de ne se faire aider par personne. Quelque méthode que l'on suive, il est certain au moins, pourvu qu'on apporte un peu d'exactitude dans les calculs, que les Tables construites uniquement sur la Théorie différeront toujours assez peu des Tables newtoniennes, dont on a jusqu'ici fait usage, et qui elles-mêmes ne s'écartent que peu des observations. Ce qui suffit pour démontrer que la gravitation de la Lune vers le Soleil est la principale et peut-être l'unique cause sensible des irrégularités de cette Planète; et qui si d'autres forces se joignent à celle-là, leur effet, ou inconnu, ou non calculé jusqu'ici, est infiniment moins considérable.»* Les dernières formulations laissent perplexe. D'ALEMBERT ne semble pas encore tout à fait convaincu de l'exactitude de la loi de la gravitation de NEWTON pour ne pas exclure d'autres forces encore inconnues. Il se trouve ainsi

en bonne compagnie avec L. EULER et il semble qu'à part A.C. CLAIRAUT qui se fonde sur ses résultats mathématiques, ce soit BUFFON l'unique savant qui défendait sans condition la théorie newtonienne [239].

D'ALEMBERT vient alors au problème crucial de la théorie mathématique de la Lune : le mouvement de l'Apogée. Il explique le problème de la façon suivante : *«L'apogée de la Lune, c'est-à-dire le point où elle est le plus éloignée de la Terre n'est pas fixe dans le ciel; il répond successivement à différents degrés du Zodiaque, et sa révolution suivant l'Ordre des Signes, s'achève dans l'espace d'environ 9 ans, au bout desquels il revient à peu près au même point d'où il était parti. Si la force qui attire la Lune vers la Terre était unique, et qu'elle fût exactement en raison inverse du carré de la distance, l'Apogée serait immobile, puisque la Lune décrirait alors exactement et rigoureusement une Ellipse dont la Terre occuperait le foyer, comme l'a démontré Monsieur NEWTON, et une foule d'Auteurs après lui. Mais cette force est altérée, et dans sa direction et dans sa quantité, comme nous l'avons vu plus haut; il n'est donc pas surprenant qu'il en résulte un mouvement dans l'Apogée de la Lune.»*

La résolution du problème de l'Apogée est d'abord un problème de méthode. Comment doit-on s'y prendre? Certaines approches approximatives mènent à des solutions valables seulement pour de courtes durées et un nombre restreint de révolutions. D'ALEMBERT choisit une alternative différente : *«Le chemin que j'ai pris pour résoudre ce Problème est fort simple; en vertu de la forme que je donne à l'équation différentielle, on trouve par la seule inspection de cette équation sans le secours d'aucun autre calcul, les différents termes de la Série qui donne le mouvement de l'Apogée.»* Or, poursuit D'ALEMBERT : *«La nature de cette Série même occasionne ici une difficulté nouvelle.»* car : *«Le premier terme de la Série ne donne à l'Apogée qu'environ la moitié du mouvement réel qu'on trouve par les observations. Il était naturel de penser que les autres termes de cette Série, pris ensemble, étaient beaucoup plus petits que le premier, comme il arrive pour l'ordinaire et comme on suppose qu'il doit arriver dans les Problèmes qu'on résout par approximation, en négligeant de petites quantités.»*

D'ALEMBERT relate alors les péripéties de la recherche où étaient engagés EULER, CLAIRAUT et lui-même : *«Aussi, Monsieur EULER, Monsieur CLAIRAUT et moi, qui travaillions dans le même temps à la théorie de la Lune, avons trouvé par différentes Méthodes que le mouvement de l'Apogée déterminé par le calcul, était moitié plus lent que les Astronomes ne l'ont établi.»* C'est alors que se pose la question de principe sur la validité de la loi newtonienne de la gravitation. Faut-il l'abandonner ou bien faut-il la maintenir? En 1752, D'ALEMBERT, fort de ses connaissances de ce qui s'est passé sur la scène scientifique peut tirer les conclusions : *«Pour moi, j'ai toujours pensé qu'il ne fallait pas se déterminer si vite à abandonner cette loi, et cela par deux raisons que je ne ferai qu'indiquer, les ayant développées plus au long de cet ouvrage (c'est-à-dire la première partie des Recherches sur différents points importants du Système du Monde). La première est fondée sur un principe qu'il est également dangereux d'employer quand les Phénomènes s'y opposent, et de négliger*

quand ils ne s'y opposent pas ; c'est que toute autre loi substituer à la loi du carré, ne serait pas aussi simple, puisque alors le rapport des Attractions ne dépendrait plus simplement des distances ; la seconde, c'est que la loi substituée ne pourrait servir, comme quelques personnes l'avait pensé, à expliquer tout à la fois les Phénomènes de la gravitation, et ceux de l'Attraction qu'on reconnaît ou qu'on suppose entre les corps Terrestres.» A cette situation s'ajoutent ses propres résultats : «Enfin, j'avais déjà calculé assez exactement la plupart des autres inégalités du mouvement de la Lune, pour être assuré que ces inégalités répondaient assez bien aux observations. J'étais donc d'autant moins inquiet sur la différence que tous les Géomètres avaient trouvée entre le mouvement calculé de l'Apogée et son mouvement observé, que le système général du monde ne me paraissait recevoir par là aucune atteinte.»

D'ALEMBERT donne alors sa version de la découverte de CLAIRAUT : «Monsieur CLAIRAUT, en calculant plus exactement la Série qui donne le mouvement de l'Apogée, s'est aperçu le premier qu'il ne suffisait pas de s'en tenir au premier terme. A cette importante remarque, j'en ajoute une autre qui ne me paraît pas moins essentielle : c'est qu'il ne suffit pas même de s'en tenir au second terme de cette Série, qu'il faut pousser l'exactitude du calcul jusqu'au troisième et au quatrième terme ; car c'est le seul moyen de s'assurer que la Série est assez convergente après son second terme, pour que les termes qui sont au-delà des quatre ou cinq premiers puissent être négligés sans crainte. Il est vrai que la nécessité d'avoir égard à tous ces termes, engage dans des calculs difficiles par leur objet et rebutants par leur longueur. Mais on est suffisamment récompensé par le résultat qu'ils donnent, et qui se trouve tel qu'il doit être pour confirmer entièrement le système de la gravitation universelle.»

D'ALEMBERT se lance ensuite dans la critique de l'œuvre maîtresse de NEWTON : «Monsieur NEWTON dans la première édition de ses *«Principes»* en 1687, dit qu'ayant calculé d'après les lois de l'Attraction le mouvement de l'Apogée, il l'a trouvé assez conforme aux observations. Mais non seulement il ne donne pas la Méthode qu'il a suivie pour y parvenir, il avoue même que son calcul est peu exact, et que c'est pour cette raison qu'il n'en détaille pas le procédé.» En effet le scholie qui suit la PROPOSITION XXXV du LIVRE III parle bien encore des différentes inégalités de la Lune que NEWTON prétend avoir déduites de sa théorie de la gravitation mais ne donne pas un seul développement mathématique. Il se réfère, en ce qui concerne le mouvement de l'apogée aux observations astronomiques. D'ailleurs, la Marquise du CHÂTELET dans son *«Exposition Abrégée du Système du Monde»*[98] dit du traitement newtonien de la théorie de la Lune : «Dans l'examen des premières inégalités, quoi que le lecteur ne soit pas extrêmement satisfait à cause de quelques suppositions et de quelques abstractions faites pour rendre le problème plus facile, il a du moins cet avantage, qu'il voit la route de l'Auteur et qu'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se flatter d'aller plus loin. Mais quant à ce qui regarde le mouvement de l'apogée et la variation de l'excentricité, et toutes les autres inégalités du mouvement de la Lune, Monsieur NEWTON se contente des résultats qui conviennent aux Astronomes pour construire des tables du mouve-

ment de la Lune, et il assure que sa théorie de la gravitation l'a conduit à ces résultats.»

Il est vrai que NEWTON était très peu explicite dans les «PRINCIPIA» en ce qui concerne le mouvement de l'apogée lunaire et il a éprouvé, tout comme CLAIRAUT et D'ALEMBERT, des difficultés à le calculer correctement. TISSERAND [124] pense qu'il était parvenu plus tard à une méthode correcte basée sur la variation des éléments introduite plus tard par LAGRANGE. D'ALEMBERT, lui, parle du résultat erroné de NEWTON que celui-ci énonce à la fin de la section IX de son premier livre : *«Il dit, sans en apporter de preuves, que l'action du Soleil sur la Lune, en tant qu'elle est dirigée vers la Terre, est telle qu'il le faut pour donner à l'Apogée son mouvement; cependant il est très certain que la partie de l'action du Soleil, qui est proportionnelle à la distance de la Lune à la Terre, et qui dans les principes de Monsieur NEWTON doit causer le mouvement de l'Apogée, n'est que la moitié de ce qu'elle doit être pour donner à l'Apogée le mouvement nécessaire. Aussi un des plus habiles Commentateurs de Monsieur NEWTON, et le seul même qui ait entrepris avant ces derniers temps de résoudre la question du mouvement de l'Apogée trouve d'abord qu'en considérant seulement la force dont nous venons de parler, le mouvement de l'Apogée n'est que la moitié de ce qu'il doit être. Le même Commentateur ayant égard ensuite à l'excentricité de l'orbite, et à la force entière du Soleil qui agit sur la Lune dans le sens du rayon vecteur, trouve pour le mouvement de l'Apogée une quantité beaucoup plus approchante du mouvement réel. Mais quand on a traité cette question avec l'exactitude que nous y avons apportée, et qu'on a examiné attentivement les différents termes dont la combinaison donne le mouvement de l'Apogée, on reconnaît aisément combien peu l'on doit se fier aux calculs de l'Auteur dont nous parlons.»* Car ce Géomètre, dont le travail montre d'ailleurs beaucoup de sagacité et de connaissances, paraît avoir entièrement négligé deux circonstances essentielles, qui influent plus que toutes les autres sur le mouvement de l'Apogée, la variation de l'excentricité et la force perpendiculaire au rayon vecteur. Et D'ALEMBERT de conclure : *«que le Problème du mouvement de l'Apogée n'a point été suffisamment résolu par cet Auteur, et que le calcul le plus sévère, le plus épineux et le plus pénible était nécessaire pour décider la question.»* Sans doute D'ALEMBERT fait ici référence à J.-L. CALANDRINI [117], professeur de l'Académie de Genève qui surveilla l'impression du Commentaire des «PRINCIPIA» écrit par les PP LE SEUR et JACQUIER et qui parut à Genève en 1739-1742 [174]. Il contenait un grand nombre de notes y insérées par celui-ci, où il avait repris lui-même la question du mouvement des apsides en vue de parvenir directement, au moyen de considérations géométriques, des suites et du calcul différentiel à la détermination de ce mouvement. CALANDRINI avoue arriver aux mêmes résultats que NEWTON : *«Mais il faut avouer, dit-il, que la quantité de mouvement absolu trouvée ainsi, n'est qu'environ la moitié de celle que donnent les observations.»* Il y eut en 1748-49 une correspondance entre CLAIRAUT et CALANDRINI sur le sujet en question. Dans une lettre du 19 février, ce dernier attribue la raison de cet écart entre les calculs et l'observation à l'omission de l'excentricité et il émet l'espoir qu'une solution peut être trou-

vée dans le cadre de la théorie newtonienne. CLAIRAUT lui répond le 6 mars 1749, donc avant sa rétractation publique : « Comme je crois être très sûr de ma solution, qu'elle n'est point fondée comme la théorie de Monsieur NEWTON sur l'examen séparé de toutes les circonstances, que je n'ai fait ni omissions, ni suppositions arbitraires, je crois pouvoir prononcer très affirmativement que le mouvement de l'apogée tiré de l'attraction réciproquement proportionnelle au carré des distances, ne s'accorde point du tout avec la Nature, et qu'ainsi il faut supposer une autre Loy d'attraction ou au moins que la Lune est tirée vers la Terre par quelque autre force que celle-là. »

Parmi les commentateurs des théories newtoniennes visés peut-être aussi par ce passage du « Discours préliminaire », il faudrait encore mentionner le bénédictin anglais WALMESLEY qui avait publié une « *Théorie du mouvement des apsides en général et en particulier des apsides de l'orbite de la Lune.* » [196]. Il s'attachait à prouver qu'on pouvait concilier le mouvement des apsides avec la loi d'attraction newtonienne sans avoir recours à d'autres moyens que les calculs déjà connus. WALMESLEY fut réfuté par le chevalier D'ARCY dans un mémoire [240] paraissant également en 1749 et où celui-ci établissait que NEWTON avait tellement reconnu lui-même l'insuffisance de la méthode que, dans les éditions postérieures de son ouvrage, il avait passé sous silence ce qu'il avait dit dans la première sur la quantité du mouvement de l'apogée. D'ARCY montra aussi que les méthodes de calcul proposées par WALMESLEY tout comme celle de MACHIN [241], ne faisaient apparaître que la moitié du mouvement.

D'ALEMBERT fait alors le résumé des principaux objets qu'il a traités dans le premier livre de ses « *Recherches* » et insiste encore une fois sur ses droits de priorité : « L'Académie de St-Pétersbourg avait choisi il y a deux ans cette Théorie pour le sujet du prix qu'elle proposa. Elle insistait surtout dans son programme sur le Problème du mouvement de l'Apogée ; du reste, cette savante Académie observe très judicieusement que tout ce qu'on peut exiger de la Théorie c'est qu'elle conduise à peu près au même résultat que donnent les observations ; et que d'ailleurs c'est au temps seul à assurer la valeur exacte des équations qu'on trouve par le calcul, ou à faire connaître ce qui manque à cette valeur. Je croyais donc avoir rempli autant qu'il m'était possible, les principales vues de l'Académie de St-Pétersbourg. Mais quelques raisons particulières m'ayant empêché de concourir, je me suis contenté de remettre ma Théorie de la Lune entre les mains du Secrétaire de l'Académie des Sciences près de 9 mois avant le Jugement de l'Académie de St-Pétersbourg, et longtemps avant qu'aucun ouvrage sur la Théorie de la Lune eût été mis au jour. » Les « *raisons particulières* » que D'ALEMBERT évoque, sont liées au climat de méfiance mutuelle qui régnait entre lui et EULER. S'il avait projeté de concourir à St-Pétersbourg, il se rendait très vite compte que EULER avait maintenu le contrôle à l'Académie de St-Pétersbourg et qu'il avait en quelque sorte réservé le prix à CLAIRAUT, non seulement parce qu'il avait beaucoup plus les faveurs d'Euler, mais aussi parce que ce dernier avait calculé, à l'aide de sa théorie, des tables lunaires qu'il comptait incorporer dans sa pièce tandis que D'ALEMBERT n'en possédait pas en ce moment.

D'ALEMBERT expose ensuite l'objet du second livre de son *Traité* : les inégalités qu'on observe dans le mouvement de la Terre. Elles peuvent avoir deux causes : l'action de la Lune sur la Terre, et celle des Planètes tant supérieures qu'inférieures. La première cause produit des effets si petits qu'ils n'ont pas encore été observés par les Astronomes. En ce qui concerne l'action des planètes sur la Terre ou entre elles, D'ALEMBERT se réfère à NEWTON et EULER : *«Monsieur NEWTON dans ses «Principes» avait déjà remarqué en général, que l'action de Jupiter sur Saturne peut produire un effet qui n'est pas à négliger ; mais ce n'est que depuis peu d'années qu'on a recherché avec soin les inégalités du mouvement de Saturne. Monsieur EULER dans une excellente Pièce sur le sujet [231], qui remporta le prix de l'Académie en 1748, a déterminé par la Théorie plusieurs de ces inégalités.»* Ensuite il se réfère à ses propres travaux en cette matière et particulièrement l'inégalité séculaire dans le mouvement de Saturne [242] *«J'ai rendu compte de cette inégalité, ainsi que plusieurs autres, sur la quantité desquelles les Astronomes sont ou ne sont pas d'accord.»* D'ALEMBERT vient alors sur les actions des planètes sur le Soleil : *«Elles agissent encore suivant Monsieur NEWTON sur le Soleil, qui par ce moyen n'est pas immobile dans l'espace absolu.»* Même si les astronomes ne semblent pas être intéressés à cette question, il lui paraît à propos : *«de traiter cette question dans un Ouvrage où je discute les principaux points du système du Monde. D'ailleurs cette recherche ne sera peut-être pas tout à fait inutile pour connaître le mouvement de certaines Etoiles, dans lesquelles on observe des aberrations particulières, occasionnées peut-être par l'action de quelque Planète qui tourne autour d'elles. J'ai donc déterminé le mouvement du Soleil en embrassant d'abord la question dans toute sa généralité ; puis en la simplifiant par degrés, je suis parvenu à une Méthode fort facile, par laquelle on trouve à très peu près le lieu de cet Astre dans un temps quelconque.»*

Le troisième livre des *«Recherches»* est destiné à d'autres points du système du Monde. Ainsi D'ALEMBERT y traite de la Précession des Equinoxes et des différentes influences sur ce phénomène sur la manière de calculer les variations des Etoiles en déclinaison et en ascension droite qui résultent du mouvement de l'axe de la Terre sur le mouvement que l'action du Soleil peut produire sur l'Axe de la Lune considérée comme sur Sphéroïde, sur la libration de cette Planète, sa figure, la rotation des Planètes sur leur Axe, celle de la Lune en particulier, et l'insuffisance des raisons par lesquelles quelques Savants ont prétendu expliquer pourquoi cet Astre nous montre toujours à peu près la même face.

D'ALEMBERT termine son *«Discours Préliminaire»* par une appréciation du système newtonien et se réfère à son article *«Attraction»* dans l'Encyclopédie [243] : *«Les observations astronomiques démontrent que les Planètes se meuvent, ou dans le vide, ou au moins dans un milieu fort rare, ou enfin, comme l'ont prétendu quelques Philosophes dans un milieu fort dense qui ne résiste pas, ce qui serait néanmoins plus difficile à concevoir que l'Attraction même ; mais quelque parti qu'on prenne sur la matière du milieu dans lequel les Planètes se meuvent, la loi de KEPLER démontre au moins qu'elles tendent vers le Soleil ; ainsi la gravitation des Planètes vers le Soleil, qu'elle qu'en soit*

la cause, est un fait qu'on doit regarder comme démontré, où rien ne l'est en Physique. La gravitation des Planètes secondaires ou satellites vers leurs planètes principales, est un second fait évident et démontré par les mêmes raisons et par les mêmes faits. Les preuves de la gravitation des Planètes principales vers leurs satellites ne sont pas en aussi grand nombre, mais elles suffisent cependant pour nous faire reconnaître cette gravitation. Les phénomènes du flux et du reflux de la Mer, et surtout la Théorie de la nutation de l'Axe de la Terre et de la Précession des Equinoxes, si bien d'accord avec les observations, prouvent invinciblement que la Terre tend vers la Lune. Nous n'avons pas de semblables preuves pour les autres Satellites. Mais l'analogie seule ne suffit-elle pas pour nous faire conclure que l'action entre les Planètes et leurs Satellites est réciproque ? Je n'ignore pas l'abus que l'on peut faire de cette manière de raisonner pour tirer en Physique des conclusions trop générales. Mais il me semble, ou qu'il faut absolument renoncer à l'analogie, ou que tout concourt ici pour nous engager à en faire usage. Si l'action est réciproque entre chaque Planète et ses Satellites, elle ne paraît pas l'être moins entre les Planètes premières. Indépendamment des raisons tirées de l'analogie, qui ont à la vérité moins de force ici que dans le cas précédent, mais qui pourtant en ont encore, il est certain que Saturne éprouve dans son mouvement des variations sensibles et il est fort vraisemblable que Jupiter est la principale cause de ces variations. Le temps seul, il est vrai, pourra nous éclairer pleinement sur ce point, les Géomètres et les Astronomes n'ayant encore ni les observations assez complètes sur les mouvements de Saturne, ni une Théorie assez exacte des dérangements que Jupiter lui cause. Mais il y a beaucoup d'apparence que Jupiter, qui est sans comparaison la plus grosse de toutes les Planètes et la plus proche de Saturne, entre au moins pour beaucoup dans la cause de ces dérangements. Je dis pour beaucoup, et non pour tout ; car outre une cause dont nous parlerons bientôt, l'action des cinq Satellites de Saturne pourrait encore produire quelque dérangement dans cette Planète ; et peut-être sera-t-il nécessaire d'avoir égard à l'action des Satellites pour déterminer entièrement et avec exactitude toutes les inégalités du mouvement de Saturne, aussi bien que celles de Jupiter. Si les Satellites agissent sur les Planètes principales, et si celles-ci agissent les unes sur les autres, elles agissent donc aussi sur le Soleil ; c'est une conséquence assez naturelle. Mais jusqu'ici les faits nous manquent encore pour la vérifier. Le moyen le plus infailible de décider cette question, est d'examiner les inégalités de Saturne. Car si Jupiter agit sur le Soleil en même temps que Saturne, en sens contraire, l'action de Jupiter sur le Soleil, pour avoir le mouvement de Saturne par rapport à cet Astre ; et entre autres inégalités, cette action doit produire dans le mouvement de Saturne une variation proportionnelle au Sinus de la distance entre le lieu de Jupiter et celui de Saturne. C'est aux Astronomes à s'assurer si cette variation existe, et si elle est telle que la Théorie la donne. On peut voir par ce détail quels sont les différents degrés de certitude que nous avons jusqu'ici sur les principaux points du système de l'Attraction, et quelle nuance, pour ainsi dire, observent ces degrés. Ce sera la même chose quand on voudra transporter le système général de l'Attraction des corps célestes à

l'Attraction des corps terrestres ou sublunaires. Nous remarquerons en premier lieu, que cette Attraction ou gravitation générale s'y manifeste moins en détail dans toutes les parties de la matière, qu'elle ne fait pour ainsi dire en total dans les différents Globes qui composent le système du Monde : nous remarquerons de plus, qu'elle se manifeste dans quelques-unes des corps qui nous environnent plus que dans les autres, qu'elle paraît agir ici par impulsion, là par une mécanique inconnue, ici suivant une loi, là suivant une autre ; enfin plus nous généraliserons et nous étendrons en quelque manière la gravitation, plus ses efforts nous paraîtront variés, et plus nous la trouverons obscure, et en quelque manière informe dans les Phénomènes qui en résultent, ou que nous lui attribuons. Soyons donc très réservés sur cette généralisation, aussi bien que sur la nature de la force qui produit la gravitation des Planètes ; reconnaissons seulement que les effets de cette force n'ont pu se réduire, (du moins jusqu'ici) à aucune des lois connues de la Mécanique ; n'emprisonnons point la nature dans les limites étroites de notre intelligence ; approfondissons assez l'idée que nous avons de la matière pour être circonspects sur les propriétés que nous lui attribuons, ou que nous lui refusons ; et n'imitons pas le grand nombre des Philosophes modernes, qui en affectant un doute raisonné sur les objets qui les intéressent le plus, semblent vouloir se dédommager de ce doute par les assertions prématurées sur les questions qui les touchent le moins.»

A la fin de sa Pièce, D'ALEMBERT, en bon sujet du Roy de France, tient à souligner la part que les savants français ont contribué à la théorie de la gravitation, il mentionne : *«Le travail assidu et délicat de M. LEMONNIER pour déterminer les mouvements de la Lune, les savantes et utiles recherches de Messieurs de MAUPERTUIS, BOUGUER, et CLAIRAUT»*. Et il n'oublie pas de parler de ses livres sur la cause générale des Vents et sur la Précession des Equinoxes, problème qu'il croit avoir résolu le premier, et il inclut finalement ses *«Recherches sur différents points importants du Système du Monde.»*

Si D'ALEMBERT a consacré une grande partie de ces travaux au problème du mouvement de la Lune, il n'était pourtant pas fixé à ce seul sujet comme le montrent ses *«Opuscules»* qu'il publie entre 1761 et 1780. Avant les *«Recherches»*, D'ALEMBERT s'était attaqué à une autre question de mécanique céleste. Il s'agit du problème de la précession des équinoxes, dont il parle à plusieurs reprises dans le *«Discours Préliminaire»* et dont il tient compte dans la solution de la nutation de l'axe de la Terre. D'ALEMBERT fut d'ailleurs ici aussi en compétition avec EULER.

Connu depuis l'Antiquité, le phénomène de précession avait été étudié par NEWTON qui en avait donné une première explication fondée sur le principe de la gravitation universelle. Or en 1748, J. BRADLEY [244] avait trouvé un mouvement supplémentaire de l'axe de la Terre : la nutation. D'ALEMBERT se mit alors à rechercher une explication théorique d'ensemble des deux phénomènes et il fut accaparé par ce problème jusqu'en mai 1749. Craignant d'être dépassé par ses rivaux, il se confiait juste à G. CRAMER [227, 229, 234] en lui disant : *«Je n'ai point encore trouvé de question si difficile à traiter.»*

Il remit son manuscrit devant l'Académie de Paris le 17 mai 1749 et son

ouvrage : *«Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre»* [227] fut publié au début de juillet 1749. D'ALEMBERT en adressa aussitôt un exemplaire à EULER et il encaissa pleinement l'effet de surprise. Néanmoins EULER présenta l'ouvrage devant l'Académie de Berlin le 18 décembre 1749. Dans plusieurs lettres EULER et D'ALEMBERT discutèrent de façon très courtoise des mérites comparés de leurs méthodes respectives, car EULER lui aussi avait étudié le problème [245]. D'ailleurs, il reconnaissait pleinement la priorité de D'ALEMBERT dans leur correspondance mais il oubliait de le citer dans son ouvrage. Très mécontent, celui-ci se défendait et il en suivait une polémique qui n'entre plus dans le cadre de la présente relation, mais qui mena à une aggravation des relations entre les deux Savants à la base de la rupture de leurs relations épistolaires.

5.3 La conception de la loi de la gravitation chez d'Alembert

NOUS avons vu que les doutes sur la forme de la loi de la gravitation avaient été initiés par A.C. CLAIRAUT suite à ses difficultés de déterminer la valeur exacte du mouvement de l'apogée de la Lune. Si CLAIRAUT par sa déclaration devant l'Académie Royale des Sciences en 1747 et sa rétractation non moins fracassante devant le même corps, le 17 mars 1749, a fait pour ainsi dire scandale, D'ALEMBERT, quoiqu'en éprouvant les mêmes difficultés, restait beaucoup plus discret.

Le 20 juillet 1749, dans une lettre à EULER [226], D'ALEMBERT commente l'initiative de CLAIRAUT en vue de changer la forme de la loi de NEWTON et il écrit : *«...j'avais supposé une force ajoutée à la gravitation et qui fit faire (à la Lune) à l'apogée son tour en neuf ans. Reste à savoir si cette force est inutile ; c'est ce qu'il faut examiner avec grand soin, et je n'ai pas envie de me prononcer là-dessus à la légère ; l'expérience me rendra sage à l'avenir. Quoi qu'il en soit, Monsieur, je vous avouerai qu'en supposant même que nous ne nous soyons pas trompés dans le calcul du mouvement de l'apogée, je ne goûte nullement l'opinion où vous paraissez être, et où Monsieur CLAIRAUT était aussi, que l'attraction ne suit pas exactement la loi inverse du carré des distances. Si l'apogée de la Lune ne faisait en effet son tour qu'en 18 ans, en vertu de la force du Soleil, j'aimerais mieux expliquer son mouvement en 9 ans par le moyen de quelque force particulière, magnétique ou autre, qui vienne de la Terre, que de changer pour un seul phénomène une loi qui s'accorde avec toutes les autres, et qui est fort simple.»*

Dans la suite de sa lettre, D'ALEMBERT critique CLAIRAUT qui soutenait contre BUFFON [239] que, si la loi de la gravitation à plusieurs termes, proposée par lui en novembre 1747, était inutile pour expliquer le mouvement de l'apogée, elle permettait pourtant d'expliquer certains autres phénomènes tels que la capillarité. D'ALEMBERT conclut de façon prudente : *«Que résulte-t-il de tout cela, Monsieur ? C'est qu'il ne faut point se presser et que nous devons*

prendre tout le temps nécessaire pour examiner une question si importante.» Et D'ALEMBERT termine en souhaitant : «que le mouvement de l'apogée cadre avec le système de NEWTON ; mais quand il ne cadrerait pas, je n'en croirais pas ce système moins vrai, puisqu'il rend raison de tous les autres phénomènes célestes que nous connaissons...»

D'ALEMBERT dans sa prise de position fort prudente résume sa propre attitude ambiguë. En effet, pendant toute l'année 1748, il était occupé à ses recherches sur la théorie de la Lune, sans obtenir toutefois de résultats décisifs concernant les limites d'application de la loi de la gravitation. Or, le 17 mai 1749, il approuva le changement de position de CLAIRAUT devant l'Académie pour se raviser le lendemain et faire parapher par le Secrétaire perpétuel de l'Académie ses propres travaux sur la Lune. Finalement il retira son approbation à la position de CLAIRAUT quelques jours après et, sans doute faute d'argument décisif concernant le mouvement de l'apogée lunaire, son opinion demeura incertaine.

D'ALEMBERT avait pourtant longuement réfléchi au problème, si le mouvement des apsides de la Lune n'était pas lié aux forces gravitationnelles et à leur application. Ainsi il avait déjà déclaré dans une lettre à EULER datée au 20 janvier 1748 [246] : *«Dites moi aussi Monsieur, si vous croyez que la différence entre le mouvement réel des apsides de la Lune et celui qu'on trouve par la Théorie prouve nécessairement que l'attraction n'est pas exactement en raison inverse du carré de la distance. Tout ce qu'on en doit conclure, ce me semble, c'est que la force qui attire vers la Terre le centre de gravité de la Lune n'est pas comme le carré de la distance, mais il me paraît que cela doit être si la Lune n'est pas un corps sphérique et composé de couches concentriques homogènes. Comme cette planète nous tourne toujours la même face, il est assez vraisemblable que sa figure et l'arrangement mutuel de ses parties sont assez irréguliers, j'ai cherché ce qui devrait arriver à la Lune, en supposant qu'elle fut séparée en deux globes A, B mis par une verge, qui tournassent autour de leur centre C dans le même temps que le centre C tourne autour de la Terre, et j'ai trouvé que CA (c'est-à-dire la distance du centre de gravité à l'un des points masse) devrait être 1/30 de AT (c'est-à-dire la distance du centre de la Terre au plus proche des deux centres de masse de la Lune) pour que les apsides fissent 1°30' par révolution, ce qui joint à la force solaire qui en fait faire autant, donnerait 3° en tout comme les observations l'apprennent. Si l'on suppose à présent que le système des globes A, B est couvert d'une croûte de figure quelconque, et qui soit vide en dedans, ou remplie d'une matière fort rare, ce corps pourra représenter la Lune dont nous ignorons entièrement la figure puisque nous n'en voyons jamais qu'une face. Je ne prétends pas au reste que la Lune soit de cette forme, mais il me semble que cela peut suffire pour faire voir comment les irrégularités dans la figure et dans la densité peuvent produire le phénomène dont il s'agit ; j'ai trouvé de plus que dans cette hypothèse les libérations de la Lune devaient être fort petites, et si les phases de la Lune suivent à peu près la raison des sinus verses des élongations, il n'y a qu'à supposer que la partie antérieure est à peu près circulaire. D'un autre côté s'il faut ajouter*

un terme à la force de la Lune vers la Terre, ce terme ajouté à la pesanteur terrestre pourra (nullement) en altérer considérablement l'expression, et alors la pesanteur ne serait plus à la gravitation de la Lune, en raison inverse du carré des distances, et serait fort éloignée d'être dans ce rapport quoique Monsieur NEWTON ait prouvé que ce rapport avait lieu à peu près. Enfin Monsieur NEWTON parle dans le **Corollaire VIII** de la PROPOSITION XXXVII (LIVRE III des «PRINCIPIA») de l'attraction magnétique de la Terre par la Lune, cette attraction pourrait être particulière à la Terre sans qu'on fut obligé pour cela de changer la loi de la gravitation.»

La Théorie de D'ALEMBERT sur l'hétérogénéité de la masse lunaire suscite une réponse d'EULER dans sa lettre du 15 février 1748 à son correspondant français. [247]

En effet EULER remarque au début de cette lettre : «J'ai vu avec plaisir que vous pensez comme moi sur les irrégularités, qui paraissent se trouver dans les forces célestes, car j'avais d'abord fait cette remarque, que quoi qu'on accorde que les moindres particules de la matière s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés des distances, il n'en suive pas, que cette même loi ait lieu dans les corps d'une grandeur finie, à moins que tous les deux corps, l'attirant et l'attiré, ne soient sphériques et composés d'une matière homogène, ou d'une autre forme qui revienne au même. Les recherches qu'on a faites sur l'attraction de la Terre, en tant que sa figure n'est pas sphérique, donnent clairement à connaître, que sa force d'attraction ne suit pas exactement la raison réciproque des carrés des distances mais qu'elle est comme :»

$$\frac{\alpha}{Z^2} + \frac{\beta}{Z^4} + \frac{\gamma}{Z^6} + \text{etc} \quad (5.2)$$

«Z marquant la distance.» Avec cette affirmation, EULER épouse parfaitement la position d'A. C. CLAIRAUT dans sa déclaration publique du 15 novembre 1747 devant l'Académie Royale des Sciences.

EULER vient maintenant à la discussion du modèle de D'ALEMBERT postulant une forme lunaire avec deux masses : «... la force dont la Lune est tirée vers la Terre ne sera pas exactement en raison réciproque du carré de la distance ; quand même le corps de la Terre serait exactement sphérique. Mais si le corps de la Lune était allongé, cette force souffrirait d'une double irrégularité, et pour m'assurer de ce dernier dérangement, j'avais aussi, comme vous considéré le corps de la Lune, comme s'il était composé de deux globes A et B joints d'une verge immatérielle AB, où se trouve le centre de gravité en L. Ayant supposé que la direction de la verge AB tombe constamment presque dans la ligne LT tirée vers le centre de la Terre T, à moins que le mouvement du point L tantôt plus, tantôt moins rapide n'y produise quelque déclinaison, j'ai trouvé aussi comme vous, que le mouvement du point L se doit faire à peu près dans une ellipse, mais dont la ligne des apsides avance : et le calcul m'a fourni cette règle, que le mouvement moyen de la Lune sera au mouvement de l'apogée comme LT^2 à $6 \cdot LA \cdot LB$, et partant cette figure de la Lune devra absolument causer un mouvement progressif de l'apogée. Donc puisque suivant

les observations, le mouvement moyen de la Lune est au mouvement de l'apogée comme 1 à 0,0084473, et que la théorie tirée de la force du Soleil ne donne pour cette raison que 1 à 0,0041045 : ou il manque dans le mouvement de l'apogée la partie 0,0043428 à laquelle j'ai égalé l'effet maintenant trouvé $6 \cdot LA \cdot LB / LT^2$. Donc faisant $La = LB$, et supposant $LT = 60 \cdot$ demi-diamètres de la Terre, il en vient $LA = LB = 11/4$, et partant AB serait de 2,5 rayons de la Terre, ou la longitude de la Lune AB surpasserait le diamètre de la Terre : ce qui me paraît aussi, comme vous le remarquez, insoutenable... ». EULER a explicité ses calculs beaucoup plus loin que D'ALEMBERT et conclut à l'invraisemblance de la théorie de ce dernier. Dans une autre partie de sa lettre, EULER est donc bien obligé d'épouser les vues de D'ALEMBERT sur la nature différente d'une partie de la force d'attraction entre la Lune et la Terre et il dit : «*La parallaxe de la Lune trouvée par la théorie étant toujours plus petite presque d'une minute que l'observée, de sorte que la force dont la Lune est poussée vers la Terre doit être moindre qu'on suppose dans la théorie tant s'en faut qu'on dussé augmenter cette force par quelque effet de magnétisme de la Terre.*» Cette réflexion met EULER dans le voisinage de NEWTON qui avait écrit dans les corollaires déjà cités : «*Dans ces calculs, je n'ai point considéré l'attraction magnétique de la Terre dont la quantité est très petite et est ignorée.*» [1]

D'ALEMBERT revient à la question dans sa lettre suivante à EULER datée du 30 mars 1748 [248] dans laquelle il dit concernant la loi de l'attraction en relation avec la théorie de l'orbite de la Lune : «*Au reste quoique la différence entre les observations et la Théorie me paraisse considérable, je ne crois pas pour cela que s'en soit fait du système de l'attraction, mais seulement qu'il faut pour la Théorie de la Lune y ajouter quelques modifications que j'ignore. Ce qui me fait penser ainsi c'est l'accord que je vois entre ce système et un grand nombre d'autres phénomènes, comme la variation lorsque l'apogée est dans les syzygies, le mouvement des nœuds qui me paraît s'accorder assez bien avec la Théorie de la variation de l'inclinaison.*»

La discussion entre D'ALEMBERT et EULER se poursuit dans la lettre du 17 juin 1748 que le premier adresse au second [249]. Après une évaluation critique du mémoire qu'EULER avait présenté au concours de l'Académie de Paris de 1748 et dont il avait remporté le prix, D'ALEMBERT revient à la théorie de la Lune et à la loi newtonienne : «*J'ai comparé de nouveau et avec encore plus d'exactitude la Théorie de la Lune avec les tables de Monsieur NEWTON, et je trouve encore de plus grandes différences que celles que j'ai eu l'honneur de vous marquer,*» (c'est-à-dire dans sa lettre du 30 mars 1748) «*de sorte que je commence à avoir bien de la peine à croire qu'on puisse connaître le mouvement de la Lune mieux que par des observations immédiates. Cependant j'ai observé que le mouvement des nœuds et l'équation de ce mouvement, ainsi que la variation de l'inclinaison, telles que la Théorie les donnent, répondent assez bien aux observations, c'est ce qui me fait croire que l'action du Soleil sur la Lune a beaucoup de part aux inégalités que nous apercevons dans son mouvement, et que les autres inégalités qui ne peuvent être expliquées par la théorie de NEWTON, sont dues à une force qui vient de la Terre, et qui n'agit point*

suivant une fonction de la distance, mais suivant quelque autre loi qui nous est inconnue. Cette force si elle existe ne doit pas produire aucun changement dans le mouvement des nœuds ni dans l'inclinaison, et c'est peut-être pour cela que le mouvement des nœuds est à peu près tel qu'il doit être en vertu de l'action du Soleil. La variation de l'aiguille aimantée prouve qu'il y a une force qui vient de la Terre et qui agit suivant différentes lois selon les méridiens où l'aiguille se trouve. Cette force pourrait s'étendre jusqu'à la Lune, en observant la même loi ou des lois différentes, et en devenant même répulsive d'attraction qu'elle était, et il pourrait être assez curieux d'examiner si les lois du mouvement de la Lune ne s'accorderaient pas avec les phénomènes de la variation (de l'aiguille aimantée) je sens que c'est là une furieuse besogne.»

Dans une lettre à G. CRAMER du 16 juin 1748 [227, 229, 234] D'ALEMBERT remarque que cette force complémentaire dont il parle dans sa lettre à EULER «ne dépend pas simplement de la distance de la Terre à la Lune mais qu'elle est une fonction de cette distance et de quelque autre variable que nous ne connaissons point.» Nous reviendrons à cette lettre plus en bas.

D'ALEMBERT revient encore à la même question dans sa lettre à EULER du 7 septembre 1748, dans laquelle après avoir évalué l'exactitude des Tables de la Lune construites par Newton, il reparle de la force gravitationnelle agissant entre la Lune et la Terre : «Ayant depuis refait le calcul avec plus d'exactitude, je trouve que la différence entre la Théorie et les Tables newtoniennes est à peu près la même que celle que vous trouvez entre la Théorie et l'observation, c'est-à-dire d'environ 15' ; je crois pourtant que cette différence peut encore être diminuée et quoi qu'il résulte de là que la gravitation ne suffit pas absolument pour expliquer les mouvements de la Lune, il me semble aussi qu'on doit conclure qu'elle y a la plus grande part, et que la Théorie de la Lune est la preuve la plus favorable du Système newtonien.» Il faut constater que l'attitude de D'ALEMBERT reste prudente.

D'ALEMBERT parle encore une fois de la question avant de tirer pour ainsi dire les conclusions dans sa lettre à EULER du 20 juillet 1749 [226] et il le fait également dans sa lettre du 27 octobre 1748 [251] au même correspondant : «J'ai encore examiné de nouveau la Théorie de la Lune et je crois comme vous qu'il peut y avoir dix ou douze minutes de différence entre la Théorie et les observations, mais je doute que cette différence puisse être plus grande et je crois même qu'il est possible de la diminuer, je trouve aussi 12 à 13' d'erreur sur le lieu du nœud, l'équation principale qui est d'environ 1°30' s'accorde parfaitement avec les Tables, mais il y a quelques autres équations assez sensibles qui pourraient s'en écarter un peu plus. Je suis bien aise que vous ayez trouvé la distance de la Lune parfaitement d'accord avec la Théorie, cependant je ne sais comment vous avez pu vous en assurer sans aucun doute, car cette distance dépend en partie de la masse de la Lune, qui n'est pas trop bien connue.» Même si dans cette citation D'ALEMBERT ne parle pas explicitement de la loi newtonienne, on ressent que ses nombreux calculs n'ont qu'un seul but : la preuve de l'exactitude de celle-ci.

A côté de sa correspondance avec EULER, D'ALEMBERT avait l'occasion de

faire connaître sa position concernant l'exactitude de la loi newtonienne dans les discussions à l'Académie des Sciences et avec les Encyclopédistes. Les idées qu'il y développe se retrouvent dans sa correspondance avec G. CRAMER où il s'exprimait plus librement que dans les lettres à EULER qui fut de manière permanente son concurrent scientifique.

CRAMER fut présent dans la séance publique de l'Académie en 1747 lorsque CLAIRAUT annonça la prétendue fausseté de la loi newtonienne de la gravitation. Et c'est lors de cette visite qu'il fit la connaissance de D'ALEMBERT. Les deux hommes sympathisèrent et entamèrent une correspondance après le départ de CRAMER pour Genève. Dans une lettre du 16 juin 1748, après les spéculations de BUFFON sur une éventuelle force magnétique agissant entre la Terre et la Lune, hypothèse que D'ALEMBERT avait reprise lui-même dans ses lettres à EULER, le premier écrivit à CRAMER : *« Plus j'examine la théorie de la Lune et plus je la compare avec les observations, je suis convaincu de plus en plus que la gravitation de la Lune vers le Soleil n'explique pas toutes les irrégularités de son mouvement . . . ce qui me mène à croire . . . qu'il y a encore une autre force à côté de la gravitation qui modifie le mouvement lunaire et que cette force vient de la Terre . . . que cette même force ne dépend pas simplement de la distance de la Terre à la Lune mais qu'elle est en fonction de cette distance et d'une autre variable. Peut-être est-ce une force de la même nature que la force magnétique qui n'agit pas de la même manière dans le plan de chaque méridien comme le montre l'aiguille magnétique. Il serait intéressant de trouver si les mouvements de la Lune sont corrélés aux variations de l'aiguille de la boussole. Si ceci était le cas ma conjecture serait plus crédible mais cela est une terrible besogne. Je projette de publier l'année prochaine et éventuellement au début de cette année toutes mes recherches sur ces sujets que j'ai eu l'honneur de discuter avec vous, mais j'ai peur de faire des assertions sur un sujet si important, voilà pourquoi je ne suis pas pressé. En plus je serais triste d'attirer à NEWTON le coup de pied de l'âne »* [252]. Le texte est presque mot pour mot celui contenu dans la lettre de D'ALEMBERT à EULER une année plus tard.

Dans une lettre du 29 août 1748, D'ALEMBERT admit qu'il avait interverti un signe dans les tables lunaires. Mais il insistait que ses remarques concernant les forces agissant sur la Lune restaient vraies même si le contraste n'était plus si frappant et que ses tables étaient maintenant en accord avec celles d'EULER : *« Quoique ceci prouve qu'il doit y avoir une autre force à côté de la gravitation qui agit sur la Lune, il me semble que la théorie de la Lune telle qu'elle existe est la preuve la plus convaincante du système newtonien de l'attraction »* [227, 229, 234]. A l'exception du mouvement des apsides, la précision accrue de la théorie de la Lune de D'ALEMBERT donnait encore plus d'indices en faveur de la concordance de la loi de NEWTON avec les observations. En trouvant son erreur dans le calcul du mouvement des apsides qui réduisait la différence entre théorie et observations, D'ALEMBERT se montrait de plus en plus convaincu que la différence résiduelle serait explicable par une force de nature différente. Cinq jours avant la rétractation de CLAIRAUT, D'ALEMBERT écrivit le 12 mai

1749 une lettre à CRAMER qui reflète son embarras sur les doutes qu'il avait émis dans sa lettre du 29 août de l'année précédente mais témoigne aussi de sa certitude d'avoir découvert son erreur de calcul et d'appréciation : «*Vous allez me considérer comme un grand étourdi pour avoir raconté tout le temps que l'attraction n'est pas en accord avec les phénomènes. Un paralogisme très subtil me le fit croire, et j'ai développé ce paralogisme dans toute son ampleur*» (dans son livre sur la précession des Equinoxes) «*de façon qu'on ne fera plus cette erreur. J'ai deux méthodes pour résoudre le problème donnant le même résultat ; en un mot, je ne désire plus rien et je suis parfaitement satisfait concernant ce sujet.*» [227, 229, 234]

Il revient encore une fois à la question dans sa lettre à CRAMER du 21 septembre 1749 et il conclut : «*Je n'ai point examiné l'affaire de l'apogée, il est juste de la laisser à Monsieur CLAIRAUT puisqu'il a eu le bonheur de la trouver en premier . . .*» [227, 229, 234]

D'ALEMBERT avait encore d'autres bonnes raisons pour justifier sa position prudente concernant le statut de la loi de la gravitation. Elles émanent de ses convictions épistémologiques et philosophiques qui trouvaient à s'exprimer à l'occasion de la controverse entre CLAIRAUT et BUFFON.

En effet, BUFFON dans son mémoire : «*Réflexions sur la loi de l'attraction*» [188] pose une série d'objections contre les principes de CLAIRAUT visant à préférer les résultats d'observation au détriment de la théorie et qui relèvent de la métaphysique dans le plus mauvais sens du terme. Le premier exemple de cette forme d'argumentation concerne la force gravitationnelle vers le Soleil. Cette attraction selon BUFFON : «*devrait être mesurée, comme toutes les qualités qui ont leur origine dans un centre, par la loi de l'inverse des carrés, comme nous mesurons les quantités de lumière, d'odeur, etc . . . et toutes les autres quantités ou qualités qui se propagent en ligne droite et qui tendent vers un centre.*» [188]. Même si BUFFON trouve cette loi bien fondée, il se réfère quand même à la troisième loi de KEPLER qui, d'après lui, valide la loi de NEWTON, et il ne se préoccupe pas trop des limites de cette même loi. BUFFON ignore royalement la démonstration de CLAIRAUT qu'un second terme ajouté à la loi des inverses des carrés n'aurait pas d'effet discernable dans le mouvement des planètes, mais il argumente que tout problème de KEPLER suit rigoureusement la loi de NEWTON. Naturellement il sait que la ligne des apsides de la Lune se déplace, invalidant ainsi la troisième loi de KEPLER. Il admet qu'une modification de la loi est nécessaire et il est prêt à admettre trois explications possibles pour ce mouvement des apsides. D'abord, puisque la Lune est le seul corps céleste qui ne suit pas cette loi, une explication exceptionnelle doit être trouvée. Puis BUFFON se réfère à l'avant-propos de COTES à la deuxième édition des «*PRINCIPIA*» où celui-ci avait écrit que, même si la loi des carrés inverses n'est pas tout à fait exacte, elle est pourtant soixante fois plus exacte que la loi des cubes inverses. Et finalement BUFFON se réfère directement à NEWTON qui avait fait référence aux forces gravitationnelles émanant du Soleil pour expliquer le mouvement des apsides de la Lune. BUFFON termine son argumentation en soulignant sa foi en NEWTON : «*Malgré l'autorité de Monsieur*

CLAIRAUT, je suis persuadé que la théorie de NEWTON concorde avec les observations : [188]. Mais il décline de donner une démonstration mathématique que la théorie newtonienne donne une valeur correcte pour le mouvement de l'axe des apsides, démonstration qui ne peut être tirée des «PRINCIPIA». BUFFON persiste en écrivant que l'addition d'un ou plusieurs termes à la loi de l'inverse des moindres carrés crée une expression qui pourra être ajustée pour tous les cas imaginables d'attraction, les termes ajoutés servant à éliminer toutes sortes d'incertitudes. Pour lui «une loi en physique est une loi seulement parce que sa mesure est simple et parce que l'échelle qu'elle représente n'est pas toujours la même, mais aussi parce qu'elle est unique et parce qu'elle ne peut être représentée à une autre échelle.» Or chaque fois que la forme d'une loi ne peut être représentée par un terme unique, cette simplicité et cette unité d'échelle qui constituent l'essence de la loi n'existent plus et par conséquent il n'existe plus de loi physique.» [227]

BUFFON sous-entend donc qu'une loi physique est une expression utilisant un seul terme qui en est la mesure. Si deux termes sont nécessaires, l'unité de la qualité physique dont il s'agit de représenter la variation est détruite. BUFFON conclut à partir de ces prémisses que, si CLAIRAUT a besoin de deux termes pour représenter le mouvement des apsides de la Lune, on est en présence de deux forces attractives. L'alternative de CLAIRAUT de vouloir représenter la force attractive par une série de plusieurs termes est pour BUFFON une hypothèse arbitraire loin de la réalité.

Pour D'ALEMBERT cette défense de NEWTON par BUFFON était complètement inadmissible de par l'argumentation métaphysique, même si au début il fut enclin d'admettre ses raisons quant à la forme de la loi de la gravitation. Mais pour lui la métaphysique n'avait pas de raison d'être dans un domaine où seuls les faits observables ou calculables comptent. N'avait-il pas écrit dans ses «Recherches sur la précession des Equinoxes» [227] que «l'attraction doit être jugée par une analyse rigoureuse et non pas par un raisonnement métaphysique qui pourrait aussi bien être utilisé pour détruire une hypothèse que pour établir celle-ci. Il n'est pas suffisant pour un système de satisfaire aux phénomènes en gros et d'une manière vague et même pas de fournir des explications semblant plausibles à quelques uns. Les détails et le calcul précis sont les pierres de touches qui eux seuls peuvent nous dire si une hypothèse est à adopter, à rejeter ou à modifier.» Cette affirmation écrite en 1749 ne peut être que la prise de position de D'ALEMBERT dans la controverse de CLAIRAUT et de BUFFON. Les doutes sur la loi de la gravitation ont provoqué des discussions multiples à l'Académie. En effet un concept central de la science moderne était attaqué. En comparaison avec la théorie cartésienne des tourbillons, le système newtonien avait l'avantage d'être vérifiable. Sa nature mathématique fut à la fois sa force et sa faiblesse car, contrairement à l'hypothèse de DESCARTES, il n'était pas adaptable. Un conflit avec des phénomènes observés le disqualifiait automatiquement. D'ALEMBERT résuma sa position quelques années plus tard dans ses «Mélanges» quant au statut du système newtonien : «Le système de la gravitation ne peut être regardé comme exact qu'après avoir été démontré par des

calculs précis prouvant sa conformité avec les phénomènes de la nature ; autrement l'hypothèse newtonienne ne mériterait aucune préférence vis à vis de la théorie des tourbillons qui explique bien le mouvement des planètes, mais d'une manière si incomplète, si légère que si les phénomènes étaient complètement différents, ils pourraient être expliqués de la même façon et quelques fois même mieux. Le système de la gravitation ne permet pas une illusion de telle sorte ; un seul article, une seule observation qui invalide les calculs, détruira l'édifice tout entier et relègue la théorie newtonienne dans la classe de ces nombreuses théories que l'imagination a créées et que l'analyse a détruites.» [210]

La controverse était en fait une bonne leçon de choses qui confirmait la foi de D'ALEMBERT dans les méthodes mathématiques. La spéculation n'était définitivement pas son domaine de prédilection et après 1749, l'épistémologie d'Alembertienne ne laissait de choix qu'entre la démonstration mathématique et le scepticisme.

Ce scepticisme est bien reflété dans les dernières pages du Discours préliminaire des *«Recherches sur différents points importants du Système du Monde»* [235]. D'ALEMBERT écrit ici : *«On peut voir par ce détail quels sont les différents degrés de certitude que nous avons jusqu'ici sur les principaux points du Système de l'Attraction et quelle nuance, pour ainsi dire, observent ces degrés. Ce sera la même chose quand on voudra transporter le système général de l'Attraction des corps célestes à l'Attraction des corps terrestres ou sublunaires. Nous remarquerons en premier lieu, que cette Attraction ou gravitation générale s'y manifeste moins en détail dans toutes les parties de la matière, qu'elle ne fait pour ainsi dire en total dans différents Globes qui composent le système du Monde ; nous remarquerons de plus, qu'elle se manifeste dans quelques-uns des corps qui nous environnent plus que dans les autres, qu'elle paraît agir ici par impulsions, là par une mécanique inconnue, ici suivant une loi, là suivant une autre ; enfin, plus nous généraliserons et nous étendrons en quelque manière la gravitation, plus ses effets nous paraîtront variés, et plus nous la trouverons obscure et en quelque manière informe dans les Phénomènes qui en résultent, ou que nous lui attribuons. Soyons donc très réservés sur cette généralisation, aussi bien que sur la nature de la force qui produit la gravitation des Planètes ; reconnaissons seulement que les effets de cette force n'ont pu se réduire (du moins jusqu'ici) à aucune des lois connues de la Mécanique ; n'emprisonnons point la nature dans les limites étroites de notre intelligence ; approfondissons assez l'idée que nous avons de la matière pour être circonspects sur les propriétés que nous lui attribuons, ou que nous lui refusons ; et n'imitons pas le grand nombre des Philosophes modernes, qui en affectant un doute irraisonné sur les objets qui les intéressent le plus, semblent vouloir se dédommager de ce doute par des assertions prématurées sur les questions qui les touchent le moins.»*

5.4 La théorie de la Lune de d'Alembert

D'ALEMBERT envisagea, parallèlement à CLAIRAUT, la solution du problème des trois corps. Après avoir envoyé à l'Académie de Berlin un mémoire sur la théorie de la Lune, comme nous l'avons vu, qu'il retirait peu après, D'ALEMBERT lut à celle de Paris, le 14 juin 1747, une pièce ayant pour titre : «*Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle*» [209]. Tout comme le travail de CLAIRAUT, elle est imprimée dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris de 1745 ; l'Académie ayant permis aux deux savants d'avancer de deux ans la publication de leurs premières solutions puisque le volume des «*Mémoires*» ne paraît qu'en 1747.

—|—

D'après TISSERAND [124], D'ALEMBERT élabore une théorie de la Lune qui ressemble beaucoup à celle de CLAIRAUT. TISSERAND fait une présentation succincte de celle-ci dont les points principaux sont les suivants :

D'ALEMBERT commence par appliquer le principe, qui plus tard portera son nom. En vue de trouver l'orbite d'une planète autour du Soleil, il applique à celle-ci, en sens contraire et dans une direction parallèle, les forces accélératrices que cette planète et toutes les autres exercent sur le Soleil pour les combiner ensuite avec les forces attractives du Soleil et des autres planètes sur la planète proposée et avec la vitesse de projection apparente de celle-ci. D'ALEMBERT montre ensuite que la détermination de l'orbite dépend de trois variables, à savoir : de la projection de l'orbite cherchée sur le plan de l'écliptique, du mouvement des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite à chaque instant. Dans son mémoire, D'ALEMBERT s'occupe successivement de terminer chacun des trois éléments.

D'ALEMBERT détermine l'équation différentielle de l'orbite décrite par un corps A attiré par un autre corps S en raison inverse du carré des distances et soumis de plus à l'action de deux forces ψ et π , la première dirigée vers S , l'autre étant perpendiculaire à la première. Après avoir déterminé la vitesse du corps A en un point quelconque en fonction de la vitesse initiale h , il arrive à l'équation :

$$\frac{d^2u}{d\nu^2} + u + \frac{1}{u^2g^2} \frac{\psi + \frac{\pi}{u} \frac{du}{d\nu}}{1 + \frac{2}{g^2} \int \frac{\pi d\nu}{u^3}} = 0 \quad (5.3)$$

mettant en relation $u = \frac{1}{x}$, c'est-à-dire la projection du rayon vecteur de la planète sur le plan de l'écliptique avec ν étant l'anomalie vraie comme variable indépendante. La formule (5.3) est également donnée par CLAIRAUT dans sa théorie de la Lune. Celui-ci, à l'aide de quelques autres transformations, calcule

à partir de (5.3) l'équation du rayon vecteur du corps A ; D'ALEMBERT, lui, cherche à déterminer la différence de l'orbite par rapport à un cercle de rayon K en introduisant la nouvelle variable u' :

$$u = K + u' \quad (5.4)$$

pour arriver à la formule :

$$\frac{d^2 u'}{d\nu^2} + N^2 u' + P = 0 \quad (5.5)$$

où N désigne une quantité constante qui ne diffère de 1 que par une quantité de l'ordre de la force perturbatrice. P est une fonction de u' de $du'/d\nu$ et d'expressions trigonométriques de l'argument ν .

D'Alembert parvient ainsi à une équation de la forme suivante :

$$d^2 u' + u' d\nu^2 + M d\nu^2 = 0 \quad (5.6)$$

N^2 étant un coefficient constant peu différent de 1, M est une fonction de ν , de $u'du'/d\nu$ et des fonctions trigonométriques de ν . Il aurait été facile d'intégrer cette équation par la méthode que D'Alembert avait déjà donnée à l'article 101 de son *«Traité de Dynamique»* [215]. Or *«comme l'orbite de la planète autour du Soleil n'est que très peu dérangée par l'action de tous les autres corps, on trouvera à peu près le point où la première se trouvera, on connaîtra de même approximativement, les points où se trouveront les autres planètes dans leurs orbites puisqu'elles sont censées se mouvoir à peu près uniformément, et dans des orbites circulaires. Ainsi l'arc ν étant donné, on aura les expressions en ν de tous les arcs décrits par les autres corps; on aura donc aussi les expressions de leurs actions sur la planète que l'on considère; ces actions étant rapportées sur le plan de projection et décomposées, donneront les expressions de ψ et Π en fonction de ν et de là, la valeur cherchée de M .»* [209, 117]

Après avoir indiqué comment on peut calculer le mouvement des nœuds ainsi que la variation de l'inclinaison du plan de projection, D'Alembert revient à un concept d'itération pour atteindre toute la précision désirée dans le calcul des éléments de la trajectoire d'une planète. *«L'équation de l'orbite pourra toujours se diviser en deux parties, dont l'une sera l'équation de l'ellipse que la planète aurait décrite, si elle eut été attirée simplement vers le point S en raison inverse du carré de la distance, et dont l'autre n' marquera la correction qu'il faudra faire au rayon de cette ellipse pour avoir l'orbite véritable. On cherchera de même le secteur elliptique qui y répond, et la petite quantité ξ dont il faut l'augmenter pour avoir le secteur correspondant de l'orbite projetée; puis en multipliant ξ par le cos de l'inclinaison, on aura l'accroissement du secteur de l'orbite de la planète.»* [117]

D'Alembert fait remarquer que *«d'après cette méthode, il n'y aura plus aucun des corps célestes dont on ne puisse donner la théorie avec la dernière précision, en employant à cette recherche le temps que demandent d'assez longs calculs analytiques; elle s'appliquerait facilement à la recherche des orbites fort*

excentriques et fort inclinées à l'écliptique, ainsi qu'à la détermination des orbites des satellites autour de leurs planètes principales.» [209].

Dans la seconde partie de son Mémoire, D'ALEMBERT applique la méthode exposée pour la recherche de l'orbite de la Lune. Il obtient d'abord les valeurs des forces perturbatrices ψ et Π en fonction de la distance de la Terre au Soleil et de celle de la Lune à la Terre. Il calcule ensuite le supplément θ de l'élongation de la Lune au Soleil. En introduisant les fonctions trigonométriques sous la forme d'exponentielles imaginaires, réduisant de cette façon la complexité des calculs, il intègre l'équation différentielle (5.5) sous une forme :

$$d^2u' + N^2u'd\nu^2 + Mdv^2 = 0 \quad (5.7)$$

en négligeant d'abord dans M les termes en t et réduisant θ à une fonction de ν . Il obtient $\delta \cos(n\nu)$ pour le premier terme de la valeur de u' , un terme qui est de beaucoup plus grand que les suivants. δ est à peu près égal à l'excentricité de l'orbite. Il s'ensuit que l'apogée de la trajectoire sera à quelques degrés près aux points où $\sin(N\nu)$ et le mouvement de la Lune sera à celui de son apogée comme :

$$1 : (1 - N) \quad (5.8)$$

D'Alembert trouve à peu de chose près :

$$N = \sqrt{1 - \frac{3}{2}n^2} \quad (5.9)$$

avec n comme rapport des temps périodiques du Soleil et de la Lune. En développant (5.9) en série il vient :

$$1 - N = \frac{3}{4}n^2 \quad (5.10)$$

et D'ALEMBERT, tout comme CLAIRAUT qui était parvenu à la même expression conclut, que l'apogée de la Lune n'est que d'environ $1^\circ 31'$ par révolution, donc la moitié de la valeur observée. D'ALEMBERT est conscient que sa détermination de l'apogée de la Lune est sujette à des erreurs et est loin d'être exacte. Son mémoire de 1745 (1747) se termine sur ces considérations.

—II—

Au moment où CLAIRAUT trouva, par la théorie, le vrai mouvement de l'apogée, D'ALEMBERT était occupé à rédiger son ouvrage sur la précession des équinoxes et ne vérifia point les calculs du premier. Il reprit pourtant ses recherches et se proposa de concourir auprès de l'Académie de St-Petersbourg, puis se ravisa ayant égard à sa brouille avec EULER. Il publia alors sa théorie en

S : la masse du Soleil,
 T : la masse de la Terre,
 L : la masse de la Lune,
 P : la position de la Lune,
 m : la tangente de l'inclinaison du plan de la Lune sur l'écliptique,
 p : la projection de la position de la Lune sur le plan de l'écliptique,
 B' : le rayon ST de l'orbite terrestre.

D'après la figure 5.4-1 il y a encore :

$$TP = r \quad ; \quad Tp = x \quad ; \quad SP = s \quad ; \quad pTo = \theta \quad ; \quad pTn = \nu \quad (5.11)$$

Les expressions générales des forces perturbatrices sont alors suivant PT :

$$S \frac{r}{S^3} + \frac{T + L}{r^2} \quad (5.12)$$

et suivant pk , parallèle à TS :

$$S \left(\frac{B'}{S^3} - \frac{1}{B'^2} \right) \quad (5.13)$$

La force qui agit suivant PT est projetée sur la ligne pT par multiplication avec le $\cos(PTp) = x/r$. La force qui agit parallèlement à TS est décomposée en deux autres agissant l'une suivant pT , l'autre suivant ph en multipliant la première par $\cos(\theta)$ respectivement par $\sin(\theta)$.

Par addition, D'ALEMBERT trouve les expressions suivantes pour les forces perturbatrices :

$$\psi = \frac{T + L}{r^3} x + \frac{Sx}{s^3} + S \left(\frac{B'}{S^3} - \frac{1}{B'^2} \right) \cos(\theta) \quad (5.14)$$

$$\pi = S \left(\frac{B'}{S^3} - \frac{1}{B'^2} \right) \sin \theta \quad (5.15)$$

En substituant dans les expressions précédentes :

$$\begin{aligned}
 pq &= x \sin(\nu) \\
 Pp &= mx \sin(\nu) \\
 r &= x \sqrt{1 + m^2 \sin^2 \nu} \\
 Sp^2 &= B'^2 + 2B'x \cos \theta + x^2 \\
 S^2 &= B'^2 + 2B'x \cos \theta + x^2 + m^2 x^2 \sin^2 \nu
 \end{aligned} \quad (5.16)$$

D'ALEMBERT obtient :

D'Alembert établit alors l'expression :

$$v^2 = g^2 - 2 \int Q dx \quad (5.19)$$

qui établit le bilan des forces vives. En considérant des secteurs infiniment égaux ou inégaux ATa et $lT\lambda$, on sait que le temps par Aa est au temps par λl comme le secteur ATa est au secteur $lT\lambda$. La loi des aires donne :

$$\frac{h ds}{\sqrt{g^2 - 2 \int Q dx}} = \frac{x^2 dz}{g} \quad (5.20)$$

En mettant pour ds la valeur :

$$ds = \sqrt{dx^2 + x^2 dz^2} \quad (5.21)$$

on tire :

$$dz = \frac{dx}{x^2 \sqrt{\frac{1}{h^2} - \frac{2 \int Q dx}{g^2} - \frac{1}{x^2}}} \quad (5.22)$$

L'équation 5.22 donne l'expression de l'orbite comme engendrée par la force centrale Q . La différence entre le cas d'une seule force et celui de l'orbite engendrée par l'action de deux forces est que les secteurs qui sont proportionnels au temps de celui-là ne le sont pas dans celui-ci. Cherchant donc la variation de l'aire, puis égalant les expressions du petit espace parcouru suivant la direction du rayon vecteur dans l'élément du temps, en vertu de la seule force Q dans le premier cas, et des deux forces ψ et π dans le second, il obtient pour Q l'expression :

$$Q = \frac{\psi + \frac{\pi dx}{x dz}}{1 + 2 \frac{\int \pi x^3 dz}{g^2} h^2} \quad (5.23)$$

En substituant cette valeur de Q dans l'équation 5.22, on obtient l'équation de l'orbite cherchée. Si on fait $1/x = u$, qu'on multiplie en croix les deux membres de l'équation 5.22, après avoir substitué pour Q sa valeur 5.23, et qu'ensuite après les avoir multipliés par eux-mêmes, on les différencie, on aura :

$$d^2u + u dz^2 - \frac{dz^2}{u^2 g^2} \frac{\psi - \frac{\pi du}{u dz}}{1 + 2 \frac{\int \pi dz}{u^3 g^2 h^2}} = 0 \quad (5.24)$$

Cette équation est assez semblable aux résultats de CLAIRAUT. [172] Pour appliquer à l'orbite lunaire l'équation 5.24, il est visible qu'il ne faut que substituer dans cette équation les valeurs de ψ et π données par les équations 5.17 et 5.18. L'inclinaison de l'orbite étant fort petite, il est possible d'écrire au lieu de :

$$\frac{T + L}{x^2(1 + m^2 \sin^2 \nu)^{3/2}} \quad (5.25)$$

l'expression :

$$(T + L)u^2 \left(1 - \frac{3}{2}m^2 \sin(\nu^2) + \frac{15}{8}m^4 \sin(\nu^4) + \dots \right) \quad (5.26)$$

qui est une série très convergente ($u = 1/x$)!

En plus, en considérant que x/B' et m sont des quantités fort petites, D'ALEMBERT introduit encore d'autres simplifications et transforme ψ et π en des expressions de fonctions trigonométriques de l'angle θ , qui, elles aussi, sont très convergentes. Il est donc possible d'intégrer l'équation 5.24 en tenant compte des transformations indiquées.

Or avant de procéder à cette intégration, D'ALEMBERT cherche l'expression de la différentielle du mouvement des nœuds de la Lune au moyen d'une construction géométrique assez compliquée.

Après des considérations trigonométriques il aboutit à la formule :

$$d\zeta = \frac{udt^2}{dz} \sin V \sin v \left(-\frac{3S \cos \theta}{uB'^3} - \frac{3S}{2u^2B'^4} + 15 \frac{\cos^2 \theta}{2u^2B'^4} S + \dots \right) \quad (5.27)$$

où ζ est la variation de la ligne de nœuds pendant le temps t ; V l'angle formé le rayon vecteur de la projection de la position de la Lune sur l'écliptique et la ligne des nœuds au temps t ; v est l'angle généré par la parallèle à la ligne des nœuds et la projection sur l'écliptique du mouvement de l'orbite de la Lune pendant un temps infiniment petit. Les termes sous la parenthèse représentent la force modifiant l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique.

La variation de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique est trouvée par D'ALEMBERT étant égale à :

$$\frac{dm}{m} = d\zeta \cot V \quad (5.28)$$

Les deux équations 5.27 et 5.28 sont donc interdépendantes.

Après un interlude sur les relations existant entre les fonctions trigonométriques et leurs multiples d'une part, et les quantités imaginaires de l'autre, D'ALEMBERT commence par montrer la petitesse des forces perturbatrices comparées à la force principale de la Terre sur la Lune et il conclut que l'effet des premières devra peu écarter l'orbite de la Lune de la courbure circulaire. «*Pour intégrer l'équation de l'orbite de la Lune, on mettra d'abord cette équation sous la forme indiquée*» (5.24 avec les approximations que D'ALEMBERT introduit pour ψ et π); «*on remarquera ensuite, 1^o : que l'orbite de la Lune ne diffère pas beaucoup d'un cercle ; d'où il s'ensuit que x ne diffère pas beaucoup de a ou de 1, 2^o : que si l'orbite de la Lune était circulaire, aussi bien que l'orbite de la Terre, la force du Soleil : S/B^2 serait à la force $(T + L)/a^2$ qui retient la Lune*

dans son orbite, comme u^2B est à a , en appelant u le rapport du temps périodique de la Lune au temps périodique de la Terre autour du Soleil : en effet, suivant les théorèmes de M. HUYGENS [45], les forces centrales de deux corps qui décrivent des cercles différents sont entre elles en raison composée de la directe des rayons de ces cercles, et de l'inverse du carré des temps périodiques.» [235]

u est à peu près le rapport du mois lunaire à l'année sidérale, n^2 devient environ $1/178$ et dans les expressions de ψ et π on pourra remplacer u par $K+t$ en négligeant les termes où les puissances de t se trouveraient trop grandes. On trouve aussi l'équation de l'orbite sous la forme :

$$d^2t + N^2tdz^2 + Mdz^2 = 0 \quad (5.29)$$

«Equation dans laquelle u ne se trouve plus et où N^2 marque un coefficient constant et M une fonction de t , de dt/dz et de différents sinus et cosinus d'angles qui dépendent des angles z , z' , ζ , etc.» [235]. D'ALEMBERT avertit introduit précédemment les désignations suivantes :

$$\begin{aligned} \theta &= z + a - z' \\ V &= z + \alpha - \zeta \end{aligned} \quad (5.30)$$

avec z' l'angle que la Terre parcourt pendant le temps que la Lune décrit dans l'écliptique l'angle z ; A la distance du lieu de la Terre au lieu de la Lune lorsque $z = 0$; ζ l'angle que décrit la ligne des nœuds pendant que la Lune décrit l'angle z ; α la distance de la ligne des nœuds à la Lune lorsque $z = 0$.

Au chapitre VI D'ALEMBERT expose et effectue ensuite les substitutions successives en vue de résoudre l'équation différentielle 5.29. Il efface d'abord dans la quantité M tous les termes où t respectivement dt/dz se rencontrent, comme étant forts petits par rapport aux autres et substitue ensuite au lieu de z' la quantité nz qui en diffère très peu. D'ALEMBERT remplace ensuite l'angle ζ par pz avec p étant un coefficient constant et justifie cette façon de faire par les résultats des observations astronomiques. L'expression M est alors de la forme :

$$\begin{aligned} M &= H + B \cos(A + pz) + C \cos(D + qz) + E \cos(F + rz) \\ &\quad + \dots + G \sin(L + sz) + P \sin(Q + kz) + \dots \end{aligned} \quad (5.31)$$

et l'intégration de l'équation différentielle 5.29 ne pose aucune difficulté analytique.

«Quand on aura ainsi trouvé la valeur approchée de t , on substituera cette valeur et celle de la quantité dt/dz dans la quantité M , et on aura une nouvelle expression plus exacte de cette quantité M , laquelle ne contiendra encore que des quantités de la forme de celles de l'équation 5.31, et qu'on intégrera par

conséquent avec facilité. En opérant ainsi de suite, on approchera toujours de plus en plus de la vraie valeur de t .» [235]

D'ALEMBERT fait ensuite mention d'une modification importante relative aux arcs de cercle que son intégration pourrait introduire. Il est évident, en effet, que si après avoir obtenu une première valeur pour t , on la substitue dans M , fonction de t , cette substitution pourra mener à des termes de la forme :

$$B \cos(Q + Nz) \quad (5.32)$$

qui, lors de l'intégration suivante donneront des expressions où l'arc z se trouvera à l'extérieur des expressions périodiques et créera des perturbations séculaires. D'ALEMBERT montre par un exemple de la théorie de la Lune qu'une telle situation mènera à de faux résultats et il propose un moyen de prévenir ce grave inconvénient de la méthode itérative appliquée par lui :

«Voici donc ce qu'il faut faire pour éviter qu'il ne se rencontre des arcs de cercle dans l'expression de t . Soit $\gamma \cos(Nz)$ le terme qui se rencontre dans la quantité M , et qui devrait par l'intégration donner un arc de cercle, et soit $H + L \cos(Nz)$ la valeur de t trouvée par la première intégration, on écrira ainsi l'équation»

$$d^2t + N^2tdz^2 + \gamma t dz^2/L + Mdz^2 - \gamma t dz^2/L = 0 \quad (5.33)$$

«on substituera dans M et dans $-\gamma t dz^2/L$ à la place de t sa valeur $H + L \cos(Nz)$, et on laissera la quantité $+\gamma t dz^2/L$ sous cette forme, de sorte que le coefficient N^2 se trouve augmenté de la quantité γ/L : et par ce moyen la quantité $\gamma < \cos(Nz)$ qui se trouve dans M disparaîtra entièrement, puisqu'elle sera détruite par la quantité $-\gamma \cos(Nz)$, provenant de la substitution de $H + L \cos(Nz)$ à la place de t dans le terme $-\gamma t dz^2/L$.» [235]

Les six premiers chapitres forment l'exposé de la partie générale de la solution de D'ALEMBERT pour le problème de la Lune. Le chapitre VII donne une première approximation pour l'orbite lunaire et les premières valeurs du mouvement des nœuds et de l'inclinaison. D'ALEMBERT commence par négliger l'excentricité de l'orbite terrestre, les termes de ψ et de π qui ont $B'^5 n^3$ ou $B'^5 n^2$ au dénominateur, et ceux de M qui sont multipliés par t ; il regarde la tangente de l'inclinaison m comme constante, et les angles z' , ζ comme égaux à nz et pz : n étant toujours le rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune, et p celui du mouvement des nœuds au mouvement de la Lune. «Pour trouver l'équation de l'orbite de la Lune, nous supposons d'abord que les termes de la quantité M où se rencontre t soient nuls, moyennant quoi les termes seront tous de l'ordre de n^2 , puisque S/B'^3 multiplie tous les termes de la quantité M et que»

$$\frac{s}{B'^3} = (T + L)n^2 \quad (5.34)$$

«à peu près. De plus, comme l'excentricité λ de l'orbite de la Terre est égale à environ $1/100$, on voit que par la même raison on doit négliger dans

cette première équation tous les termes où se trouvera λ puisque ces termes seront déjà multipliés par n^2 ; de plus on négligera dans l'expression de ψ et π , les termes qui ont $B'^5 n^3$ ou $B'^5 n^2$ au dénominateur, parce que ces termes sont très petits par rapport aux autres, le rayon B' de l'orbite terrestre étant considérablement plus grand que le rayon $1/n$ de l'orbite lunaire. On négligera aussi la quantité $\pi dn/dz$ parce que dn/dz est une quantité fort petite, et que π est outre cela de l'ordre de n^2 . Enfin on regardera la tangente de l'inclinaison m comme constante, et que les angles $z'\zeta$ comme égaux à nz et pz , et pour abréger le calcul, on supposera $A = 0$ et $\alpha = 0$.» [235]

Il faut encore préciser que n étant le rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune et p celui du mouvement des nœuds au mouvement de la Lune, D'ALEMBERT substitue alors les valeurs des forces ψ et π dans l'équation 5.29 de la manière suivante :

$$\psi = (T + L) \left(u^2 - \frac{3}{4} m^2 u^2 (1 - \cos(2(z - pz))) - \frac{n^2}{2u} (1 + 3 \cos(2(z - nz))) \right) \quad (5.35)$$

$$\pi = -\frac{3n^2(T + L)}{2u} \sin(2(z - nz)) \quad (5.36)$$

en plus, il réduit :

$$\frac{\psi - \frac{\pi du}{u dz}}{1 + 2 \int \frac{\pi dz}{u^3 g^2}} \cong \psi \left(1 - 2 \int \frac{\pi dz}{u^3 g^2} \right) \quad (5.37)$$

et ne conserve $\int \frac{\pi dz}{n^3 g^2}$ en facteur que pour le premier terme de la valeur de ψ . Ainsi l'équation de l'orbite de la Lune devient :

$$\begin{aligned} d^2 t + t dz^2 - \frac{3n^2 t dz^2}{2K^2} - \frac{3n^2}{K^2} \frac{k dz^2}{2-2n} + \frac{3n^2 \cos(2z-2nz)}{K^2(2-2n)} K dz^2 \\ + \frac{3}{4} m^2 K dz^2 - \frac{3}{4} m^2 K \cos(2z - 2pz) dz^2 + \frac{n^2 dz^2}{2K^2} \\ + \frac{3n^2 dz^2}{2K^2} \cos(2z - 2nz) \end{aligned} \quad (5.38)$$

C'est, d'après D'ALEMBERT l'équation de la Lune du premier degré. Cette équation une fois intégrée se trouvera dans la forme :

$$t = \delta \cos(Nz) + \frac{H \cos(Nz - H)}{N^2} + D \cos(2z - 2nz) + M \cos(2z - 2pz) \quad (5.39)$$

dans laquelle $N^2 = 1 - 3n^2/2$ et H, D, M sont des quantités constantes de l'ordre de m^2 et de n^2 . S est l'excentricité de l'orbite lunaire.

La valeur :

$$N = \sqrt{1 - \frac{3}{2 \cdot 178}} \quad (5.40)$$

donne le mouvement de l'apogée de la Lune d'environ $1^{\circ}30'$ par révolution. En effet lorsque $Nz = 360^{\circ}$ on a

$$z = \frac{360^{\circ}}{N} = 360^{\circ} \left(1 + \frac{3}{4 \cdot 178} \right) \cong 360 + \frac{3 \cdot 360}{4 \cdot 180} = 360^{\circ} + 1^{\circ} + 30' \quad (5.41)$$

Cette valeur est en flagrante contradiction avec les résultats astronomiques observés qui donnent pour le mouvement de l'apogée à chaque révolution la valeur d'environ 3° . D'ALEMBERT conclut : «*ou que la simple force en raison inverse du carré des distances ne suffit pas pour produire le mouvement dont il s'agit, ou que l'équation trouvée de l'orbite n'est pas assez exacte.*» [235]

Contrairement à CLAIRAUT, D'ALEMBERT ne va donc pas opter pour la modification de la loi de la gravitation, mais décide que l'équation de l'orbite de la Lune devra être reconsidérée, «*ce qui demande une longue analyse.*» [235]. Mais auparavant il calcule dans sa première hypothèse le mouvement des nœuds et la variation de l'inclinaison. La plus grande équation du mouvement des nœuds est :

$$+ \frac{3n}{8} \sin(2nz - 2pz) \quad (5.42)$$

qui monte à environ $1^{\circ}30'$, ce qui s'accorde encore avec les observations. La variation de l'inclinaison est calculée à l'aide de l'équation 5.28 qui donne environ 8 à 9 minutes. Comme cette équation est tantôt additive, tantôt soustractive, la variation totale est de presque $18'$ ce qui s'accorde avec les observations.

Avant de faire une seconde approximation, D'ALEMBERT procède à l'analyse des petites quantités qu'il faut connaître pour pouvoir corriger l'équation de l'orbite lunaire et il introduit une hiérarchie de ces petites quantités. Ainsi il regarde δ , n , m , et l'excentricité λ de l'orbite terrestre, comme des quantités infiniment petites du premier ordre ; p , n^2 , m^2 , $n\lambda$ comme étant du second ordre : n^3 , λ^3 , etc comme étant du troisième ordre. Pour l'établissement de la nouvelle équation de l'orbite lunaire, D'ALEMBERT se borne à la considération des petites quantités jusqu'à l'ordre trois inclus. Il adopte ensuite pour N la valeur $1 - 3n^2/2$ qui répond aux observations, fait que lui reproche CLAIRAUT comme hypothèse ad hoc. D'ALEMBERT explique alors sa philosophie concernant les différents ordres de grandeur des termes qui entrent dans l'équation de l'orbite de la Lune : «*Il y a des termes dans l'équation différentielle de l'orbite dont les coefficients augmentent considérablement par l'intégration ; ce sont ceux qui contiennent des quantités de la forme $\cos(Qz)$, Q marquant un coefficient qui diffère peu de N , mais qui ne lui est pas exactement égal ... Cela vient de ce qu'il faut, pour les intégrer, les diviser par la quantité $(N^2 - Q^2)$, qui est*

très petite, et qui se trouve de l'ordre de n (au moins), lorsque la différence de N et de Q est de ce même ordre. De là, il s'ensuit ... qu'il n'est pas permis de négliger les quantités du quatrième ordre en $\cos(Qz)$ dans les termes de l'équation différentielle où se trouvent des quantités $\cos(Qz)$: car l'intégration réduira au troisième ordre les coefficients de ces quantités ... Il y a encore dans l'équation de l'orbite d'autres termes auxquels il faut avoir beaucoup d'attention, ce sont ceux où se trouvent des quantités de cette forme $\cos(kz)$, k étant une quantité fort petite, comme de l'ordre de n ou au-dessous. Tels sont par exemple les termes où se trouvent $\cos(\pi nz)$, $\cos(2z - 2nz - 2Nz)$, etc. Ces termes, à la vérité, ne deviennent pas plus grands dans l'équation intégrée de l'orbite que dans l'équation différentielle; mais lorsqu'il faudra déterminer le temps employé par la Lune à parcourir l'arc z ... les termes dont il s'agit augmenteront beaucoup de valeur; car ce temps dépendant de la quantité $x^2 dz$, les termes qui renferment $\cos(\pi nz)$, $\cos(2z - 2nz - 2Nz)$ dans la valeur de t , donneront dans l'expression de $x^2 dz$ des termes de cette forme $dz \cos(\pi nz)$, $dz \cos(2z - 2nz - 2Nz)$, qui étant intégrés se trouvent divisés par πn ou par $(2 - 2n - 2N)$, c'est-à-dire par des diviseurs forts petits, ce qui les augmentera considérablement. De plus, si la quantité $\int \frac{\pi dz}{u^3}$ qui se trouve dans l'équation de l'orbite, il se rencontre des cas d'angles de cette espèce, il est visible que par l'intégration, ces termes deviendront beaucoup plus grands, et que ces mêmes termes augmenteront encore de nouveau, quand on cherchera l'expression du temps, et qu'on substituera dans $x^2 dz$ à la place de x sa valeur. De toutes ces observations, il s'ensuit que si dans la quantité $\pi dz/u^3$, il se rencontre des termes de la forme $\cos(kz)$, k étant une quantité fort petite de l'ordre de n , il faut pousser les coefficients de ces termes jusqu'aux quantités infiniment petites du cinquième ordre, puisque ces termes par la double intégration seront abaissés jusqu'à n'être plus qu'infiniment petits du troisième ordre ... » [235]

D'ALEMBERT donne ensuite deux corollaires qui condensent ses réflexions sur les ordres de grandeur des différents termes, et, en passant, fait part d'une démonstration fort élégante du théorème de Taylor. Il passe ensuite au développement des calculs qu'exige la deuxième approximation. Afin d'y parvenir il substitue dans les expressions des forces ψ et π les valeurs de t , m et ζ qu'il a obtenues dans sa première approche. Il remplace le rayon vecteur B' en tenant compte de l'orbite elliptique de la Terre par

$$B' = B(1 + \lambda \cos(\pi z')) \quad (5.43)$$

$$z' = nz - 2\lambda \sin(\pi nz) \quad (5.44)$$

avec n étant le rapport des moyens mouvements de la Terre et de la Lune. D'ALEMBERT détermine alors tous les termes de l'équation différentielle de l'orbite et réduit celle-ci à la forme d'une équation linéaire du second ordre et en joignant ensemble tous les termes, il exprime l'orbite Lunaire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& d^2t + N^2tdz^2 + Hdz^2 + dz^2(D' \cos(2z - 2nz)) + F' \cos(2z - 2nz) \\
& + Nz + G' \cos(2z - 2nz - 2Nz) + E' \cos(n\pi z) + \varepsilon' \cos(Nz - \pi nz) \\
& + \eta' \cos(Nz - \pi nz) + S' \cos(2z - 2nz + \pi nz - Nz) \\
& + L' \cos(2z - 2nz + \pi nz) + \omega' \cos(2z - 2nz - \pi nz) + M' \cos(2z - 2pz) \\
& + Q' \cos(2nz - 2pz) + \pi' \cos(2z - 2nz + \pi nz - Nz) \\
& + V' \cos(2z - 2nz - \pi nz + Nz) + Z' \cos(2z - 2nz + \pi nz - Nz) \\
& + Y' \cos(2z - 2nz - \pi nz - 2Nz) + \lambda' \cos(\pi nz - 2nz + 2pz) \\
& + \omega' \cos(-\pi nz + 2pz - 2nz) + \gamma' \cos(Nz) + \beta' \cos(z - nz) \\
& + \rho' \cos(z - Nz - nz) + \delta' \cos(z - nz + \pi nz) \\
& + \phi' \cos(z - Nz - nz + \pi nz)
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Tous les termes à arguments trigonométriques proviennent du remplacement par des développements en série des expressions entrant dans l'équation générale de l'orbite sous la forme :

$$d^2u + udz^2 - \frac{\psi dz^2}{u^2 g^2} + \frac{2\psi dz^2}{u^2 g^2} \int \frac{\pi dz}{u^3 g^2} + \frac{\pi dudz}{u^3 g^2} = 0 \tag{5.46}$$

Dans l'expression 5.46, D'ALEMBERT remplace ψ et π par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\psi = & (T + L)u^2(1 - \frac{3}{4}m^2(1 - \cos(2(z - \zeta)))) \\
& - \frac{S}{2uB'^3}(1 + 3\cos(2(z - z')))) + \frac{9}{8} \frac{S \cos(z - z')}{u^2 B'^4}
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\pi = -\frac{3S \sin(2(z - z'))}{2uB'^3} + \frac{3S \sin(z - z')}{8u^2 B'^4} \tag{5.48}$$

où il a négligé les termes du quatrième ordre. Les expressions 5.47 et 5.48 se dérivent des expressions 5.17 et 5.18 avec les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned}
x &= 1/u \\
V &= z - \zeta \\
\theta &= z - z' \\
u &= k + t
\end{aligned} \tag{5.49}$$

D'ALEMBERT développe alors en largeur ses calculs qui, contrairement aux développements de CLAIRAUT, se limitent à des expressions algébriques non tributaires des calculs numériques intermédiaires et gardent donc une plus grande généralité. Ayant obtenu ainsi les valeurs cherchées de t et de n en fonction des

cosinus des multiples des angles z , Nz , πnz , pz et nz des premières et deuxièmes puissances de l'inclinaison du rapport des moyens mouvements, de l'excentricité lunaire et de la première puissance de l'excentricité terrestre, D'ALEMBERT détermine dans le chapitre 9 le temps que la Lune emploie à parcourir un arc quelconque de son orbite. Il y parvient en intégrant l'équation différentielle 5.46 et obtient la valeur de la longitude moyenne de la Lune Z , en fonction des sinus et de la longitude vraie z . Aussi pour cette expression fort longue, D'ALEMBERT donne les expressions algébriques des coefficients entrant dans sa formule.

Au chapitre 10, D'ALEMBERT calcule l'angle que la Lune parcourt dans un temps donné. Puisque la longitude moyenne de la Lune Z est proportionnelle au temps que la Lune emploie à parcourir un angle quelconque z , Z est aussi proportionnel au mouvement moyen de la Lune. Pour avoir l'expression du mouvement vrai en fonction du mouvement moyen il faut résoudre la formule pour Z suivant z et on trouve immédiatement le lieu vrai de la Lune dans l'écliptique. Pour rendre la formule encore plus applicable aux usages astronomiques, D'ALEMBERT introduit le mouvement vrai z' du Soleil au lieu du mouvement moyen nZ et il corrige l'équation de l'inclinaison par une substitution poussée au second ordre, ce qui entraîne l'introduction de quelques nouveaux termes dans l'équation de l'orbite .

D'ALEMBERT aborde le calcul numérique des différents termes du lieu de la Lune au chapitre 12. Dans cette démarche, il met en œuvre une méthode originale en exprimant ces coefficients par une suite de fractions décroissantes dont les dénominateurs sont facteurs de 360, ce qui facilite leur réduction en degrés. Ainsi il met par exemple :

$$n = \frac{1}{13^{1/2}} = \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{64} - \dots \right) \quad (5.50)$$

qu'on peut obtenir en développant $(12 + 3/2) - 1$. Comme les coefficients sont en général donnés en parties du rayon pris pour unité, il les multiplie en vue de les réduire en degrés par la valeur $57^\circ 18'$ ou sinus total qu'il décompose en faisant

$$57^\circ 18' = 60^\circ \left(1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{180} - \dots \right) \quad (5.51)$$

Après avoir accompli ses calculs, D'ALEMBERT trouve l'équation suivante pour le lieu vrai de la Lune :

$$\begin{aligned}
z = & Z - R \sin(NZ) + 13' \sin(2NZ) + 8'' \sin(3NZ) \\
& + (36'52'' - 23'') \sin(2Z - 2z') - (1^\circ + 14' - 3'') \sin(2Z - 2z' - NZ) \\
& - (2' + 16'') \sin(2Z - 2z' + NZ) + 12'57'' \sin(\pi z') \\
& + 2 \sin(2Z - 2pZ) + 2'28'' \sin(2Z - 2nZ - 2NZ) \\
& - 38'' \sin(2Z - 2z' + \pi z') - 40'' \sin(2Z - 2z' - \pi z') \\
& - (1' + 13'') \sin(NZ - \pi z') + (1' + 13'') \sin(NZ + \pi z') \\
& - 1'9'' \sin(2z' - 2pZ) + 52'' \sin(2Z - 2z' + NZ + \pi z') \\
& + 18'' \sin(2Z - 2z' - NZ - \pi z') - (1' + 30'') \sin(2Z - 2pz' - NZ) \\
& + 46'' \sin(2Z - 2pZ + NZ) + 2'4'' \sin(Z - z') \\
& + 18'' \sin(Z - z' + \pi z')
\end{aligned} \tag{5.52}$$

R étant un coefficient inconnu dont la valeur exacte dépend des observations de l'excentricité moyenne et de l'équation moyenne du centre ; i étant égal à $\mu^2/4$ avec μ égal au coefficient de la variation de l'inclinaison de l'orbite de la Lune.

Les équations définitives que D'ALEMBERT vient d'obtenir avec 5.52 lui servent à construire les tables de la Lune. Il suit pour cela une méthode particulière, qui consiste à réduire en formules les tables faites d'après la théorie de NEWTON, sinon d'une façon rigoureuse, alors du moins suffisamment approchée.

Il faut ici exposer brièvement la construction des tables de la Lune depuis l'antiquité jusqu'à l'époque newtonienne. Claude PTOLÉMÉE, qui vient au II^e siècle de notre ère, fut l'astronome le plus célèbre jusqu'au temps de COPERNIC, non seulement par son traité astronomique «*l'Almageste*» mais aussi pour ses tables des planètes, dont la Lune. Elles seront à la base de toutes les tables du Moyen-Âge, que ce soient les «*Tables Alphonsines*», celles de Toulouse ou celles de Tolède. Jusqu'à la fin du XVI^e siècle, sa théorie épicyclique des planètes et de la Lune sera unanimement acceptée. Un grand pas en avant fut fait par le calcul par KEPLER des «*Tabulae Rudolphinae*» [136] qui contiennent aussi des tables sur le mouvement de la Lune. KEPLER considère, conformément à ses deux premières lois, le mouvement de la Lune se faisant sur une ellipse possédant une excentricité fixe de 0,04362, la Terre occupant un de ses foyers. En plus il admet que la ligne des apsides tourne uniformément avec une période de 8 ans 311 jours et 6 heures. En vue de tenir compte des autres inégalités, KEPLER ajoute ce qu'il appelle «*l'équatio luminis*» tenant compte de l'évection et d'une «*particula exsors*» et la variation qu'il désigne la «*variatio Tychonica*». En plus KEPLER admet une «*équation annuelle*» et ajuste l'équation du temps à la fin de ses calculs. Les tables de KEPLER présentent des différences notables de l'ordre de 1 à 2 degrés par rapport au mouvement réel de la Lune.

Un savant tout à fait important pour le développement de l'astronomie théorique dans la première moitié du XVII^e siècle fut Jeremiah HORROKS.

[139] Il posa la première pierre pour l'interprétation newtonienne de la dynamique du système planétaire en montrant que le mouvement de la Lune peut être représenté par une orbite elliptique avec une excentricité variable tandis que la direction de l'apogée subit une rotation dans le plan de l'orbite avec une période de quelques neuf années, fait déjà connu par HIPPARQUE. HORROCKS considérait ces mouvements de l'orbite comme étant dus à l'attraction du Soleil. Il était aussi un astronome remarquable et quoiqu'il mourut très jeune à 22 ans, il laissa des études brillantes auxquelles NEWTON se référait dans les «PRINCIPIA» [1] où il écrit : «HORROXIIUS, *notre compatriote est le premier qui ait assuré que la Lune faisait sa révolution dans une ellipse autour de la Terre qui est placée dans son foyer intérieur ...* » Et Madame du CHÂTELET dans son «*Exposition abrégée du Système du Monde*» [98] rend hommage à HORROCKS en écrivant : «*M. HORROCKS, célèbre astronome anglais avait prévenu M. NEWTON sur la partie la plus difficile des mouvements de la Lune, sur ce qui regarde l'apogée et l'excentricité. On est étonné que ce sçavant dénué du secours que fournissent le calcul et le principe de l'attraction, ait pu parvenir à réduire des mouvements si composés sous des lois presque semblables à celle de M. NEWTON ...* » Les tables de la Lune de HORROCKS ne furent publiées qu'en 1672 [253], mais étaient connues de NEWTON mais aussi de FLAMSTEED [254] et de HALLEY. Elles furent à la base de toutes les tables de la Lune construites après la parution de la deuxième édition des «PRINCIPIA».

De nombreux astronomes partirent du savoir ainsi accumulé soit dans la théorie de la gravitation, soit dans les tables de l'orbite de la Lune pour construire eux-mêmes des tables. Ce fut le cas de LEMONNIER dans ses «*Institutions astronomiques*» [255] qui avait fondé les siennes sur celles de FLAMSTEED. Celui-ci de son côté avait tenu compte des suggestions de NEWTON. Quant à celles de HALLEY, elles furent publiées par J. BEVIS comme édition posthume en 1749. Ces tables furent réimprimées avec des notices en langue anglaise en 1752, une édition française parut en 1754 par Chappe d'AUTEROCHE complétée en 1759 par une édition par LALANDE pour les tables des planètes et comètes.

D'ALEMBERT adopte pour tables de comparaison pour sa théorie celles des «*Institutions astronomiques*» de son ami LEMONNIER qui étaient fondées sur celles de FLAMSTEED. Il cherche dans ces tables les parties aliquotes qui peuvent représenter les équations que l'on veut réduire en tables et arrive ainsi à des facilités de calcul non négligeables. Dans l'article II du chapitre XV, D'ALEMBERT revient au mouvement de l'apogée de la Lune et il relate l'histoire de cette question centrale du problème des trois corps au XVIII^e siècle et qui est également au centre de la présente étude : «*M. CLAIRAUT lut à l'assemblée publique de l'Académie le 15 novembre 1747 un Mémoire dans lequel il prétendait que le mouvement de l'Apogée de la Lune trouvé par la Théorie, est la moitié plus lent que ne le donnent les observations. D'où il concluoit que la force de la gravitation n'est pas en raison inverse du quarré des distances, comme on l'avoit cru ou supposé jusqu'à présent. Tous les journaux firent mention de ce Mémoire, et quoique dans le même temps je fusse parvenu au même résultat que M. CLAIRAUT sur le mouvement de l'Apogée par une méthode très simple*

et dont la bonté ne m'était pas suspecte, je ne jugeai point à propos d'en rien publier alors. Une lettre que je reçus quelque temps après de M. de MAUPERTUIS, m'apprit que M. EULER était arrivé longtemps avant nous par une autre Méthode à la même conclusion, ce qui me confirma dans mon sentiment. Enfin M. CLAIRAUT ayant demandé à l'Académie que son Mémoire lu en 1747 fut imprimé dans le volume de 1745 alors sous presse, cette circonstance me mit dans le cas de demander aussi l'impression du mien qui avait été fait dans le même temps» [209], «mais que je ne pensois nullement à mettre au jour sitôt; j'entre dans ce détail, non pour me disculper de ma méprise, dont je conviens sans peine, mais pour exposer ce qui en a occasionné la publication, avant que des recherches plus exactes me la fissent apercevoir. J'avoue, au reste, que quelque persuadé que je fusse alors de cette prétendue découverte, je ne la croyais pas aussi importante qu'elle avait paru à d'autres. Non seulement elle ne renversoit point le système newtonien, elle ne donnoit même, à proprement parler, aucune atteinte à la loi fondamentale de ce système, puisqu'il est visible qu'on pouvoit attribuer en partie le mouvement de l'Apogée à quelque force particulière, différente de celle de la gravitation. C'est pour cela que je crus ne devoir tirer de mon calcul aucune conclusion contre le système de M. NEWTON.»

«Le 17 mai 1749, M. CLAIRAUT déclara à l'Académie qu'ayant considéré cette matière sous un nouveau point de vue [194], il avait trouvé moyen d'accorder le mouvement de l'Apogée avec les observations, sans supposer d'autres forces que celle de l'attraction en raison inverse du quarré des distances; et le même jour il me dit qu'il étoit parvenu à ce dernier résultat, en cherchant la nouvelle loi de la gravitation nécessaire pour donner à l'Apogée tout son mouvement. J'ignore comment il seroit possible de déterminer cette loi, car comme elle ne sçaurait être composée de deux termes seulement, le Problème resteroit toujours indéterminé; et quand même on ne la supposerait composée que de deux termes, on ignoreroit à la fois, et le coefficient et l'exposant du second, de manière qu'un seul Phénomène ne pourroit servir à les faire trouver tous deux.»

«Quoi qu'il en soit M. CLAIRAUT m'apprit que le nouveau point de vue sous lequel, il avait envisagé cette question, consistoit simplement à calculer plus exactement l'orbite, et que son nouveau résultat sur le mouvement de l'Apogée lui était venu par les termes où le $\sin(2z - 2nz - Nz)$ se trouve multiplié par $G \cos(2z - 2nz - Nz)$.» [235]

D'ALEMBERT passe alors à son propre point de vue, et il souligne qu'il avait trouvé la formule :

$$N^2 = 1 - \frac{3n^2}{2} \left(1 + \frac{15n \cdot 10}{16} \right) \quad (5.53)$$

Il a cherché d'après cette formule la valeur numérique du mouvement de l'Apogée, mais il était surpris de trouver encore une différence de 30' plus petit par révolution que le mouvement observé. D'ALEMBERT conclut de ce résultat qu'il était encore nécessaire de pousser plus loin le calcul et donc d'avoir recours à d'autres termes que ceux que CLAIRAUT avait introduits. Il reconnaît qu'il

avait négligé d'introduire des termes supplémentaires dans le calcul de N^2 qui auraient pu donner un résultat encore plus conforme aux observations pour le mouvement de l'Apogée. Finalement les raffinements du calcul amènent au résultat que la différence entre la théorie et l'observation peut être ramenée à environ $1'4''$ par révolution. D'ALEMBERT conclut que : *«le peu de différence qu'on trouve entre la Théorie et les observations, et la nature de la Série qui donne le mouvement de l'Apogée, nous met en droit de conclure que le système newtonien rend parfaitement raison du Phénomène dont il s'agit. D'ailleurs l'action des autres planètes, la figure aplatie de la Terre, et celle de la Lune, toutes circonstances auxquelles nous n'avons eu aucun égard jusqu'ici, et dont il serait très difficile de calculer exactement l'effet, peuvent aussi influencer pour quelque chose dans le mouvement de l'Apogée.»* [235]

D'ALEMBERT poursuit : *«Mais quand même le mouvement de l'Apogée trouvé par la Théorie ne seroit pas exactement conforme à celui que donnent les observations, ce ne seroit pas à mon avis une raison suffisante pour changer la loi d'Attraction dans le système planétaire. Car : 1°. Tous les Phénomènes dont on a déduit la loi du carré n'indiquent cette loi qu'à peu près, et il est certain, mathématiquement parlant, que toute autre loi peu différente de la loi du carré y satisferait également ; mais comme il seroit absurde sous ce prétexte de vouloir changer la loi du carré, il ne seroit guère plus permis de changer cette loi pour expliquer un seul Phénomène, qui peut avoir quelque cause particulière. 2°. M. NEWTON lui-même n'a jamais cru que la force d'Attraction en raison inverse du carré des distances, fut exactement la seule à laquelle on dut attribuer les Phénomènes célestes. Il soupçonne lui-même dans la Terre une force magnétique qui agit sur la Lune, et s'il ne la fait point entrer dans le calcul des mouvements de cette Planète, c'est, dit-il, parce qu'il ne connaît point la loi, ni la quantité de cette force. 3°. Cette fonction qui exprimerait la loi d'Attraction et par laquelle on prétendrait rendre raison des mouvements des corps célestes, ne pourroit servir à expliquer d'autres Phénomènes comme la rondeur des gouttes d'eau, l'ascension des liqueurs dans les tuyaux Capillaires, etc ... Car en supposant même comme une chose incontestable, que ces Phénomènes ayent réellement l'Attraction pour cause, cette Attraction doit être telle qu'elle soit très grande dans le point de contact ; et par conséquent la fonction qu'on prendroit pour l'exprimer devroit être très grande dans le point de contact ; c'est-à-dire qu'à de très petites distances, et dans le point de contact, elle devroit être fort différente de la loi du carré ; de sorte que la formule de l'Attraction qui différerait peu de la loi du carré à la distance de la Lune, seroit fort différente de cette loi à la surface de la Terre. Or une telle loi serait absolument contraire aux Phénomènes. Puisque M. NEWTON a démontré que la pesanteur des corps terrestres étoit à la pesanteur de la Lune vers la Terre, à très peu près en raison inverse du carré des distances. On convient que la formule $1/x^2 + b/x^4$ ne peut pas servir à exprimer la loi d'attraction, parce que le second terme donneroit la pesanteur trop grande à la surface de la Terre, mais quelque terme ou quelque quantité qu'on ajoute à $1/x^2$, cette quantité ne pourra satisfaire à la fois aux Phénomènes de la pesanteur et à ceux de l'Attrac-*

tion des corps terrestres, puisque dans le premier cas elle doit être fort petite par rapport à $1/x^2$ même au point de contact, et que dans le second cas elle doit être très grande par rapport à $1/x^2$ au même point de contact. 4°. Enfin, si on veut employer ici les raisons métaphysiques, il me paroît assez naturel de penser avec M. de BUFFON [239], que l'Attraction étant regardée comme une qualité physique, c'est-à-dire comme une loi primordiale de la nature, la loi du quarré, ou en général toute loi dépendante d'une puissance unique de la distance, est préférable à toute autre fonction algébrique qu'on voudroit y substituer. Car cette fonction renfermerait nécessairement au moins une quantité constante; de sorte que le rapport des forces attractives à deux distances quelconques du corps attirant ne serait pas déterminé par ces seules distances, mais encore par quelque Paramètre qui modifieroit et compliqueroit ce rapport. Ainsi l'Attraction ne dépendroit plus simplement de la distance, mais aussi de ce Paramètre, qu'on ne voit pas trop pourquoi la nature y aurait introduit. Une loi aussi bizarre doit donc être rejetée, à moins que les Phénomènes de nous forcent à l'admettre; mais nous en sommes jusqu'ici bien éloignés.» [235]

A la suite de son **Corollaire** II cité devant, D'ALEMBERT rend attentif encore une fois qu'il est difficile de trouver une fonction qui répondrait à la fois aux phénomènes terrestres et célestes et plaide implicitement ainsi pour l'acceptation de la loi newtonienne sans trop se préoccuper d'une intégration de tous les phénomènes sous une même loi.

Pratiquement le restant de son traité est voué par D'ALEMBERT à la construction des tables de la Lune. Il suit pour cela une méthode bien particulière, consistant à réduire en formules les tables faites d'après la théorie de NEWTON pour les comparer après avec sa théorie. Il déduit les différences qui existent entre ses équations analytiques et les tables que LEMONNIER a publiées dans ses *«Institutions astronomiques»* [255]. D'ALEMBERT calcule aussi la parallaxe de la Lune au moyen de la formule qui donne l'inverse du rayon vecteur tout en employant également sa détermination de la latitude de celle-ci au moyen du mouvement des nœuds et de la variation de l'inclinaison de son orbite. Il termine sa théorie par le recueil de ses nouvelles tables et la comparaison entre celles qu'EULER a publiées en 1745 dans ses *«Opuscules»* [257] : *«La forme des Tables de M. Euler, et de l'Almanach de Berlin, est très différente de celles que nous avons données à nos Tables d'après l'usage constamment reçu par tous les Astronomes. M. EULER fait, ou plutôt regarde l'excentricité comme constante, et au lieu de fondre, pour ainsi dire, plusieurs équations en une seule, comme on le fait en prenant l'excentricité variable, il calcule et expose séparément toutes les équations de la Lune.»* [235]

Aux dernières pages des *«Recherches»*, D'ALEMBERT fait mention de la théorie de la Lune de MAYER [258] que celui-ci a publiée à Göttingen en 1753 : *«L'auteur assure que ses Tables ne diffèrent jamais de 2' des observations ... M. MAYER dit qu'il a dressé ses Tables d'après la Théorie par une Méthode particulière qu'il serait, dit-il, trop long d'expliquer. Il n'est pas facile de démêler par les paroles de M. MAYER, s'il a dressé ses Tables sur des formules algébriques de M. EULER, ou sur des formules qu'il a trouvées lui-même d'après la*

Théorie. Quoi qu'il en soit, je trouve après avoir comparé ses Tables avec les miennes, que la différence des équations auxquelles nous avons eu égard l'un et l'autre n'y est presque jamais d'une minute, et beaucoup au-dessous.» [235]

Après quelques courtes explications techniques, D'ALEMBERT revient à son point sensible, celui de la priorité de ses propres découvertes : «D'ailleurs, M. MAYER ne s'exprime pas exactement, quand il dit que M. EULER a le premier réduit le mouvement de la Lune à des équations analytiques. M. EULER n'a encore rien publié de son travail sur ce sujet, et les Tables qu'on trouve dans ses Opuscules et dans l'Almanach de Berlin, sont dressées les unes sur les observations et les autres sur des formules peu exactes, comme il est aisé de le voir, tant par les équations qu'on y a négligées, que par la différence qu'il y a entre les coefficients des équations qu'on y emploie, et les coefficients des équations trouvés plus exactement par la Théorie. M. CLAIRAUT et moi sommes les premiers qui ayons calculé et publié d'après la Théorie des formules du mouvement de la Lune. Néanmoins, je rends sur cet article à M. EULER la justice que je lui dois, et je suis très convaincu qu'il étoit aussi en état que personne de publier de pareilles Tables. Mais il s'agit ici de ce qu'il a fait, et non de ce qu'il pouvait faire.» [235]

Mais déjà en 1751, MAYER en tenant compte des travaux de HALLEY rendait compte à EULER de ses recherches sur l'orbite de la Lune et propose la formule suivante à EULER pour la position vraie de la Lune [238] qu'il avait déterminée d'après ses calculs :

$$\begin{aligned}
 z &= L + 10^{\circ}48'16'' + 1133'' \cos(p) + 28'' \sin(p) - 77 \cos(2p) \\
 &\quad - 4s \sin(2p) + 5 \cos(3p) + 124 \cos(s) - 11 \sin(s) - 4 \cos(2s) \\
 &\quad - 26 \cos(p - s) - 3 \sin(p - s) - 14 \\
 &< \cos(p + s) + 1 \sin(p + s) - 226 \cos(2\omega - p) + 6 \sin(2\omega - p) \\
 &\quad + 3 \cos(4\omega - 2p) - 9 \\
 &< \cos(2\omega - 3p) - 2 \cos(\omega - p) + 20 \cos(2\omega - 2p) \\
 &\quad - 13 \cos(2\omega - p + s) + 1 \sin(2\omega - p + s) \\
 &\quad - 36 \cos(2\omega - p - s) - 3 \sin(2\omega - p - s) \\
 &\quad + 25 \cos(2\omega - 2p + s) - 4 \sin(2\omega - 2p + s)
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

z indique la position vraie de la Lune dans son orbite au temps $T + 223$ mois synodiques, L sa position actuelle, p est l'anomalie moyenne de la Lune, s est l'anomalie moyenne du Soleil et ω la distance moyenne de la Lune au Soleil.

MAYER envoya ses Tables de la Lune à l'Amirauté britannique en vue de concourir pour le prix que celle-ci se proposa de décerner à celui qui donnait les longitudes de la Lune avec une exactitude de moins de $30'$ en 1754. Les résultats de MAYER furent finalement imprimés à Londres en 1767 [259]. Dans tous ses calculs MAYER utilisait la méthode des indéterminés en relation avec les résultats obtenus par la première théorie de la Lune d'EULER et disposait des observations de plus en plus fréquentes et exactes des astronomes au XVIII^e

siècle y compris les siennes propres. Après sa mort prématurée en 1762, sa veuve fut gratifiée d'une partie du prix que le Parlement britannique avait instauré pour une méthode permettant la détermination de la longitude en mer. Une autre partie de ce prix fut décerné à EULER pour sa théorie de la Lune qui était sous-jacente aux tables de MAYER.

D'ALEMBERT revint à la Théorie de la Lune dans la troisième partie des *«Recherches sur différents points importants du Système du Monde»* publiées en 1756 [235] et il détaille et explique encore une fois plusieurs points traités dans la première partie de ses *«Recherches»*. Une partie de la *«Préface»*, ainsi que tout le *«Livre Quatrième»* traitent des Tables de la Lune.

Déjà dans les premières pages de la Préface, D'ALEMBERT affiche sa préférence pour les Tables de LEMONNIER dans les *«Institutions astronomiques»* [255] de celui-ci. Il reconnaît d'abord que l'exactitude de ses tables dérivées de celles de HALLEY [256] est moins grande que les astronomes le croyaient quand ils attribuaient une exactitude de 2' de différence avec les observations : *«Ce n'a été qu'après plusieurs années qu'on s'est aperçu que l'erreur montait quelquefois à 5', quoique à la vérité très rarement.»* [235]

D'ALEMBERT mentionne alors les deux méthodes pour contribuer à la perfection des Tables de la Lune : *«C'est de s'attacher à corriger, soit par la Théorie, soit par l'observation, les Tables des «Institutions Astronomiques». Je dis soit par la Théorie, soit par l'observation, car elles ont besoin l'une de l'autre, et doivent s'aider mutuellement sur ce point.»* [235]. D'ALEMBERT fait encore une fois *«une profession de foi»* pour la théorie de la gravitation quand il poursuit : *«Les calculs analytiques des mouvements de la Lune ont sans doute été portés à un assez grand degré de précision pour nous convaincre que l'attraction newtonienne est en effet, la vraie cause des inégalités qu'on observe dans le mouvement de cette Planète, ou du moins que si d'autres causes se joignent à celle-là, leur effet est incomparablement moindre, et n'est même pas jusqu'ici constaté par les phénomènes; mais les calculs analytiques n'ont pas encore été poussés assez loin, et ne le seront peut-être de long-tems assez pour répondre parfaitement aux observations astronomiques.»* [235]

Finalement D'ALEMBERT conclut : *«Quoique je sois bien éloigné de donner l'exclusion à aucune des Tables modernes, tout mis en balance néanmoins, les Tables des «Institutions Astronomiques» sont celles dont l'accord avec les observations me paroît jusqu'ici le plus constaté, et cette raison m'engage à leur donner la préférence.»* [235]

Le LIVRE IV s'occupe à décrire plusieurs points de détail de la construction des Tables de la Lune et D'ALEMBERT explique quels changements il a fait aux siennes depuis la publication de la première partie de ces *«Recherches»* [235]. Il introduit, après discussion des différentes inégalités pour le lieu vrai de la Lune, un tableau de comparaison entre ses tables, celles des *«Institutions astronomiques»*, ainsi que des tables de MAYER et de CLAIRAUT. D'ALEMBERT revient encore une fois sur la méthode des indéterminés pour former des Tables de la Lune par le moyen des observations. Après avoir donné une formule générale contenant tous les arguments trigonométriques entrant dans la

formule trouvée analytiquement, il arrive à dégrossir le système de 22 équations algébriques linéaires en plusieurs paquets contenant chacun un nombre beaucoup plus petit d'équations, le plus grand système renfermant cinq inconnues. D'ALEMBERT convient que la méthode qu'il propose a quelques inconvénients dont un des principaux est le nombre élevé d'observations des positions relatives du Soleil et de la Lune et il estime le temps pour ces observations entre 17 à 18 siècles.

A la fin de cet exposé de sa théorie de la Lune, on peut résumer que D'ALEMBERT sut distinguer dans la comparaison des différentes solutions analytiques de leur mérite réel sous le rapport analytique, mais aussi de leurs succès numériques. Il était pleinement conscient qu'il s'agissait de recherches nouvelles qui s'étaient libérées des méthodes géométriques des «PRINCIPIA», mais qui, en contrepartie exigeaient des calculs beaucoup plus pénibles que ceux pratiqués jusqu'alors. D'ALEMBERT s'en rend compte que dans ce travail, la patience et l'exactitude sont aussi essentielles que le génie, et l'utilité pratique plus importante encore que la nouveauté des procédés. [117]

Quoique la méthode de D'ALEMBERT est encore loin de donner des résultats très précis, elle est bien remarquable car, outre les idées qu'il a partagées avec CLAIRAUT et EULER, il en a eu qui lui étaient bien propres. Ainsi c'est lui qui a démontré rigoureusement que les arcs de cercle ne doivent pas entrer dans la valeur du rayon vecteur de l'orbite, soulevant ainsi le problème des perturbations séculaires. Il a remarqué dès 1748 que plusieurs termes très petits dans l'équation différentielle, augmentent considérablement par l'intégration à cause des petits diviseurs, problème qui mena à une querelle avec CLAIRAUT. D'ALEMBERT fut le premier à remarquer que le mouvement de l'apogée ne fut pas expliqué complètement par le second terme de la série, mais qu'il était absolument nécessaire à pousser l'exactitude jusqu'au troisième et au quatrième terme, afin de s'assurer que la série reste convergente et que les termes suivants puissent être négligés.

D'ALEMBERT avait un sentiment très prononcé pour ses propres découvertes et il exigeait impérieusement qu'on lui attribuait toutes les idées qui lui étaient dues, mais il restait exact dans la part qu'il fit aux autres. S'il les critiquait avec rigueur et relevait leurs fautes sans pitié, il étalait ses remarques de façon claire et éclairait leurs écrits dans des points importants dont ils étaient l'objet. Ses «*Recherches*» sont remarquables par la précision et l'élégance du style quoique peu structurées. «*Ce géomètre, homme de lettres, est un de ceux qui ont su le mieux manier et assouplir une langue souvent peu flexible, en l'assujettissant à exprimer correctement les méthodes et les résultats de la théorie. Il n'est pas aussi heureux dans la manière dont il présente ses calculs, qui manquent quelquefois de clarté et de symétrie; il n'est pas facile de le comprendre toujours dans ses expositions, quelquefois un peu obscures, ni de le suivre jusqu'au bout quand il descend dans les détails des opérations analytiques. Il aimait à se livrer aux considérations générales ou aux spéculations de pure curiosité, et préférait quelquefois critiquer les méthodes des autres plutôt que de perfectionner laborieusement les siennes.*» [117]

Chapitre 6

Léonard Euler

6.1 Euler — le plus prolifique mathématicien et mécanicien du XVIII^e siècle

6.1.1 La transcription des «Principia» dans l'analyse leibnizienne et le rôle joué par les écoles de Bâle et de Paris ainsi que par Emilie du Châtelet

—I—

Nous avons longuement discuté la forme purement géométrique de l'approche newtonienne dans les «PRINCIPIA». Mais en 1684 avait paru dans les «*Acta Eruditorum*» la présentation du concept leibnizien de l'analyse [148, 260] qui fut le signal pour un petit groupe de mathématiciens continentaux, principalement basé à Bâle et à Paris, en vue de transcrire la mécanique newtonienne à l'aide de cet algorithme, alors encore controversé par de nombreux savants.

La «*Nova methodus*», exposant les règles fondamentales du calcul différentiel était difficilement lisible, vu son concept complètement nouveau, et fut de plus encore obscurci par de nombreuses fautes typographiques. Parmi le tout petit nombre de lecteurs qui comprenaient les idées leibniziennes, furent les frères Jacob et Johann BERNOULLI à Bâle. Et cette ville réputée déjà pour ses engagements humanistes aux XVI^e et XVII^e siècles, devint bientôt le centre des nouvelles mathématiques. Les frères BERNOULLI représentaient, à la fin de ce XVII^e siècle, l'élite des mathématiciens européens. Après la mort relativement précoce de Jacques I en 1705, son frère Johann I, fondateur de la dynastie des BERNOULLI, fut considéré par la communauté scientifique comme le premier mathématicien du monde. Il enseigna l'analyse mathématique à ses fils d'abord, mais aussi à d'autres étudiants brillants dont Jacob HERMANN et Leonard EULER. Des philosophes de la nature, souvent déjà célèbres ailleurs,

s'inscrivaient aux séminaires de Johann I afin d'apprendre la théorie de l'analyse mathématique. Tel fut le cas par exemple en 1729 pour MAUPERTUIS et CLAIRAUT, mathématiciens déjà connus à Paris, qui s'inscrivent à l'université de Bâle.

La première génération du groupe de Bâle était efficace sans pour autant être unie et homogène. Les plus anciens membres de la famille BERNOULLI, Jacob et Johann menaient des querelles incessantes de priorité, concernant le calcul des variations. Et Daniel et Johann faisaient de même pour la solution de problèmes hydrodynamiques. Néanmoins, une entente fondamentale continuait à régner dans le groupe qui se documentait par l'adoption de méthodes mathématiques, par la définition d'un programme de recherche commun, et par l'adoption de manuels comme l'«*Analyse*» du Marquis DE L'HOSPITAL [261] en 1696. Le groupe veillait également au maintien d'une qualité certaine dans le recrutement comme le prouve l'adhésion d'EULER et HERMANN à celui-ci.

En effet, avant la publication de l'œuvre D'HOSPITAL, qui servait largement à la vulgarisation de l'analyse leibnizienne, seule une poignée de savants comprenaient la nouvelle mathématique. FONTENELLE le disait clairement dans son éloge funèbre du Marquis D'HOSPITAL en 1704 : «*La géométrie des Infinités petits n'était encore qu'une espèce de Mystère et, pour ainsi dire, une Science Cabalistique renfermée entre cinq ou six personnes.*» [262] Mais celles-ci croyaient à la nouveauté de l'approche leibnizienne tout en comprenant profondément la discontinuité de celle-ci par rapport aux approches géométriques antérieures. Et LEIBNIZ encourageait ce point de vue. N'écrivait-il pas dans une lettre à HUYGENS en octobre 1693 : «*Tout ce que je m'étais proposé en produisant le nouveau calcul ... a été d'ouvrir un chemin où des personnes plus pénétrantes que moi pourraient trouver quelque chose d'importance.*» [263]

Les mathématiciens de l'école de Bâle étaient persuadés qu'un nouveau champ de recherche avait été ouvert avec le calcul différentiel et intégral, dans lequel beaucoup de nouveaux résultats étaient facilement obtenus en suivant comme directions de la recherche les analogies suggérées par la simple notation analytique. L'algorithme utilisé permettait par des généralisations faciles de trouver des nouvelles relations, respectivement de nouvelles formules. L'application permanente de cette méthode heuristique créait dans l'école bernoullienne un esprit largement ouvert à l'innovation scientifique. Et en quelques années, elle devint prépondérante dans les académies et les universités, fournissant des professeurs de mathématiques à beaucoup de hautes écoles en Europe de Groningen à St-Petersbourg, de Padoue à Frankfurt sur Oder.

Il faut se pencher maintenant sur la nature de cette nouvelle analyse enseignée et inventée depuis Bâle. L'on peut distinguer trois domaines de recherche : il y avait d'abord la mise au point de méthodes de solution d'équations différentielles totales, puis les premières tentatives pour formuler le calcul des variations et finalement la sommation des séries infinies. Les méthodes de l'analyse rendaient possibles des progrès dans les trois domaines. Il faut souligner que l'école de Bâle chercha à préserver une représentation géométrique de leurs résultats en les assimilant à des entités de la géométrie, même si la majeure partie de la

technique employée consistait en des manipulations formelles à l'aide de symboles analytiques. Très vite les membres du cercle des BERNOULLI passèrent maîtres dans cette manipulation symbolique qui souvent paraissait illogique à d'autres mathématiciens. Des controverses naquirent vite de cette situation, dans lesquelles LEIBNIZ, lui aussi, a été mêlé plus d'une fois. Nous avons déjà fait référence à la véritable guerre entre les communautés scientifiques anglaise et continentale après que Fatio DE DUILLIERS eut accusé LEIBNIZ d'avoir plagié NEWTON. Celui-ci, étant membre de la Royal Society, demandait que cette accusation soit rétractée. Or, un certain patriotisme étant plus fort que le souhait d'une neutralité scientifique, mena à la rédaction du «*Commercium Epistolicum*» [55], un rapport préparé par un comité téléguidé par NEWTON, qui donna raison à ce dernier.

Il est évident que les représentants de l'école de Bâle se référaient constamment aux «PRINCIPIA» et à son approche méthodologique. Il était impératif pour les adhérents de la méthode leibnizienne de prouver, par la référence à l'œuvre maîtresse de NEWTON, que celui-ci usait d'une approche vétuste, basée sur la géométrie des Anciens, pour la résolution des problèmes mécaniques. Johann BERNOULLI s'employait activement à démontrer et à commenter ce fait, tout en propageant la supériorité du nouveau calcul. A partir de l'année 1693, Johann BERNOULLI commençait une campagne en vue de démolir l'œuvre maîtresse de NEWTON. Il concentrait ses critiques contre le contenu du LIVRE I en prétendant que NEWTON n'avait pas réellement résolu le problème inverse des forces centrales. Johann BERNOULLI s'attaqua également à certaines propositions du LIVRE II des «PRINCIPIA» en mettant en doute l'exactitude de la manipulation d'infinitésimaux d'ordre supérieur. Il est un fait que l'école de Bâle, mais aussi plusieurs membres de l'Académie Royale des Sciences de Paris, investissaient des efforts énormes dans le développement de méthodes analytiques de plus en plus avancées en ce qui concerne la résolution des problèmes de dynamique. Cette branche de la mécanique risquait de se trouver réduite à un chapitre du calcul intégral. Or le problème inverse des forces centrales, dont NEWTON avait donné une «*solution*» que Johann BERNOULLI qualifiait de supposition et non pas de démonstration, était mort, après bien des discussions en faveur des arguments avancés par le parti newtonien contre BERNOULLI et l'école de Bâle. En effet, l'argument de Johann BERNOULLI, que si les forces proportionnelles au carré inverse de la distance impliquent des trajectoires coniques ne permet pas d'avancer la réciproque, fut longuement discuté, et aussi les newtoniens étaient contraints de se plier d'abord à la méthodologie leibnizienne avant d'entamer la discussion. A partir d'une expression analytique que NEWTON avait donnée dans le «*De Quadratura*» [264] de 1691 et qu'il avait utilisée dans la PROPOSITION XXVIII du LIVRE III de la première édition des «PRINCIPIA», pour la composante normale de la force «*centrifuge*», égale au carré de la vitesse divisée par le rayon de courbure, DE MOIVRE parvenait à dériver une forme différentielle de la force centrale.

$$F \sim \frac{\dot{p}}{p^3 \dot{r}} \quad (6.1)$$

où p représente une normale à la tangente passant par le lieu du point mobile et r le rayon vecteur vers le foyer de la force. En 1705, il écrivit à Johann BERNOULLI «Après avoir trouvé ce théorème, je le montrais à Monsieur NEWTON et je me flattais qu'il lui paraîtrait nouveau, mais Monsieur NEWTON m'avait prévenu ; il me fit voir dans les papiers qu'il prépare pour une seconde édition de ses *«Principia Mathématica»* : toute la différence qu'il y avait, c'est qu'au lieu d'exprimer la loi de la force centripète par le moyen du rayon de la concavité, il l'exprimait par le moyen d'une corde inscrite dans le cercle de la concavité : mais il me dit qu'il valait mieux l'exprimer par le rayon comme j'avais fait.» [265] BERNOULLI lui envoya alors sa propre démonstration en 1706, mais commit l'indélicatesse de publier celle-ci dans les *«Mémoires de l'Académie Royale des Sciences»* de 1710 sans mentionner le nom de DE MOIVRE [266].

L'école anglaise se concentrait alors sur l'affirmation de Johann BERNOULLI que la démarche newtonienne ne garantissait pas l'existence d'une solution générale. Celui-ci avait proposé dans sa communication à l'Académie des Sciences de 1710 [266] un contre-exemple mettant en jeu des orbites cubiques, sans pour autant être capable de fournir une solution complète de ce problème. Ce fut COTES qui, dans son article *«Logometria»* de 1714 [267] donna une solution complète, distinguant cinq cas particuliers, dont celui que BERNOULLI avait mentionné. De cette façon, COTES et son commentateur John KEILL, dans son article de 1714 [268] dans les *«Philosophical Transactions»* étaient parvenus à une solution analytique du problème des forces centrales avant l'école de Bâle.

Et KEILL contre-attaqua J. BERNOULLI en affirmant que la solution que celui-ci donna au problème inverse était équivalente aux PROPOSITIONS XXXIX à XLI du LIVRE PREMIER des *«PRINCIPIA»*. Et en plus, il souligna que NEWTON avait donné une solution plus concise et plus élégante pour le problème des forces quadratiques inverses dans le **Corollaire I** aux PROPOSITIONS XI à XIII que ne la donnait J. BERNOULLI basée exclusivement sur l'approche analytique : *«La solution de Monsieur BERNOULLI, ne différant de celle de Monsieur NEWTON que dans les caractères ou symboles.»* [269]

Mais malgré les efforts que se donna J. KEILL pour montrer que NEWTON possédait l'outil analytique, il restait le fait que celui-ci ne l'avait guère développé. Et au lieu de transcrire les PROPOSITIONS XXXIX à XLI du LIVRE PREMIER sous forme analytique, NEWTON préférait résoudre le problème inverse des forces quadratiques à l'aide du **Corollaire I** aux PROPOSITIONS XI à XIII. Il est vrai que dans la deuxième édition des *«PRINCIPIA»* de 1713, NEWTON clarifiait sa position, sans doute pour tenir compte de la critique de J. BERNOULLI. Il précisait dans la nouvelle version amplifiée du **Corollaire I** qu'une force proportionnelle à l'inverse des carrés de la distance implique nécessairement des trajectoires coniques puisque pour toutes conditions initiales, une conique peut être construite, suivant la PROPOSITION XVII, qui satisfait les équations du mouvement. Tel n'est pas le cas si la force est inversement

proportionnelle au cube de la distance, car il n'est pas possible dans ce cas de construire une spirale logarithmique pour toutes les conditions aux limites.

Après plusieurs essais en vue de réfuter l'argumentation newtonienne, l'école de Bâle et les mathématiciens continentaux se rendent à l'évidence et acceptent la preuve comme étant valide, quoique à posteriori, vu que NEWTON avait simplement vérifié que les orbites visées dans les PROPOSITIONS XI à XIII remplissent l'équation du mouvement pour chaque condition initiale possible. Et pendant le XVIII^e siècle, le **Corollaire** I aux PROPOSITIONS XI à XIII avec la PROPOSITION XVII, constituait la démonstration standard du problème inverse pour les forces centrales inversement proportionnelles au carré des distances. Et même EULER se rangeait du côté newtonien quand il écrivait : «*Johann BERNOULLI et d'autres niaient que NEWTON avait démontré de façon satisfaisante qu'uniquement les sections coniques répondent à la question quoique cela est prouvé avec une clarté suffisante dans la PROPOSITION XVII du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA».*» [270]

Aujourd'hui, l'opinion d'EULER sur la validité de la démonstration du problème inverse par NEWTON n'est guère acceptée, car celle-ci ne comporte pas une preuve de l'unicité de la solution. Il est vrai que cette question ne préoccupait guère les mathématiciens du début du XVIII^e siècle qui n'étaient pas encore confrontés avec les fondations logiques de l'analyse, une discussion menée principalement au siècle suivant. J. BERTRAND a donné à la fin du XIX^e siècle une solution complète du problème inverse qui fait, aujourd'hui encore, référence [124].

La concentration de ce texte sur les problèmes du mouvement des corps célestes nous empêche de nous pencher sur l'autre controverse majeure entre Johann BERNOULLI et NEWTON, la critique du premier concernant la PROPOSITION X du LIVRE II, qui, elle aussi, mena à des modifications conséquentes dans la deuxième édition des «PRINCIPIA». Ici BERNOULLI obtint gain de cause grâce à sa formulation exacte de l'équation différentielle du mouvement d'un projectile dans le milieu résistant.

Les mathématiciens de l'école de Bâle, ensemble avec les français groupés autour de l'Académie Royale des Sciences de Paris, investissaient des efforts énormes dans le développement des méthodes analytiques de la dynamique. Le processus de transcription de l'œuvre maîtresse de NEWTON dans l'algorithmique leibnizienne fut achevé dans les années 1740 après bien des interventions, dont les principales furent, à côté de celles de Johann BERNOULLI, celles de Jacob HERMAN, de Pierre VARIGNON et d'Alexis Claude CLAIRAUT. Avant, il y avait bien des tentatives de défendre le style géométrique newtonien à travers des «*Introductions*» aux «PRINCIPIA» même si cette défense se faisait de plus en plus en s'appuyant sur l'algorithme analytique. Une faiblesse de cette manière de raisonner fut sans doute le fait que NEWTON omit de publier ses propres résultats. Son traité : «*De quadratura*» [264] de 1704 ne contenait pas le traitement analytique des forces centrales et il se contentait de communiquer ses résultats de façon privée à A. DE MOIVRE et J. KEILL. Ceci était en opposition flagrante avec la démarche de l'école de Bâle et les adhérents leibniziens sur

le continent, qui utilisaient à fond les «*Acta Eruditorum*» et les «*Mémoires*» de l'Académie Royale des Sciences, en vue de propager les résultats de leurs recherches. La méthode des fluxions que NEWTON avait trouvée à la fin des années soixante et le calcul différentiel et intégral leibnizien étaient en fait deux algorithmes facilement transformables l'un dans l'autre. Il subsistait bien entendu le fait que le premier était pratiquement inconnu dans les communautés anglaise et continentale tandis que le deuxième avait été largement répandu grâce aux publications éditées soit à Leipzig soit à Paris. En fait beaucoup de connaissances étaient connues des deux côtés et les deux communautés se distinguaient beaucoup plus par des directions différentes dans leurs lignes de recherche et dans la valeur relative qu'elles attribuaient aux résultats obtenus.

NEWTON, tout comme nombre des membres de son école, était intimement persuadé qu'il ne faisait que redécouvrir et perpétuer une tradition perdue. Il était de son devoir de communiquer cette vérité à une audience qui n'était pas à même de comprendre, ni le calcul des fluxions, ni les équations différentielles. Il choisit donc comme outil la géométrie élémentaire. Pour NEWTON et ses successeurs, le contenu était plus important que la forme comme le montrent de nombreuses introductions aux «*PRINCIPIA*» publiées dans les premières décennies du XVIII^e siècle, et qui se passaient presque complètement d'expressions mathématiques. Cette approche newtonienne tentait de faire comprendre la nature de la gravitation universelle à un public non éduqué dans les sciences mathématiques. Et pour NEWTON l'approche analytique n'était nullement un algorithme indépendant, mais une simple expression de relations géométriques plus fondamentales. La démarche leibnizienne était complètement différente, car lui rêvait d'introduire de toutes nouvelles méthodes de raisonnement dont le calcul différentiel et intégral n'était qu'un exemple. Le but final était une extension qualitative du savoir universel à l'aide d'une nouvelle «*Caractéristique*». Et l'école mathématique qu'il instituait se distinguerait des autres mathématiciens par son habilité à manier les signes de la nouvelle symbolique analytique. Les savants de Bâle autour de la dynastie des BERNOULLI étaient ainsi à la pointe du progrès d'une nouvelle façon de pratiquer les mathématiques, moins intuitive et plus formaliste, préfigurant les vues modernes de cette science. [148]

—II—

APRÈS CETTE DIGRESSION, il faut revenir à quelques personnages et leurs travaux voués principalement à la transcription des «*PRINCIPIA*» en langage analytique, mais il faut aussi prendre en considération certains travaux antérieurs à ce programme de transcription et qui sont dûs à Jacob BERNOULLI, qui travaillait dans la lignée de HUYGENS, lui-même influencé par les idées mécaniques de DESCARTES. Celui-là, tout en pratiquant l'analyse leibnizienne, s'intéressa à des problèmes de mécanique que NEWTON avait soigneusement évités mais qui avaient suscité l'intérêt de HUYGENS, comme par exemple le

problème de la courbe isochrone. Cette attention avait même déçu LEIBNIZ, bien que lui-même eût résolu le problème en 1689 [271], sans pour autant utiliser son nouveau calcul. Cet écrit de LEIBNIZ constituait en quelque sorte la réplique aux développements de Christian HUYGENS de 1687 [45] dans lesquels celui-ci n'avait fait appel à aucune formule algébrique mais seulement à des proportions. Jacques BERNOULLI donna sa propre solution dans le numéro du mois de mai 1690 des *Acta Eruditorum* [118]. Cette solution, se voulant «analytique», comporte deux parties : une première convertissant le problème physique sous-jacent du mouvement d'un mobile pesant descendant uniformément et s'approchant de l'horizon en temps égaux, à une question de géométrie. La seconde partie s'attache ensuite à résoudre cette pure question de géométrie avec l'aide des concepts du calcul différentiel. Les détails mathématiques de cette démarche peuvent être aisément suivis chez BLAY [118]. Finalement Jacques BERNOULLI arrive à une solution exprimée par l'équation de la parabole semi-cubique :

$$\left(\frac{y - a^3}{b^2}\right)^3 = \frac{9a^3}{4b^2}x^2 \quad (6.2)$$

dans un système de coordonnées rectangulaires. À remarquer que le frère de Jacques, Jean BERNOULLI, a donné lui aussi une solution dans ses «*Lectiones Mathematicae*» [272]. Cette solution est pour l'essentiel identique à celle de son frère en ce sens qu'elle se décompose également en deux parties : la première ayant pour objet de ramener le problème à la pure géométrie, la deuxième de mettre en œuvre ensuite les concepts du calcul leibnizien. Elle présente cependant un intérêt par sa présentation plus pédagogique dégageant en particulier les hypothèses relatives à l'analyse du mouvement [118].

Mais la réflexion sur cette question particulière du mouvement des corps pesants se poursuit par le problème de la courbe isochrone paracentrique posé déjà par LEIBNIZ à la fin de son article d'avril 1689 [271]. Ce nouveau problème a pour objet de trouver la courbe plane, qu'un point pesant doit décrire, pour que sa distance à un point fixe varie proportionnellement au temps employé à parcourir chaque arc de courbe. Et encore une fois, il y a les mêmes acteurs s'avancant sur la scène, en vue de résoudre ce problème, sans doute plus compliqué que le problème initial : les frères BERNOULLI et LEIBNIZ. Jacques BERNOULLI donne une solution en 1694 dans les *Acta Eruditorum* [272]. Dans la même année, LEIBNIZ publie sa propre solution [273] pour être suivi en octobre 1694 par Jean BERNOULLI [274]. Les deux solutions données par Jacques et Jean BERNOULLI sont très proches tant par leur style que par leur esprit. Elles adoptent pour l'essentiel les mêmes articulations conceptuelles que celles qui caractérisent leur traitement de la courbe isochrone. Finalement Jean BERNOULLI trouve l'équation différentielle de la lemniscate :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\sqrt{x}}{\sqrt{a^2y - y^3}} \quad (6.3)$$

La construction de la courbe dépend donc de la rectification de la courbe 6.3.

LEIBNIZ, lui, donne une solution différente au problème, basée sur son «*principe général*» qui stipule que les éléments de l'espace sont en raison composée des vitesses et des éléments de temps :

$$dp \text{ ut } v \, dt \quad (6.4)$$

avec p l'espace parcouru, v la vitesse et t le temps. LEIBNIZ arrive à assimiler aux temps les espaces parcourus et il parvient finalement à une expression identique à celle des BERNOULLI sous la forme :

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^3 z - az^3}} \quad (6.5)$$

et qui signifie en réalité la quadrature de la courbe de lemniscate.

Mais la problématique de la descente de corps pesants dans le champ de la gravitation terrestre est enrichie par un nouveau problème : le traitement de la courbe brachystochrone, posé par Johann BERNOULLI. Il s'agit de trouver la courbe plane reliant deux points dans un plan vertical qu'un point pesant doit parcourir pour descendre sans vitesse initiale cette courbe dans le temps le plus bref. En effet cette question avait déjà été posée, aussi bien par HUYGENS dans son «*Horologium Oscillatorium*» [45] que par NEWTON dans le LIVRE I des «*PRINCIPIA*» [1], de façon que Johann BERNOULLI se trouvait en terrain connu quand il énonçait le problème sous forme de concours dont il réclamait la solution pour la fin de l'année 1696. Finalement, ce concours menait à la publication de six solutions dans le numéro du mois de mai 1697 des «*Acta Eruditorum*». Jacques BERNOULLI donna sa propre solution après avoir introduit un lemme supposant la conservation des propriétés extrémales de la courbe parcourue dans chacune de ces parties. En s'appuyant sur ce lemme, il arrive à démontrer par le calcul, et en adoptant la démarche infinitésimale, que la trajectoire du mobile est une cycloïde. Le frère de Jacques, Jean BERNOULLI, propose une solution élégante, prenant son départ dans l'analogie optique et dans le principe de Fermat pour aboutir, lui aussi, à une cycloïde sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{\sqrt{a^3 - v^2}} \quad (6.6)$$

où v désigne la vitesse du rayon lumineux provenant de l'analogie optique. La solution au problème donnée par G.-W. LEIBNIZ, à côté d'une brève présentation dans le numéro des «*Acta Eruditorum*» [272], est contenue dans une lettre de celui-ci à BERNOULLI du 21 juin 1696 [275]. La solution leibnizienne repose dans son principe, sur une identification de la courbe avec un polygone à une infinité de côtés, chacun de ceux-ci infiniment petits et qui est susceptible d'être parcouru par un point pesant suivant les lois galiléennes du mouvement. Après bien des manipulations algébriques, LEIBNIZ parvient lui aussi à une équation différentielle du type :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2b-x}} \quad (6.7)$$

qui est l'équation d'une cycloïde.

Le savoir accumulé au sein de l'école de Bâle sur différentes questions du mouvement d'un corps pesant permettait à leurs exposants de pouvoir entrer de plain-pied dans la discussion de la formulation de la science mécanique. Ainsi la dynamique des corps rigides, non traitée par NEWTON dans les «PRINCIPIA», fut reprise par Jacques BERNOULLI à partir de HUYGENS et à travers sa solution de la pendule physique. En effet, HUYGENS avait supposé que l'énergie cinétique de translation acquise par la chute des parties infinitésimales du corps pesant était suffisante pour faire monter le centre de gravité de celles-ci au niveau de départ. Cette hypothèse géniale garantissait une solution juste au problème des oscillations d'un corps matériel pesant autour d'un axe fixe, sans pour autant préjudicier le calcul du mouvement général d'un corps pesant. Jacques BERNOULLI s'en rendit compte assez vite. Il écrivit en 1703 un papier, tentant une nouvelle approche à la science de la mécanique qui influençait profondément celle-ci dans son développement ultérieur [276]. Son sujet fut la détermination du centre d'oscillation pour un système composé de deux masses m_1 et m_2 arrangées sur une barre sans masse aux distances r_1 et r_2 du point fixe 0 de la barre. Sous la contrainte représentée par la barre, les deux masses tomberaient également vite. Or ce mouvement libre n'est pas possible et la masse m_1 subit une perte, tandis que m_2 a un gain en mouvement. Afin d'équilibrer les mouvements des masses assujetties à rester alignées sur la barre, BERNOULLI applique l'équation de l'équilibre du levier, quoi qu'il fût en présence d'un problème dynamique et parvient à la formule générale pour la position du centre d'oscillation :

$$l = \frac{\sum m_j r_j^2}{\sum m_j r_j} = \frac{\theta}{m r_s} \quad (6.8)$$

où θ représente le mouvement d'inertie par rapport au point fixe 0, m la masse totale et r_s la distance du centre de gravité par rapport à 0. La distance l donne la position du centre d'oscillation par rapport à 0.

Ce texte de 1703 préfigure trois idées majeures pour le développement futur de la mécanique :

- la détermination du mouvement d'un système soumis à des contraintes ;
- l'accélération d'un corps, si on en change le signe, est équivalente à une force statique, ce qui revient au principe de D'ALEMBERT ;
- à côté de l'équilibre des forces, l'équilibre des moments est nécessaire aussi bien pour les problèmes statiques que pour les problèmes dynamiques. Ce principe fut explicité bien plus tard par EULER.

Il serait imprudent d'affirmer que Jacques BERNOULLI aurait sciemment institué ces principes. Mais ils apparaissaient entremêlés et de façon implicite dans le texte de 1703. Et l'école de Bâle pouvait donc puiser dans un fonds

de connaissances mécaniques provenant d'autres approches, pour les mettre en valeur dans son programme de recherche consistant dans la transcription des «PRINCIPIA» dans le langage de l'analyse.

À côté des Jacob, Johann I et Daniel BERNOULLI qui, ensemble avec Leonard EULER, furent les membres les plus illustres de l'école de Bâle, il faut citer surtout Jacob HERMAN qui avait des liens familiaux lointains avec EULER et qui fournissait des contributions importantes en vue du traitement analytique de la dynamique. HERMAN fut étudiant de Jacques BERNOULLI et fut supporté fortement par LEIBNIZ, dont il avait assimilé pleinement son nouveau calcul. Grâce aux recommandations de ce dernier, il occupa les chaires de mathématiques à Padoue et à Frankfurt/Oder avant d'être nommé à l'Académie de St-Petersbourg en 1724 ensemble avec Nicolas II, Daniel BERNOULLI et EULER.

L'œuvre maîtresse de HERMAN, la «*Phoronomia*» fut écrite lors de son séjour en Italie et publiée à Amsterdam en 1716 [277]. Ce livre est dédié à l'étude de la dynamique des corps solides et fluides et traite de beaucoup de problèmes que NEWTON avait, lui aussi, présentés dans les deux premiers livres des «PRINCIPIA». HERMAN avait une très grande admiration pour NEWTON et son livre fut loin d'être écrit complètement en suivant le style leibnizien, car il n'employait l'analyse mathématique que dans différentes parties. Cette référence vis-à-vis de NEWTON ne lui apportait pourtant pas les grâces de celui-ci. Bien au contraire, NEWTON lut de façon très critique les «*Phoronomia*» et trouvait qu'il n'était pas un complément aux «PRINCIPIA» [57].

En effet l'œuvre de HERMAN était centrée sur des intérêts différents de ceux qui préoccupaient NEWTON et l'incitaient à appliquer les mathématiques à la philosophie de la nature. HERMAN, venant du camp des BERNOULLI, partageait leurs convictions cartésiennes qui ne permettaient pas l'introduction de forces agissant à distance. Mais cette «impossibilité» physique n'enlevait rien à l'intérêt mathématique que les forces centrales incitaient et HERMAN traitait cette question dans le chapitre 2 du LIVRE I des «*Phoronomia*» [277] sous le titre : «*Sur les mouvements curvilignes dans le vide pour une variation quelconque de la gravité.*» HERMAN donne pour la première fois une démonstration, utilisant les méthodes de l'analyse leibnizienne de la PROPOSITION I du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» qui dit : «*Dans les mouvements curvilignes des corps, les aires décrites autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, et sont proportionnelles au temps.*» [1] Dans cette proposition, NEWTON comprend par les aires décrites par un corps autour d'un centre, les espaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, et par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons. HERMAN admet d'abord, comme NEWTON le fit, que la trajectoire sera une courbe plane. Puis il construit une figure contenant le centre D de la force centrale et le centre O du rayon de courbure ρ de la trajectoire. HERMAN raisonne ensuite sur deux positions infiniment voisines du mobile parcourant la trajectoire AB et introduit un triangle rectangle infinitésimal m, l, n . La décomposition de la force centrale F en deux composantes F_N normale à la trajectoire et F_T tangente à celle-ci, lui permet alors d'écrire :

$$F_N \rho = v^2 \quad (6.9)$$

et

$$F_T ds = -v dv \quad (6.10)$$

la masse du point matériel étant unitaire, v étant la vitesse, s la longueur de l'arc et ρ le rayon de courbure. L'équation 6.9 signifie que la force normale à la trajectoire est égale au carré de la vitesse divisée par le rayon de courbure, un résultat que NEWTON, lui aussi, avait trouvé bien auparavant. L'équation 6.10 dit que la force tangente à la trajectoire est égale au degré de changement de la vitesse. Il faut se pencher maintenant de plus près sur les méthodes que HERMANN a employées en vue de déduire les équations 6.9 et 6.10. Il introduit d'abord deux principes généraux, valables pour une force G à pesanteur uniforme qui accélère un corps de masse unitaire de manière uniforme :

$$Gt = v \quad (6.11)$$

ou v est la vitesse et t le temps. Le deuxième principe s'énonce :

$$\sqrt{\frac{2l}{G}} = t \quad (6.12)$$

Les équations 6.11 et 6.12 se retrouvent déjà chez GALILEI [81]. HERMANN les applique maintenant au mouvement curviligne causé par une force centrale F . Il dit que dans un intervalle infinitésimal de temps dt , pendant lequel le corps traverse un arc infinitésimal lui aussi ds , la force peut être assumée comme constante. Alors la force tangentielle est précisément celle qui produit un mouvement non uniforme le long de la trajectoire. Ce qui veut dire que le changement de la vitesse est dû uniquement à F_T et voilà pourquoi le premier principe 6.11 appliqué à l'incrément infinitésimal de la vitesse dv acquis après le temps dt donne :

$$F_T dt = -dv \quad (6.13)$$

Si maintenant pendant l'instant dt le corps est accéléré par une force constante, l'on peut considérer le départ de la tangente du corps après le temps dt comme une chute galiléenne et l'on obtient d'après le deuxième principe général comme expression du parcours dx :

$$\frac{2d\alpha}{F} = dt^2 = \frac{ds^2}{v^2} \quad (6.14)$$

d'où s'ensuit :

$$d\alpha = \frac{ds^2 F}{2v^2} \quad (6.15)$$

Le deuxième côté du triangle infinitésimal $d\beta$ donne d'une façon analogue :

$$d\beta = \frac{ds^2}{2\rho} \quad (6.16)$$

mais en identifiant la trajectoire à chaque point par le cercle de courbure. Dans ce triangle infinitésimal, on a par construction :

$$\frac{F}{F_N} = \frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{F\rho}{v^2} \quad (6.17)$$

comme le dit l'expression 6.9.

HERMANN introduit la définition de la force centrale : une force est dite centrale si la décomposition en composante tangentielle et composante normale répond à la relation :

$$\frac{F_T}{F_N} = \frac{\text{soustangente au point } N}{\text{normale à la tangente en } N} \quad (6.18)$$

Après des considérations sur les triangles infinitésimaux formés, l'un par les deux rayons vecteurs reliant le centre de courbure à deux positions voisines du mobile sur la trajectoire, l'autre par les lignes tangentes à ses deux positions ainsi que par la perpendiculaire à la ligne tangente passant par la position initiale du mobile et le centre de force ayant une longueur égale à p .

En divisant les expressions 6.10 et 6.9, on obtient alors :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{F_T ds}{F_N \rho} \quad (6.19)$$

Or le rapport se trouvant du côté gauche de cette équation est déterminé par HERMANN suite aux considérations sur les triangles infinitésimaux comme étant égal à dp/p . Il parvient alors à l'expression :

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p} \quad (6.20)$$

qu'il intègre pour obtenir :

$$pv = 2k \quad (6.21)$$

Cette relation est équivalente au résultat newtonien :

$$dA = kdt \quad (6.22)$$

dA étant l'aire infinitésimale parcourue par le rayon vecteur et est proportionnelle au temps.

En effet :

$$pv = p \frac{ds}{dt} = \frac{2dA}{dt} \quad (6.23)$$

On doit constater que la démonstration de NEWTON et de HERMANN de la deuxième loi de KEPLER sont foncièrement différentes l'une de l'autre. Si

NEWTON utilise un procédé de détermination de la limite, basé sur la méthode synthétique des fluxions, HERMANN bâtit sa démonstration sur des équations différentielles du mouvement. La méthode newtonienne donne une grande rigueur à son argumentation, qui fait penser à ARCHIMÈDE et sa méthode d'exhaustion, mais elle est en fait très innovatrice et fait référence implicitement aux acquis des sciences mathématiques pendant le XVII^e siècle. Néanmoins elle est indépendante de l'algorithme de sa méthode analytique des fluxions et peut donc être comprise aussi par un mathématicien ne comprenant rien aux nouvelles techniques analytiques. L'approche de HERMANN par contre fait référence au schéma conceptuel de la méthode leibnizienne même s'il n'utilise pas les symboles différentiels de celui-ci. HERMANN représente la trajectoire localement en termes infiniment petits ; les quantités finies exprimant les forces sont alors transformées en forme de quotients des termes infiniment petits. Ce procédé débouche sur la formulation d'équations différentielles, qui peuvent être manipulées algébriquement et ensuite intégrées, donnant une expression finie. La géométrie des infinitésimaux devient ainsi une méthode pour trouver les équations différentielles d'un problème.

—III—

LE MÊME PROGRAMME DE RECHERCHE en vue de la transcription analytique des «PRINCIPIA» fut poursuivi aussi à Paris au sein de l'Académie Royale des Sciences, et dont la figure principale fut sans doute Pierre VARIGNON, professeur au Collège Mazarin à Paris puis au Collège Royal et membre de l'Académie des Sciences. Après avoir assimilé assez rapidement les principaux éléments du calcul leibnizien, il va s'attacher dans les dernières années du XVII^e siècle et les premières du XVIII^e, à reprendre dans l'esprit de ce nouveau calcul, l'étude du mouvement. Il construit ainsi l'algorithme de la cinématique, le premier algorithme appartenant au champ spécifique de la physique mathématique.

C'est dans deux Mémoires, lus aux séances de l'Académie Royale des Sciences, respectivement le 5 juillet et le 6 septembre 1698, que VARIGNON va donner à la science du mouvement par l'élaboration du concept de «*Vitesse dans chaque instant*» un nouveau point de départ à Paris. Le premier mémoire porte le titre : «*Règle générale pour toutes sortes de mouvements de vitesses quelconques variées à discrétion.*» [278]

Le travail de VARIGNON s'effectue en deux temps, le premier étant consacré à la construction du concept de «*vitesse dans chaque instant*», le deuxième, à celui de «*force accélératrice dans chaque instant*». Ce n'est qu'à l'issue de cette double construction que VARIGNON observant les formules qu'il vient de construire, en déduit l'algorithme de la cinématique.

VARIGNON parvient, en considérant la vitesse d'un corps comme uniforme pendant chaque instant de son mouvement et en mettant en œuvre les procédures du calcul des différences mises en œuvre dans le traité du Marquis

DE L'HÔPITAL : «*Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*» [261] à l'expression :

$$y = \frac{dx}{dt} \quad (6.24)$$

«... les instants seront dz , l'espace parcouru dans chaque instant, sera dx , et la vitesse avec laquelle dx aura été parcourue sera y .» [278] VARIGNON affirme alors que cette vitesse, dans chaque instant peut «être regardée comme uniforme parce que $y \pm dy \simeq y$, la notion seule des vitesses uniformes donnera $y = dx/dz$ pour la règle de tous les mouvements variés comme on voudra.» [278] Sa caractérisation de la vitesse dans chaque instant permet à VARIGNON du 5 juillet 1698 une «*Règle générale*» qui est en fait une reprise de sa définition sous trois aspects différents : les vitesses, les temps et les espaces :

$$\begin{aligned} y &= \frac{dx}{dz} \\ dz &= \frac{dx}{y} \\ dx &= ydz \end{aligned} \quad (6.25)$$

De ces trois formules, il suit bien évidemment que :

«*Quelles que soient présentement la vitesse d'un corps, l'espace parcouru, et le temps employé à le parcourir; deux de ces trois choses étant données à discrétion, il sera toujours facile de trouver la troisième par le moyen de cette règle, même dans les variations de vitesse les plus bizarres qui se puissent imaginer.*» [278]

Deux mois plus tard, le 6 septembre, VARIGNON complète cette première étude par son mémoire consacré aux mouvements suivant des trajectoires curvilignes. Il généralise le résultat obtenu en juillet, en considérant que la vitesse uniforme dans chaque instant est égale, non plus au rapport d'un segment de ligne droite infiniment petit dx à un temps infiniment petit dt , mais à celui d'un arc de courbe infiniment petit. Celui-ci est alors déterminé, à l'aide du théorème de PYTHAGORE, à deux accroissements infinitésimaux droits. VARIGNON termine son Mémoire, tout comme le premier par une série d'exemples.

Dès le début de l'année 1700, à la séance de l'Académie Royale des Sciences du 30 janvier, VARIGNON présente un mémoire [278] qui, s'appuyant sur la conceptualisation de la force accélératrice proposée par NEWTON dans le Lemme X de la section I du LIVRE PREMIER des «*PRINCIPIA*», parvient à l'expression de la «*force accélératrice dans chaque instant*», à savoir :

$$\begin{aligned} y &= \frac{ddx}{dt^2} \\ y &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (6.26)$$

En conséquence, puisque pendant l'intervalle de temps dt , la force supposée «*constante et continuellement appliquée*» engendre l'accroissement d'espace égal à ddx , l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} ddx &= ydt^2 \\ y &= \frac{ddx}{dt^2} \end{aligned} \quad (6.27)$$

soit

$$\begin{aligned} y &= \frac{ddx}{dtdt} \\ dv &= \frac{ddx}{dt} \\ y &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (6.28)$$

VARIGNON généralise ces règles également au mouvement curviligne. La mise en œuvre des règles concernant la vitesse instantanée et la force accélératrice lui permet alors de retrouver l'ensemble des résultats newtoniens concernant les forces centrales. Il énonce ce qu'il appelle les «*Règles générales des mouvements en lignes courbes*» :

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (6.29)$$

$$y = \frac{dsdds}{dxdt^2} \left(\frac{vdv}{dx} \right) \quad (6.30)$$

Ces «*Règles*» révèlent que les concepts de vitesse dans chaque instant et de force accélératrice dans chaque instant peuvent en fait être déduites l'un de l'autre par un simple calcul mettant en œuvre les algorithmes leibniziens.

VARIGNON conçoit également une formule générale donnant la solution des problèmes relatifs aux mouvements des projectiles. Il retrouve alors les résultats obtenus par NEWTON dans les trois premières sections du LIVRE II des «*PRINCIPIA*» et donne à la résolution de ces questions, comme précédemment à celles des forces centrales, une généralité et une uniformité qui transforment, à proprement parler, la science du mouvement.

VARIGNON, dans ses quatre mémoires, a non seulement retrouvé les résultats de ses grands prédécesseurs, en particulier NEWTON et LEIBNIZ, mais il y est parvenu par une méthode différente. Par la construction des concepts de vitesse dans chaque instant, puis de force accélératrice dans chaque instant, il a mis en place des algorithmes puissants, permettant effectivement de réduire pour l'essentiel, les problèmes du mouvement à des problèmes de calcul consistant dans des différentiations ou le plus souvent dans des intégrations.

En permettant à la science du mouvement de bénéficier des progrès de l'analyse, VARIGNON a définitivement rompu avec les procédures géométriques utilisées jusque là. Par le style de sa démarche, VARIGNON est un précurseur du développement immense que prendra la physique mathématique dans les XVIII^e et XI^e siècles.

-IV-

A.-C. CLAIRAUT, qui le premier résolut le problème des trois corps en 1752 en proposant une solution pour tenir compte des perturbations de la Lune, intervint de manière forte dans la transcription des «PRINCIPIA» en langage analytique. La cause en était entre autres, son amitié avec Emilie LE TONNELIER DE BRETEUIL, Marquise DU CHÂTELET. La jeune marquise eut pour précepteurs et peut-être pour prétendants des savants comme MAUPERTUIS et son cadet A.-C. CLAIRAUT, sans pour autant cacher son amour pour VOLTAIRE, loin de la cour dans le château de Cirey, situé en Champagne. Les idées de NEWTON, opposées sur le continent à celles de DESCARTES, comme nous l'avons vu dans un chapitre antérieur, trouvèrent à Cirey d'ardents propagandistes et VOLTAIRE les répandait sur le continent à travers ses *«Eléments de philosophie de NEWTON»* [165] rédigés dans les Vosges entre 1736 et 1737 et dédiés à la Marquise DU CHÂTELET. En effet, celle-ci était l'auteur, outre d'un *«Discours sur le bonheur»*, d'une *«Dissertation sur la nature du feu»* et des *«Institutions de physique»*, de la première traduction en français des «PRINCIPIA» [1] de NEWTON qui ne fut publiée posthume qu'en 1749. Elle fut accompagnée d'une *«Exposition des principaux phénomènes astronomiques tirée des Principes de NEWTON»* ainsi que d'une *«Solution analytique des principaux problèmes qui concernent le Système du Monde.»* [98] C'étaient précisément les intérêts dans la physique newtonienne de la Marquise qui sollicitèrent une collaboration étroite avec CLAIRAUT. On a été souvent jusqu'à attribuer à ce dernier tout seul la traduction de l'œuvre newtonienne ce qui reviendrait certainement à exagérer son apport à cette tâche, mais on peut être certain qu'il y a pris part dans une certaine mesure, en levant des difficultés de compréhension et en éclaircissant quelques passages plus ou moins obscurs. La question doit être plus nuancée en ce qui concerne les deux autres textes qui portent d'une façon beaucoup plus visible la griffe du grand mathématicien, même si le nom de CLAIRAUT ne figure pas sur l'ouvrage à la publication duquel il a participé et dont il fut le rapporteur pour l'Académie Royale des Sciences. Quoi qu'il en soit, l'on peut affirmer que c'est lui qui a mis la dernière main à l'ensemble, et que c'est à cette circonstance que celui-ci doit ce caractère d'achevé et de parfait avec lequel il se présente. *«On peut même admettre qu'ayant trouvé l'«Exposition» un peu à l'état d'ébauche et la «Solution analytique» tout au plus esquissée, il a mis dans ces deux textes beaucoup plus de son propre fonds que dans la traduction des «PRINCIPIA», vraisemblablement poussée assez loin*

et même terminée, non pas sans lui, mais seulement avec ses conseils et l'aide de ses remarques orales.» [158]

L'«*Exposition abrégée du Système du Monde*» est une présentation du LIVRE PREMIER et de certaines parties du LIVRE III de l'œuvre newtonienne ainsi qu'un commentaire des concepts essentiels de sa physique. Le texte ne contient pas la moindre formule et rejoint par là le mouvement anglais tentant à vulgariser NEWTON sans avoir recours aux mathématiques. Il est une sorte de transcription de l'approche essentiellement géométrique de NEWTON en langage ordinaire et qui, en plus, a parfaitement réussi. Madame DU CHÂTELET rejoint LOCKE, que DESAGULIERS, alors président de la Royal Society, consacrait le premier «*Philosophe newtonien sans l'aide de la géométrie*» [148]. LOCKE avait commencé la lecture des «PRINCIPIA» deux mois après la publication de la première édition tout en prenant des notes et la présentation de l'œuvre newtonienne dans la «*Bibliothèque Universelle*» en 1688 lui est attribuée aujourd'hui. Or, il s'aperçut bien vite que les preuves mathématiques constituaient l'essentiel de la réflexion newtonienne, mais étant incapable de les comprendre, il demanda à HUYGENS si elles étaient exactes, ce que ce dernier lui confirma. Dorénavant LOCKE, lui aussi les accepta et il défendit la philosophie newtonienne dans son «*Essay concerning Human Understanding*» [279] de 1690. Cet écrit fournissait à la nouvelle physique la théorie de la connaissance qui, avec l'exposé d'une réduction analytique des idées, convenait à une représentation discontinue de la réalité telle que préconisée par NEWTON. Ensemble avec les «PRINCIPIA», l'ouvrage de LOCKE devint le phare de toute la philosophie des Lumières.

Le texte de l'«*Exposition*» de Madame DU CHÂTELET a moins d'ambitions que celui du philosophe empiriste anglais. Il est composé de six chapitres dont les deux premiers suivent assez près la théorie exposée dans le LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» tandis que les quatre autres traitent des sujets que NEWTON expose dans le LIVRE III. Un court chapitre sur les Comètes termine l'ouvrage.

L'introduction, comprenant dix-huit paragraphes, relate une courte histoire de l'astronomie, commençant avec les Babyloniens, passant par PTOLÉMÉE et ARISTOTE pour venir à COPERNIC, Tycho BRAHE et KEPLER. Pour la Marquise : «KEPLER a non seulement trouvé ces deux lois qui ont retenu son nom, et qui dirigent toutes les planètes dans leur cours, et la courbe qu'elles décrivent, mais il avait entrevu la force qui la leur fait décrire ; on trouve les semences du pouvoir attractif dans la Préface de son Commentaire sur la planète de Mars, et il va même jusqu'à dire que le flux est l'effet de la gravité de l'eau vers la Lune ... » Malheureusement, KEPLER s'égare dans ses spéculations et n'aboutit pas. Et c'est HOOK qui, pour Emilie DU CHÂTELET, fut le premier à développer un concept valable sur la gravitation en 1674. Elle cite ses paroles : «*Alors j'expliquerai un système du monde qui diffère à plusieurs égards de tous les autres, et qui répond en tout aux règles ordinaires de la mécanique, il est fondé sur ces trois suppositions :*»

- 1° que tous les corps célestes, sans en excepter aucun, ont une attraction ou gravitation vers leur propre centre, par laquelle, non seulement ils

attirent leurs propres parties et les empêchent de s'écarter, comme nous le voyons de la Terre, mais encore ils attirent tous les autres corps célestes qui sont de la sphère de leur activité ; que par conséquent, non seulement le Soleil et la Lune ont une influence sur le corps et le mouvement de la Terre, et la Terre une influence sur le Soleil et la Lune, mais aussi que Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne ont par leur force attractive une influence considérable sur le mouvement de la Terre, comme aussi l'attraction réciproque de la Terre a une influence considérable sur le mouvement de ces planètes ;

- 2° que tous les corps qui ont reçu un mouvement simple et direct continuent à se mouvoir en ligne droite, jusqu'à ce que par quelque autre force effective, ils en soient détournés et forcés à décrire un cercle, une ellipse ou quelque autre courbe plus composée ;
- 3° que les forces attractives sont d'autant plus puissantes dans leurs opérations, que le corps sur lequel elles agissent est plus près du centre.

Si HOOK a donc formulé la loi qualitative de la gravitation universelle ainsi que la loi de l'inertie, il est incapable de donner de la première une forme quantitative et il écrit : *« Pour ce qui est de la proportion suivant laquelle ces forces diminuent à mesure que la distance augmente, j'avoue que je ne l'ai pas encore vérifiée par des expériences . . . »* Nous avons vu que cette constatation, ensemble avec sa prétention d'être l'inventeur du concept de la gravitation lui a attiré les foudres de NEWTON. Aussi Madame DU CHÂTELET se hâte de préserver la primauté de celui-ci en écrivant : *« Il ne faut pas croire que cette idée jetée au hasard dans le livre de HOOK diminue la gloire de Monsieur NEWTON . . . L'exemple de HOOK et celui de KEPLER servent à faire voir quelle distance il y a entre une vérité entrevue et une vérité démontrée, et combien les plus grandes lumières de l'esprit servent peu dans les sciences, quand elles cessent d'être guidées par la Géométrie »*. Un peu plus loin, elle tire la conclusion que *« . . . c'est en ne s'écartant jamais de la Géométrie la plus profonde, que Monsieur NEWTON a trouvé la proportion dans laquelle agit la gravité, et que le principe soupçonné par KEPLER et par HOOK, est devenu dans ses mains une source si féconde de vérités admirables et inespérées »*.

Le restant de l'Introduction est consacré à une description succincte du contenu des trois Livres des «PRINCIPIA» ainsi qu'à l'annonce que l'«*Exposition du système du Monde*» va surtout suivre les théories exposées au LIVRE III.

Le chapitre premier traite des «*Principaux Phénomènes du Système du Monde*». Il est subdivisé en 27 paragraphes qui se destinent à donner une idée abrégée du système planétaire. Après avoir énuméré les planètes principales, tout en introduisant la distinction entre planètes supérieures et planètes inférieures, les qualités physiques de ces corps célestes sont données. Suit alors une description des orbites ainsi que la constatation que les planètes suivent toutes les lois de KEPLER. Ceci étant également le cas pour les Comètes. La précession des équinoxes est mentionnée ensuite avec l'explication que NEWTON donne du phénomène dans les «PRINCIPIA», c'est-à-dire qu'il est dû à l'attraction du Soleil et de la Lune, sur la protubérance de la Terre à l'équateur.

Suit alors l'examen des planètes secondaires qui se termine avec le relevé des caractéristiques physiques et orbitales de la Lune. La différence entre son mois périodique et son mois synodique est expliquée tout comme son mouvement autour de son axe, ainsi que la libration et ses causes. Madame DU CHÂTELET termine le chapitre en renvoyant au traitement plus explicite de la Lune au dernier chapitre.

Le chapitre second cherche à montrer : « *Comment la théorie de Monsieur NEWTON explique les phénomènes des planètes principales.* » Il est un résumé des principaux sujets du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» en 47 paragraphes. Madame DU CHÂTELET s'arrête d'abord à la PROPOSITION IV de NEWTON «... que les forces centripètes des corps qui décrivent des cercles, sont entre elles comme les carrés des arcs de ces cercles parcourus en temps égal et divisés par leurs rayons ;» d'où il tire, que si les temps périodiques des corps révolvants dans des cercles sont en raison sesquiplée de leurs rayons, la force centripète qui les porte vers le centre de ces cercles, est en raison réciproque des carrés de ces mêmes rayons, c'est-à-dire des distances de ces corps au centre : or, par la seconde règle de KEPLER, que toutes les planètes observent, les temps de leurs révolutions sont entre eux en raison sesquiplée de leurs distances à leur centre, donc la force qui porte les planètes vers le Soleil décroît en raison inverse du carré de leurs distances à cet astre, en supposant qu'elles tournent dans des cercles concentriques au Soleil.

NEWTON élargit alors ses investigations et il établit dans la PROPOSITION XI que la force centripète nécessaire pour faire décrire une ellipse aux planètes doit suivre la proportion inverse du carré des distances du corps au foyer de cette courbe.

Madame DU CHÂTELET décrit alors que : « *Monsieur NEWTON ne s'est pas contenté d'examiner la loi qui fait décrire des ellipses aux planètes, mais il a examiné si cette même loi ne pouvait pas faire décrire d'autres courbes aux corps et il a trouvé dans le **Corollaire** I de la PROPOSITION XIII qu'elle ne leur ferait jamais décrire qu'une des sections coniques dont le centre des forces serait le foyer, et cela quelque fut la vitesse projectile.* » Et elle conclut que « *Monsieur NEWTON a non seulement trouvé la loi que suit la force centripète dans notre système planétaire, mais il a fait voir qu'une autre loi ne pouvait avoir lieu dans notre monde tel qu'il est.* »

Suit alors une description de la manière de déterminer l'orbe d'une planète en supposant la loi de la force centripète donnée, ainsi qu'une réflexion sur la conservation du mouvement des planètes malgré la résistance du milieu dans lequel elles se meuvent. L'auteur se réfère à la PROPOSITION X du LIVRE III des «PRINCIPIA» qui évalue cette résistance comme étant si petite qu'elle peut être regardée comme nulle. La loi de l'attraction newtonienne est ensuite extrapolée aux satellites des planètes principales ainsi qu'à la Lune. Après avoir relié la loi de la chute des corps découverte par GALILEI à la force attractive de la Terre, Madame DU CHÂTELET conclut en exposant le raisonnement de NEWTON pour affirmer la gravitation mutuelle de tous les corps célestes par les phrases suivantes : « *Puisqu'il est prouvé par les observations et par l'induction*

que toutes les planètes ont la force attractive en raison inverse du carré des distances, et par la seconde loi du mouvement l'action est toujours égale à la réaction, on doit conclure, avec Monsieur NEWTON, que toutes les planètes gravitent les unes vers les autres, et que de même que le Soleil attire les planètes, il est réciproquement attiré par elles ; car puisque la Terre, Jupiter et Saturne agissent sur leurs satellites en raison inverse du carré des distances, il n'y a aucune raison qui puisse faire croire que cette action ne s'exerce pas à toutes les distances dans la même proportion ; ... »

Si Madame DU CHÂTELET a parlé jusqu'ici uniquement du terme du carré des distances inverses, elle introduit maintenant la proportionnalité avec le produit des masses de deux corps en interaction dans la loi de la gravitation, ceci en relation avec la question pourquoi un corps tourne autour d'un deuxième plutôt que le contraire. Elle se pose alors la question comment connaître la masse des différentes planètes et se réfère à NEWTON et à ses PROPOSITIONS LXXIV à LXXVI du LIVRE PREMIER que CHANDRASEKHAR [121] a nommé les «*théorèmes superbes*». Il s'agit des propositions où NEWTON démontre que l'attraction d'un corps est identique à celle d'un point matériel possédant la même masse. La conclusion devient alors que les planètes les plus petites et les plus denses sont les plus voisines du Soleil : «*Monsieur NEWTON tire de là la raison de l'arrangement des corps célestes de notre système planétaire, qui est tel que le requérait la densité de leur matière.*»

Madame DU CHÂTELET termine le chapitre par des considérations sur les conséquences du principe de la gravitation universelle ; elle effleure la théorie des trois corps exposée dans la fameuse PROPOSITION LXVI avec ses vingt-deux corollaires et termine par l'argument newtonien que le repos sensible des aphélies des planètes principales est une preuve que l'attraction agit en raison doublée inverse des distances, conclusion à laquelle celui-ci était parvenu dans la PROPOSITION XLV du LIVRE PREMIER des «*PRINCIPIA*».

Le troisième chapitre de l'«*Exposition*» qui a pour titre : «*De la détermination de la figure de la Terre, selon les principes de Monsieur NEWTON*» porte, plus que le restant du texte, la griffe de CLAIRAUT qui est cité d'ailleurs abondamment. La question de la forme du globe terrestre était devenue primordiale parmi les savants aux XVII^e et XVIII^e siècles et constituait une preuve indirecte pour la validité de la théorie de la gravitation newtonienne [280]. Le chapitre, formé de dix-neuf paragraphes, expose d'abord la méthode newtonienne pour trouver la figure de la Terre et donne les résultats de NEWTON fondés sur son principe de la gravitation et la gravité mutuelle des parties de la matière. Il relate alors l'histoire des mesures prises en France qui avaient jeté un doute sur la forme du globe terrestre en optant plutôt pour les idées cartésiennes, doute levé plus tard en conséquence des résultats obtenus par les campagnes de mesures au cercle polaire et au Pérou : «*... les mesures des Académiciens Français ont justifié la théorie de Monsieur NEWTON sur la figure de la Terre, dont l'aplatissement vers les pôles est à présent généralement reconnu.*»

Madame DU CHÂTELET vient alors à parler de l'hypothèse principale sous-

jacente aux calculs : celle de l'homogénéité de la matière de la Terre. CLAIRAUT dans son livre sur la théorie de la figure de la Terre [157] avait poussé plus loin et avait envisagé aussi le cas non homogène. Or cette hypothèse mena à un désaccord entre les calculs et l'observation de la pesanteur à l'équateur à l'aide de la période d'oscillation des pendules. *«Le ralentissement de ces oscillations prouve la diminution de la pesanteur, et leur accélération prouve que la gravité agit plus fortement, or on sait, que la vitesse des oscillations des pendules est en raison inverse de la longueur du fil auquel ils sont suspendus; donc lorsque pour rendre les vibrations d'un pendule dans une région, isochrones à ces vibrations dans une autre, il faut le raccourcir ou l'allonger, on doit conclure que la pesanteur est moindre ou plus grande dans cette région que dans l'autre : on connaît depuis Monsieur HUYGENS le rapport qui est entre la quantité dont on allonge ou raccourcit le pendule, et la diminution ou l'augmentation de la gravité ... »* Le chapitre se termine avec l'exposé des différentes propositions des «PRINCIPIA» ayant trait à la question.

Le chapitre suivant, composé de dix-sept paragraphes, traite de la théorie newtonienne de la précession des équinoxes. En effet, *«... les points équinoxiaux changent en même temps et de la même quantité que les pôles du monde, et c'est ce mouvement des points équinoxiaux qui s'appelle la précession des équinoxes»*. Madame DU CHÂTELET expose alors la théorie newtonienne pour expliquer ce phénomène et qui est donnée dans la PROPOSITION XXXIX du LIVRE III. NEWTON explique que celui-ci provient du fait de l'attraction réunie du Soleil et de la Lune sur la protubérance de la Terre à l'équateur. Le restant du chapitre relate les calculs que NEWTON a faits en vue de parvenir à son résultat, c'est-à-dire que les points équinoxiaux après une révolution entière de la Terre s'éloignent de 51" du lieu occupé précédemment. Les différents pas de la réflexion newtonienne sont énumérés avec les références aux différents théorèmes énoncés dans le LIVRE PREMIER et le LIVRE III des «PRINCIPIA».

Le chapitre cinq — *«Du flux et reflux de la mer»* — est composé de deux parties. Il y a d'abord trente-trois paragraphes traitant le sujet annoncé dans le titre à la manière du chapitre précédent qui est suivi par une deuxième partie : *«Comment Monsieur NEWTON explique les Phénomènes des planètes secondaires et principalement ceux de la Lune»*, composée de vingt-deux paragraphes. Nous allons, dans ce qui suit, décrire surtout ce texte qui est principalement consacré à la théorie de la Lune de NEWTON. Après une introduction générale sur les planètes secondaires, l'auteur situe cette théorie comme étant le problème des trois corps. Sont passés ensuite les différentes inégalités et leurs calculs : la variation, le mouvement des nœuds variant avec le parcours de notre satellite ainsi que leur mouvement moyen, ainsi que l'inclinaison de l'orbite.

Madame DU CHÂTELET n'omet pas de mettre le doigt sur les points faibles de la théorie newtonienne quand elle écrit : *«Dans l'examen des premières inégalités, quoique le lecteur ne soit pas extrêmement satisfait à cause de quelques suppositions et de quelques abstractions faites pour rendre le problème plus facile, il a du moins cet avantage, qu'il voit la route de l'Auteur et qu'il acquiert de nouveaux principes avec lesquels il peut se flatter d'aller plus loin. Mais*

quant à ce qui regarde le mouvement de l'apogée et la variation de l'excentricité, et toutes les autres inégalités du mouvement de la Lune, Monsieur NEWTON se contente des résultats qui conviennent aux astronomes pour construire des tables du mouvement de la Lune, et il assure que sa théorie de la gravité l'a conduit à ces résultats.»

L'auteur connaît très bien, et ne serait-ce qu'à travers CLAIRAUT, la plus grande déficience de la théorie newtonienne et qui est le calcul du mouvement de l'apogée. Et elle résume dans le dernier paragraphe la situation quand elle écrit : «*Si donc la force perturbatrice du Soleil se trouvait dépendre de la seule distance de la Lune à la Terre, on irait tout de suite à la théorie du mouvement des apsides de la Lune, par cette seule proposition : mais comme il entre dans l'expression de cette force l'élongation ou distance de la Lune au Soleil, et qu'outre cela il n'y a qu'une seule partie de la force perturbatrice du Soleil qui agisse suivant la distance de la Lune, on ne peut sans des artifices nouveaux et peut être aussi difficiles à trouver que la détermination entière de l'orbite de la Lune, employer la proposition de Monsieur NEWTON sur les apsides en général au cas de la Lune ...* » C'est l'abandon pur et simple de l'approche newtonienne, qui est encore soulignée par la dernière remarque du paragraphe que : «*... les plus grands géomètres de ce siècle ont abandonné la route battue jusqu'à présent par les commentateurs de Monsieur NEWTON, et ont cru qu'ils arriveraient plus tôt au but en reprenant tout le travail dès sa première origine ... la méthode analytique qu'ils suivent paraît la seule qui puisse vraiment satisfaire dans une recherche de cette nature.*»

On peut penser que cette présentation de l'«*Exposition abrégée*» était trop détaillée. Or elle est l'exposition la plus complète et la plus fine de la théorie de NEWTON vers le milieu du XVIII^e siècle et faisait référence en vue de la victoire de la théorie newtonienne au siècle des Lumières sur le Continent.

Le deuxième écrit de la Marquise annexé à sa traduction des «PRINCIPIA» [1] : «*Solution analytique des principaux problèmes qui concernent le système du monde*» n'est pas expositoire mais traduit les raisonnements géométriques newtoniens dans le langage de l'analyse leibnizienne et suit donc de très près les efforts de l'école de Bâle autour des BERNOULLI poursuivant le même but. La section première de cet écrit, ayant comme sujet la description «*des trajectoires dans toutes sortes d'hypothèses de pesanteur*», suit d'assez près le LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» tout comme il est le cas pour la section II : «*De l'attraction des Corps en ayant égard à leurs figures*». La section III, très courte, explique la réfraction de la lumière en employant le principe de l'attraction. La section IV : «*De la figure de la Terre*» reflète très clairement des intérêts scientifiques de CLAIRAUT et il se peut fort bien qu'il eût été rédigé par lui [280]. Le texte se termine par un court chapitre formant la section V intitulé «*Des Marées*».

Afin de pouvoir apprécier l'approche analytique de Madame DU CHÂTELET, nous nous pencherons dans ce qui suit, sur divers problèmes soulevés par elle.

La section première débute par la deuxième loi de KEPLER, tout comme NEWTON fait commencer le premier livre des «PRINCIPIA» par la même propo-

sition. Madame DU CHÂTELET exploite alors différentes conséquences de cette loi de KEPLER avant de formuler le problème général de «*Trouver l'expression de la force centripète dans l'ellipse, en prenant un des foyers pour centre de forces*» qui correspond à la PROPOSITION XI, Problème VI de la troisième section du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA». En comparant la solution analytique de l'auteur à celle newtonienne géométrique, celle-ci est élégante. En effet, la Marquise introduit l'équation polaire de l'ellipse par rapport au foyer qui est :

$$dx = \frac{b dy}{y \sqrt{2ay - y^2 - b^2}} \quad (6.31)$$

où a est le grand axe de l'ellipse et b son petit axe, y étant la distance du foyer à un point de la courbe et dx la projection d'un élément d'arc sur l'axe des x . A partir de cette expression, elle arrive, après quelques transformations algébriques à l'expression générale de la force centripète :

$$\frac{a}{b^2 y^2} \quad (6.32)$$

La force centripète agit donc en raison inverse du carré de la distance au centre des forces.

La troisième loi de KEPLER découle alors tout naturellement des résultats acquis. La PROPOSITION VII, **Théorème V** dit : «*Les temps périodiques dans deux courbes différentes sont entre eux comme les racines carrées des cubes des moyennes distances au centre, lorsque l'intensité des forces est la même*». Elle est précisément l'expression de cette troisième loi de KEPLER.

Sur la base des résultats acquis, sont ensuite passées en revue les autres trajectoires possibles pour la même loi d'attraction suivant la raison inverse des carrés des distances. Pour le cas de l'hyperbole ayant une équation polaire de la forme :

$$dx = \frac{b dy}{y \sqrt{2ay + y^2 - b^2}} \quad (6.33)$$

l'expression de la force centripète, devient tout comme dans le cas de l'ellipse égale à

$$\frac{a}{b^2 y^2} \quad (6.34)$$

Dans le cas d'une trajectoire parabolique, l'équation polaire, pour le foyer, a la forme

$$dx = \frac{c dy}{y \sqrt{cy - c^2}} \quad (6.35)$$

avec c la distance de l'origine du système de coordonnées au foyer. L'expression générale de la force centripète à un point quelconque d'une parabole devient égale à :

$$\frac{1}{cy^2} \quad (6.36)$$

et est encore en raison renversée du carré de la distance.

La PROPOSITION XII, Problème VIII : «*Trouver la courbe que le corps décrira en supposant $Y = n/y^2$* », aborde le fameux problème inverse déjà attaqué par J. BERNOULLI. Madame DU CHÂTELET montre que :

$$\int Y dy = \frac{\int n dy}{y^2} = -\frac{n}{y} \quad (6.37)$$

et l'équation générale devient alors :

$$dx = \frac{dy}{y \sqrt{\frac{2By^2 + 2ay}{l^2 f^2} - 1}} \quad (6.38)$$

Finalement l'équation générale de toutes les trajectoires qui peuvent être décrites, lorsque la force centripète agit en raison inverse du carré des distances, a la forme :

$$dx = \frac{dy}{y \sqrt{\frac{(K-h)y^2 + h^2 y}{Kl^2} - 1}} \quad (6.39)$$

La PROPOSITION XIII, **Théorème** VI suivante fait alors la réduction générale 6.39 aux équations des sections coniques et ceci en fonction des paramètres h et K . Le raisonnement adopté par l'auteur est le suivant : «*On peut supposer $h >, =$ ou $< K$; dans le premier cas, le terme $(K - h)y^2$ deviendra négatif, et alors l'équation exprimera une ellipse dont le grand axe sera $h^2/(h - K)$, et le petit axe $2e\sqrt{K}/\sqrt{h - K}$; dans le second, le terme $(K - h)y^2$ sera zéro, et alors l'équation exprimera une parabole dont le paramètre sera $4ke^2/h^2$; dans le troisième enfin, $(K - h)y^2$ sera positif, et l'équation exprime alors une hyperbole dont le grand axe sera $h^2/(K - h)$ et dont le petit axe sera égal à $2e\sqrt{K}/\sqrt{K - h}$.*»

La conclusion des investigations dans les PROPOSITIONS X à XIII est condensée dans un scholie qui représente pour l'auteur également son dernier mot sur le problème inverse : «*On voit par ces trois suppositions de $h >, =$ ou $< K$ qui sont les trois cas possibles, que lorsque la force agit en raison inverse du carré des distances, les trajectoires ne peuvent être que des sections coniques, ayant le centre des forces dans un foyer quelle que soit la force projectile.*»

Suit alors la présentation d'autres lois de l'attraction. La PROPOSITION XIV examine le cas d'une force attractive égale à $Y = ny$ tandis que les propositions suivantes rétrécissent cette question au cas où cette force centripète est dirigée vers le centre de l'ellipse. Madame DU CHÂTELET suit assez étroitement l'exposition de NEWTON, tout en traduisant celle-ci en langage analytique. Si NEWTON emploie pour ces différents cas la même approche géométrique, elle part d'une même formule 6.39 et de ses transformations algébriques.

La PROPOSITION XVII, Problème X introduit une loi cubique pour la force gravitationnelle sous la forme $Y = n/y^3$. Mention est faite, tout comme chez J. BERNOULLI, d'une trajectoire sous forme d'une spirale logarithmique et l'auteur se réfère explicitement au **Corollaire** III de la PROPOSITION XLI du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA».

La proposition suivante examine le cas d'une loi gravitationnelle composée de deux termes, le premier représentant la gravitation newtonienne, le deuxième étant une force inversement proportionnelle au cube des distances exprimée par mn/y^3 . Madame DU CHÂTELET arrive à l'expression suivante pour la trajectoire du corps soumis à la loi gravitationnelle en deux termes :

$$dx = \frac{\frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{mh^3}{2l^2 K(h+m)}}}}{y \sqrt{\frac{2K(h+m) - 2h^2 - mh}{2Kl^2(h+m) - mh^3} y^2 + \frac{2h^3 y}{2Kl^2(m+h) - mh^3} - 1}} \quad (6.40)$$

Cette équation peut être comparée avec l'équation précédente 6.39 donnant l'expression polaire des sections coniques à l'exception du coefficient de dy , lequel apprend seulement que l'équation 6.40 exprime une section conique dont on augmente ou diminue les angles en raison constante, et on construira ainsi cette trajectoire. L'auteur se réfère explicitement à la démonstration des PROPOSITIONS XLIV et XLV de la section IX du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» qui traite du mouvement des apsides. Elle a parfaitement compris le mécanisme géométrique représenté par l'équation 6.40. *«Cette construction s'exécutera en supposant simplement un mouvement angulaire dans les apsides de cette section conique, que ce soit de la quantité que donnera le coefficient de dy et qui se fera dans le même sens que le mouvement du corps ou en sens contraire ... du côté opposé ... selon que la quantité qui est sous le signe du coefficient de dy sera plus grand ou plus petit que un.»*

Il reste à remarquer que CLAIRAUT, comme nous l'avons vu dans ce qui précède, avait opté dans ses premiers travaux pour une loi de la gravitation à deux termes en vue d'expliquer le mouvement de la ligne des apsides de la Lune. Il aurait très bien pu conduire la main de son amie lors de la rédaction de la PROPOSITION XXI, Problème XI ainsi que des propositions suivantes.

La section II de la «*Solution analytique ...*» traite, dans sa première partie : «*De l'attraction des Corps sphériques : théorèmes superbes*». La Marquise suit d'assez près l'exposé newtonien. Ainsi la PROPOSITION III, Problème III : «*Trouver l'attraction de la surface sphérique entière ACB sur le corpuscule P, en supposant que toutes ses parties l'attirent par une force qui agisse en raison inverse du carré de la distance*» correspond à la PROPOSITION LXXI, **Théorème XXXI** du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA» qui stipule : «*La même loi d'attraction étant posée, un corpuscule, placé en dehors de la surface sphérique, est attiré par cette surface en raison renversée du carré de la distance de ce corpuscule au centre.*» [1] La démonstration dans la «*Solution analytique ...*» se réduit à un simple calcul à partir de la formule générale introduite dans la PROPOSITION I tandis que NEWTON donne une preuve géométrique

nettement plus longue. Les conclusions de Madame DU CHÂTELET sont données au **Corollaire** II suivant la PROPOSITION III et le scholie. La première dit que «*Dans cette hypothèse de l'attraction réciproquement proportionnelle au carré de la distance, deux sphères s'attirent de même que si leurs masses étaient réunies à leur centre*» tandis que le scholie statue que : «*On voit par l'expression de la sphère solide totale, que dans l'hypothèse en raison inverse du carré de la distance, il en est des sphères entières comme de leurs plus petites parties, et qu'elles attirent de même que ces parties en raison de la masse divisée par le carré de la distance.*»

Après avoir obtenu ce résultat important pour la théorie newtonienne de la gravitation, l'auteur analyse d'autres cas avec des forces agissant en raison de la simple distance ou en raison renversée de la quatrième puissance pour généraliser ensuite les résultats à des forces agissant comme une puissance quelconque de la distance. La PROPOSITION VII, Problème VII finalement démontre que dans le cas de la loi d'attraction suivant le carré inverse des distances, un corps placé dans l'intérieur d'une sphère creuse n'éprouve aucune attraction.

La seconde partie de la Section II traite «*De l'attraction des Corps de figure quelconque*» et suit elle aussi de près les développements newtoniens dans ses PROPOSITIONS XC à XCIII. Tout comme chez celui-ci, Madame DU CHÂTELET traite de l'attraction d'un cercle sur un corps qui répond perpendiculairement à son centre, de l'attraction d'un solide produit par la révolution d'une courbe quelconque autour de son axe, sur un corpuscule placé sur cet axe ainsi que de différents cas d'attraction d'un cylindre sur un point à l'extérieur de celui-ci et sous l'hypothèse de différentes forces attractives.

La troisième partie s'intéresse à l'«*attraction des sphéroïdes en particulier*» et se réfère aussi bien à certaines investigations newtoniennes qu'aux intérêts de A.-C. CLAIRAUT [157] dans son livre de 1743. Elle est très courte et contient la seule PROPOSITION XVII, Problème XVII qui demande de «*Trouver l'attraction qu'un sphéroïde BMO exerce sur un corpuscule A placé sur son axe de révolution dans l'hypothèse que ses parties attirent en raison renversée du carré de la distance*». Avec f étant la distance du point attiré par le sphéroïde au point le plus proche de celui-ci, a le demi-axe du corps, x la distance sur l'axe à la partie d'épaisseur infinitésimale considérée comme variable, y le rayon de cette partie et b le rayon de l'équateur, l'auteur arrive à l'expression suivante pour la force attractive sur le corpuscule A :

$$F = \frac{c}{r} \left[-\frac{2ab}{g^2} + \left(\frac{af}{g} - \frac{ha^3}{g^3} \right) L \frac{-\frac{ha^2}{g^2} - 2a + \frac{a}{g}(f - 2a)}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2} - \frac{h^2a^4}{g^4}}} - \left(\frac{af}{g} - \frac{ha^3}{g^3} \right) L \frac{\frac{ha^2}{g^2} - \frac{af}{g}}{\sqrt{\frac{a^2f^2}{g^2} - \frac{h^2a^4}{g^4}}} \right] \quad (6.41)$$

C'est une traction dans le sphéroïde entier lorsque $b^2/a^2 < 1$ ou que $b < a$,

c'est-à-dire lorsqu'il est allongé; c est la constante de la force attractive c/y^2 et g est l'attraction terrestre.

La Section III qui tend une «*Explication de la réfraction de la Lumière, en employant le principe de l'attraction*» suit la XIV^e et la dernière section du LIVRE PREMIER des «*PRINCIPIA*» dans laquelle NEWTON remarque que : «*On peut appliquer ces recherches sur l'attraction à la réflexion de la lumière et à sa réfraction qui se fait comme SUELLIUS l'a découvert, en raison donnée des sécantes, et par conséquent en raison donnée des sinus, ainsi que DESCARTES l'a fait voir.*» [1] Dans ses considérations, NEWTON refuse à se fixer sur la vraie nature des rayons lumineux, mais se contente de déterminer les trajectoires de corps attirés qui ressemblent aux trajectoires de rayons lumineux.

Madame DU CHÂTELET amplifie dans son texte les réflexions newtoniennes tout en se référant très explicitement à DESCARTES pour condenser la théorie newtonienne en un problème et un corollaire. Elle condense celle-ci en la formule pour les trajectoires des particules de lumière :

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{m^2} - 1 + \frac{2\langle b \rangle - 2\langle x \rangle}{m^2 f^2}}} \quad (6.42)$$

en prenant $\langle x \rangle = \int x dx$ avec une expression similaire pour $\langle b \rangle$. La formule 6.42 est identique aux formules pour les trajectoires de corps attirés par la loi de la gravitation universelle.

La section IV est consacrée à la figure de la Terre et la première partie traite de l'équilibre des fluides dans toutes sortes d'hypothèses de gravité. NEWTON avait formulé l'hypothèse que «*... la gravité vers une planète quelconque, considérée à part, est réciproque comme le carré de la distance au centre de cette planète : et que par conséquent la gravité dans toutes les planètes est proportionnelle à leur quantité de matière.*» [1] Sa théorie de la figure de la Terre est basée sur cette hypothèse et il avance que c'est la protubérance à l'équateur qui est la conséquence principale de l'action de la rotation terrestre. NEWTON rappelle dans la PROPOSITION XVIII, **Théorème XVI** que «*Les axes des planètes sont plus petits que les rayons de leurs équateurs.*» [1] Il explique, que «*... si la matière dont elles sont composées était fluide, son élévation vers l'équateur augmenterait le diamètre de ce cercle et son abaissement vers les pôles diminuerait l'axe.*» [1] NEWTON a donc introduit le concept de masse fluide dont serait composé l'ensemble des planètes, concept repris par CLAIRAUT et formulé de la façon suivante par Madame DU CHÂTELET : «*Une masse fluide ne saurait être en équilibre, que lorsque les efforts de toutes les parties comprises dans un canal de figure quelconque, qu'on suppose traverser cette masse, se détruisent mutuellement.*» Ce principe est ensuite amplement discuté par l'auteur qui formule plusieurs hypothèses de pesanteur dans lesquelles un fluide peut être en équilibre. Sont distingués les cas, lorsque les parties du fluide ne tendent que vers un seul centre ; lorsque les parties du fluide tendent vers plusieurs centres ; lorsque la gravité est le résultat de l'attraction de toutes les parties d'un corps central de figure quelconque ; lorsque la pesanteur est l'effet de l'attraction de

toutes les parties du sphéroïde ou de l'anneau ; lorsque la gravité ne résulte que de l'attraction des parties du fluide même, sans considérer celle du noyau ; lorsque le noyau solide est composé de couches de densités différentes. Après avoir reconnu qu'une des hypothèses de gravité examinées n'a rien de contraire à l'équilibre des fluides, Madame DU CHÂTELET indique comment on trouve la figure que doit avoir une planète dont le temps de la rotation est donné. Une formule générale est établie pour le sphéroïde et il est montré que, même dans le cas d'une loi d'attraction différente de celle de NEWTON, pourvu que celle-ci tend vers le centre, le rapport des axes ne serait pas sensiblement plus grand que celui de 578 à 577. Or CLAIRAUT avait montré dans la «*Théorie de la Figure de la Terre*» [157] que toutes les hypothèses de pesanteur où la force tendrait vers le centre de la Terre, devraient être exclues, quelle que fût la loi de cette tendance, puisque les observations ont appris que l'aplatissement de la Terre est plus considérable que celui d'un sphéroïde dont les axes seraient entre eux comme 578 à 577.

La seconde partie de la Section IV donne alors une «*théorie de la figure de la Terre, en supposant que la gravité soit le résultat des attractions de toutes les parties de la Terre*». Elle est composée de seize propositions, de plusieurs corollaires et de quatre scholies. Elle aboutit au théorème de CLAIRAUT [124] qui est vrai sous des conditions assez générales remplies pour le cas de la Terre. L'aplatissement de la Terre doit être compris entre les valeurs limites $f = 1/230$ (NEWTON) et $f = 1/578$ (HUYGENS) si elle était homogène. CLAIRAUT, vu les mesures empiriques dont il disposait, conclut à la présence de couches elliptiques de densités différentes. Avec :

$$\alpha = \frac{g_{\text{pôle}} - g_{\text{équateur}}}{g_{\text{pôle}}} \quad (6.43)$$

il trouve que :

$$\left(\frac{1}{230} - f \right) = \left(\alpha - \frac{1}{230} \right) \quad (6.44)$$

où f représente l'aplatissement et α l'aplatissement dynamique, la valeur $1/230$ est déterminée par le rayon, la masse et la vitesse de rotation de la Terre. [281]

Le traité de Madame DU CHÂTELET se termine par une cinquième Section : «*Des Marées*» qui expose les théories de NEWTON et de J. BERNOULLI et qui cherche à faire la synthèse des idées de ces deux savants.

Le traité d'Émilie, Marquise DU CHÂTELET, constitue sans doute une œuvre majeure dans cette vaste entreprise de convertir l'œuvre newtonienne au nouveau calcul symbolique de LEIBNIZ et se positionne avantageusement parmi les approches initiées par les BERNOULLI, HERMANN et VARIGNON avant d'être conclues par EULER avec ses deux traités de mécanique ainsi que par CLAIRAUT, D'ALEMBERT et LAGRANGE. Cette œuvre rend compte comme à Paris, au milieu du XVIII^e siècle, les «*PRINCIPIA*» furent lus en termes d'analyse mathématique.

6.1.2 Leonard Euler — Éléments d'une biographie

L'AUTEUR d'une très informative histoire des Mathématiques, J.-E. HOFFMANN, caractérise L. EULER de la façon suivante : «EULER est une des personnalités les plus étonnantes du XVIII^e siècle. Admiré des uns comme le plus grand Maître de l'Europe qui a marqué profondément le Siècle des Mathématiques, calomnié des autres qui ne voulaient voir en lui qu'une machine à calculer vivante et se moquaient de ses étranges convictions philosophiques.» [282]

Leonard EULER était un des savants les plus prolifiques qui ont jamais vécu. A sa mort en 1783, il laissa une œuvre immense : des manuels traitant des différents domaines des mathématiques et de leurs applications, dans la mécanique, l'astronomie et les sciences de l'ingénieur ; des centaines d'articles scientifiques publiés dans les recueils des Académies de St-Petersbourg et de Berlin, ainsi que de nombreux manuscrits prêts pour la publication. A ces travaux, il faut encore joindre une correspondance étendue avec d'autres savants mais aussi avec Frédéric II Roi de Prusse ainsi qu'avec les monarques russes.

Les villes de Bâle, St-Petersbourg et Berlin sont les points fixes géographiques entre lesquels la vie d'EULER était organisée. La ville de Bâle, déjà longtemps connue pour être un centre de l'humanisme, devint dans la deuxième moitié du XVII^e siècle également un centre des mathématiques, grâce aux Jacques et Jean BERNOULLI, fondateurs de cette école qui, comme nous l'avons vu, se consacrait à la transcription des théories newtoniennes dans le langage de l'analyse leibnizienne. EULER est très vite devenu la figure de proue de ce programme de recherche qui monopolisa la science mathématique pendant tout le XVIII^e siècle. Mais EULER symbolisait également les prétentions des académies de Berlin et de St-Petersbourg et qui étaient d'égaler, sinon de dépasser en renommée scientifique l'Académie Royale de Paris et la Royal Society à Londres. Il était un cosmopolite convaincu, qui a vécu ses vingt premières années dans sa ville natale, pour travailler plus de trente ans à St-Petersbourg et 25 ans à Berlin. Comme savant, il arrivait à une popularité et une célébrité telles que seuls de rares personnalités scientifiques comme GALILEI, NEWTON ou EINSTEIN ont atteintes également. Son biographe E.-A. FELLMANN [283] caractérise de la façon suivante les prémices du succès scientifique d'EULER : il avait une mémoire fantastique et sans failles qui se manifestait aussi bien dans les domaines littéraire que mathématique. Cette faculté de mémorisation allait de pair avec un pouvoir de concentration exceptionnel qui lui permettait de travailler malgré le bruit ou les activités familiales dans son grand ménage. Finalement le «mystère EULER» est surtout dû à un travail continu, constant et tranquille.

Leonard EULER est né le 15 avril 1707 à Bâle. Son père fut Paulus EULER, pasteur de l'Eglise évangéliste réformée dans le village de Rischen ; sa mère s'appelait Margaretha BRUCKER. Son père était amateur de sciences, il avait suivi les cours de Jacques BERNOULLI à l'université de Bâle et avait soutenu en 1688 chez celui-ci une thèse sur «les proportions et les relations» [284]. Le

jeune L. EULER reçut les premières leçons de mathématiques par ce père qui se servait des traités de RUDOLPH et de STIEFEL, mais qui nonobstant destinait son fils à une carrière ecclésiastique. Celui-ci céda à la volonté paternelle et entreprit des études de théologie ainsi que de grec ancien et d'hébreu à l'université de Bâle où il vivait avec sa grand-mère maternelle. Entre-temps il avait fait la connaissance de Jean BERNOULLI qui devint son mentor et l'aïda dans ses études des traités classiques de mathématiques. Le jeune Leonard se lia en même temps d'amitié solide avec les fils de Jean BERNOULLI, Nicolas et Daniel, et son père accepta enfin qu'il abandonnât la théologie au seul profil des études de mathématiques. Mais EULER conserva pendant toute sa vie un grand attachement pour la philosophie et la théologie et il resta un croyant pieux qui s'opposa vigoureusement à l'esprit voltairien et libertaire alors à la mode. En 1724 EULER termina ses études avec le degré de Magister à la faculté de philosophie de sa ville natale et sa première leçon fut consacrée à l'étude comparative des philosophies de la nature de DESCARTES et de NEWTON.

Tout en restant constamment soutenu par Jean BERNOULLI qui, après la mort de NEWTON en 1727, était devenu incontestablement le plus fameux mathématicien européen, EULER publia ses premiers travaux scientifiques. En 1726, il répondit au concours lancé par l'Académie Royale des Sciences de Paris en demandant la meilleure disposition des mâts sur un navire. Pour ce travail il reçut un deuxième prix tandis que le premier allait à Bouguer. Il est intéressant de lire le dernier paragraphe de ce travail où EULER écrit : «*Je ne croyais pas nécessaire de faire confirmer ma théorie par des expériences car elle a été déduite à partir des principes les plus certains de la mécanique. Voilà pourquoi la question quant à sa validité dans la pratique ne se pose pas*» [283]. Cette affirmation eulerienne résume sa croyance presque aveugle dans la valeur absolue des principes et le raisonnement purement déductif à partir de ceux-ci. Elle constitue en quelque sorte le paradigme de tout son travail scientifique. Avec sa dissertation sur le son, EULER posa sa candidature pour le poste de professeur de physique à l'université de Bâle, mais sans succès. Cet échec fut heureux pour lui, car des perspectives d'avenir l'attendaient dans un pays lointain : la Russie.

Dans ce pays se passaient des choses importantes au XVIII^e siècle. Le Tsar Pierre I, dit le Grand, construisit sa capitale : St-Pétersbourg à l'embouchure de la Neva dans la mer baltique suivant ses propres plans et avec l'aide de nombreux architectes et ingénieurs étrangers. En vue d'ouvrir son royaume immense au mouvement des Lumières, Pierre décida la fondation d'une académie et il se fit conseiller en ce sens par G.-W. LEIBNIZ déjà à l'origine de l'Académie de Berlin. L'Académie des sciences de St-Pétersbourg fut fondée en 1725 et a été presque entièrement organisée par des étrangers. Parmi les premiers académiciens invités, furent J. HERMANN et les frères Nicolas et Daniel BERNOULLI tous appartenant à l'école de Bâle, qui arrivèrent dans la capitale russe en 1725. Cette «*délégation basiléenne*» a pu convaincre le président de l'académie : Laurentius BLUMENTROST, secondé par le premier secrétaire perpétuel, Ch. GOLDBACH, d'appeler EULER au poste vacant d'adjoint en physiologie. Persuadé des chances d'avenir de cette entrée par la porte arrière, EULER ac-

cepta cette invitation et voulait étudier pendant le temps qui lui restait avant son départ, la médecine. Mais il n'en fut rien. Trois jours après son inscription à la faculté de Médecine, il partit pour la Russie où il arriva au mois de mai 1727.

Ici, il eut l'heureuse surprise d'apprendre qu'il allait travailler dans le domaine des recherches mathématiques. En janvier 1731, il obtint la chaire de physique et en été 1733, on lui proposa la chaire de mathématiques suite au retour de Daniel BERNOULLI dans sa patrie. Dès son arrivée à St-Petersbourg, le jeune et actif savant se consacra avec dynamisme à ses activités à l'académie : il donna des cours aux étudiants, dirigea des travaux, écrivit des manuels et des articles populaires tout en étant examinateur à l'Ecole Militaire et participa à de nombreuses expertises techniques. Il collabora activement au département de géographie de l'Académie dirigé par G. DELISLE qui fut géographe royal en France et fut personnellement invité par le Tsar en vue d'organiser l'observatoire de St-Petersbourg. EULER contribua à l'édition de l'«*Atlas de la Russie*» publié en 1745. Enfin il mena une activité très féconde en mathématiques et en mécanique et obtint des résultats remarquables dans des domaines aussi variés que la théorie des séries, les équations différentielles, le calcul des variations et la théorie des nombres. Dans ce qui suit, nous allons examiner plus en détail ses résultats dans la science mécanique, marquée par la publication en 1736 des deux volumes de sa «*Théorie de Mécanique générale*». Fin de l'année 1733, EULER maria Catherine GSELL, fille du peintre G. GSELL, qui était pensionnaire de l'Académie des Beaux Arts. L'année suivante, leur fils Jean Albert naquit, qui deviendra plus tard l'assistant très efficace de son père. Dans les premiers mois de l'année 1735, EULER fut atteint d'une maladie dont on ne connaît pas la nature, mais qui se prolongea en 1738 et lui coûta la vue de l'oeil droit, situation bien visible sur tous les portraits du grand mathématicien.

Lors de ce premier séjour d'EULER à St-Petersbourg, il fit paraître une cinquantaine d'articles traitant de sujets les plus divers en mathématiques, mais il écrivit aussi un grand traité sur la théorie du navire ou sur les corps flottants : la «*Scientia navalis*» [285]. Celui-ci constitue, après la «*Mechanica*» qui sera discuté séparément, le deuxième pilier des investigations mécaniques euleriennes et traite de l'hydrodynamique. Dans le premier volume, EULER traite les problèmes d'équilibre d'un corps flottant et étudie, sans doute pour la première fois la stabilité de celui-ci, s'il est soumis à de petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Il introduit aussi les équations d'équilibre dans un fluide parfait, un concept repris plus tard par CAUCHY dans sa théorie de l'élasticité. Le deuxième volume donne des exemples d'application de la théorie au cas spécial de la coque d'un navire. Avec son livre, EULER a ainsi posé les bases de la théorie scientifique de la construction navale.

Sur le plan politique, les choses se gâtaient en Russie vers 1740 suite à la mort de la Tsarine Anna Ivanovna et la révolution du Palais qui mettait sur le trône Elisabeth Petrovna. Il s'ensuivait une campagne de russification très intense qui affectait la vie scientifique et mettait les étrangers qui résidaient à St-Petersbourg dans une position précaire. Voilà pourquoi EULER, marié et

père de famille, accepta sans difficulté l'invitation de Frederic II, monté sur le trône en 1740, de s'installer à Berlin en vue de collaborer à la rénovation de l'Académie de Berlin et d'en devenir membre. Néanmoins il maintenait d'excellentes relations avec l'Académie de St-Petersbourg et pendant les 25 années de sa résidence à Berlin, il fut un lien entre ces deux institutions. La moitié de ses travaux sont imprimés à St-Petersbourg tandis que l'autre moitié le seront à Berlin.

Durant sa période berlinoise, EULER eut des activités très diverses. Il occupait en premier lieu une fonction administrative à l'Académie en dirigeant la classe des Mathématiques et prenant souvent la fonction de président. Il devait participer à différentes commissions auprès du gouverneur en veillant à la construction de canaux et à l'approvisionnement en eau du nouveau palais de Sans-Souci à Potsdam. Parallèlement à ses activités administratives et techniques, EULER poursuivait ses travaux de recherche.

En 1744, il fit paraître son traité : «*Methodus inveniendi Lineas Curvas . . .*» [286] qui, à partir de certaines idées des frères BERNOULLI, expose les problèmes principaux du calcul des variations et les méthodes pour leur solution. Sa méthode, essentiellement géométrique, mène à une équation différentielle qui porte son nom. Plus tard, après un vaste échange de correspondance avec J.-L. LAGRANGE, EULER voit que sa méthode était dépassée par les réflexions lagrangiennes et il adopta l'algorithme de celui-ci [287]. Dans ses publications sur le calcul des variations, EULER traita de nombreux exemples concernant la flexion des poutres, les lignes élastiques et la stabilité des barres. Simultanément, il étudia le problème des cordes vibrantes déjà soulevé par D'ALEMBERT et travailla ensemble avec lui sur la théorie des équations différentielles partielles. Son «*Introductio in analysin infinitorum*» [288] de 1748 donne la théorie élémentaire des fonctions d'une variable complexe. Il obtint également des résultats importants dans la théorie des séries trigonométriques, des intégrales elliptiques et la géométrie différentielle des surfaces qui faisaient soit le sujet de ses nombreux articles, soit ils étaient condensés dans ses grands traités d'analyse qui parurent à la suite de son «*Introduction*». Ce sont en 1755 les «*Institutiones calculi differentialis*» [289] en deux volumes et les «*Institutiones calculi integralis*» [290] dont les trois volumes paraissent entre 1768 et 1770, après son départ de Berlin, mais qui ont été écrits encore dans cette ville. Ces livres constituent les exposés les plus exemplaires et les plus accomplis de l'analyse mathématique de l'époque. La façon dont EULER a présenté ses idées détermina durant plusieurs années le style et la manière d'exposer l'analyse mathématique.

A côté de ces traités d'analyse, EULER fit paraître en 1753 sa première théorie de la Lune [291] et en 1765 son deuxième traité de mécanique : «*Theoria motus corporum*» [292] qui documente son intérêt constant pour les applications des mathématiques. Il reste encore à rappeler une excursion d'EULER dans le domaine militaire avec son traité : «*Neue Grundsätze der Artillerie*» qui avait comme origine le livre de B. ROBINS : «*New principles of Gunnery*» [293] ainsi que les attaques véhémentes que celui-ci avait lancées contre le traité de

mécanique de 1736 d'EULER. A la demande de Frederic II, EULER traduisit le livret en allemand et y ajouta de nombreuses remarques au texte de ROBINS. Le livre parut à Berlin en 1745 et il fut traduit en français puis retraduit en anglais pour devenir le manuel de base de toutes les écoles d'artillerie à la fin du XVIII^e siècle [294]. Dans ses «*Remarques*», EULER traite le cas d'un obus lancé obliquement avec résistance de l'air, dont il estime la force à [295] :

$$b_w = 707 \frac{e^3}{d^2} \nu = \frac{\nu}{c} \quad (6.45)$$

d est le diamètre du boulet, e^3 est le volume d'eau correspondant au poids du boulet, ν est la hauteur de chute avec $\mu = \sqrt{\nu}$ la vitesse et 707 est un facteur déterminé par l'expérience. En utilisant 6.47, EULER établit alors les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 x}{dt^2} &= - \frac{\nu}{c} \frac{dx}{ds} \\ 2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= \alpha - \frac{\nu}{c} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \quad (6.46)$$

avec x l'accélération terrestre, t le temps.

A l'aide d'un exemple, EULER propose de calculer dix-huit cas en faisant varier l'angle de tir entre 0° et 85° . Ce travail fut fait en 1764 par VON GRAEVENIZ. Plus tard en 1766, J.-H. LAMBERT, également membre de l'Académie de Berlin, fit le point des théories balistiques antérieures et résolut la question quant à la résistance de l'air d'un boulet dans une formulation analytique.

L'Académie de Berlin possédait, contrairement à d'autres sociétés savantes, une classe de philosophie et EULER y a provoqué de nombreuses discussions. Il s'opposa à la monadologie de LEIBNIZ et à son idée d'une harmonie préétablie, sujets qui se trouvaient en contradiction avec ses convictions religieuses et avec ses points de vue sur le monde mécaniste. Les joutes philosophiques à l'Académie atteignirent leur apogée avec la participation d'EULER à la discussion du principe de moindre action de MAUPERTUIS, où il resta constamment rangé du côté de ce dernier, même lors de sa querelle avec KÖNIG [296]. En effet, MAUPERTUIS et EULER possédaient beaucoup de traits communs dans leur évaluation de l'importance des questions philosophiques et métaphysiques et ils s'opposaient tous les deux contre cet esprit libertin et libertaire qui, sous la baguette de VOLTAIRE, trouvait une protection même auprès du roi. Le plus important ouvrage philosophique d'EULER constitue sans doute ses «*Lettres à une Princesse d'Allemagne*» [297], qui furent encore écrites à Berlin pour être publiées à St-Petersbourg en 1768 en trois volumes. Cette œuvre, traitant sous forme de lettres, divers sujets allant de la théorie musicale, en passant par la philosophie, la mécanique, l'optique, l'astronomie, la théologie et l'éthique, est dirigée contre le solipsisme d'un BERKELEY et les idées d'un HUME et devenait très vite le modèle pour la vulgarisation des sciences et de la philosophie. D'aucuns voient dans son essai de 1748 : «*Überlegungen über Raum und Zeit*»

[298] une influence directe d'EULER sur KANT [283] qui, dans sa «*Critique de la Raison pure*» adopte, lui aussi, la thèse eulerienne que l'espace et le temps ne constituent pas des abstractions venant du monde des sens, mais sont des intuitions pures a priori. A partir des différentes facettes de ses activités philosophiques, EULER se présente comme étant un représentant modéré de la philosophie des Lumières qui a préservé à la fois ses convictions religieuses et sa foi dans la rationalité humaine.

Pendant les années 1760, les relations entre FRÉDÉRIC II et EULER se tendent, vu une divergence insurmontable entre leurs visions du monde en général et qui se prolonge même à leurs goûts les plus subjectifs. Le roi se trouvait en opposition permanente avec EULER qui était resté un protestant profondément croyant et de plus il n'aimait pas les mathématiques mais ses préférences allaient vers la philosophie et la littérature. Or, il se trouvait que l'Académie de St-Petersbourg après l'avènement au trône de la Tsarine Catherine II désirait le retour d'EULER, qui, avec le consentement de Frédéric II, retourna en 1766 en Russie où il reçut un accueil chaleureux. A St-Petersbourg, presque aveugle, son activité scientifique ne diminua point quoiqu'il fût forcé de dicter ses travaux à ses élèves. Outre les ouvrages déjà cités, EULER fit éditer lors de son deuxième séjour à St-Petersbourg son «*Algebre*» [299] en deux volumes, sa «*Dioptrique*» [300] en trois volumes ainsi que sa deuxième théorie de la Lune écrite ensemble avec son fils Jean Albert : «*Theoria motium lunae*» [301] suivi encore par sa deuxième théorie sur les vaisseaux : «*Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux*» [302].

Il continua à produire de nombreux articles scientifiques ; ainsi durant l'année 1777, alors qu'il était âgé de soixante-dix ans, il rédigea avec l'aide de secrétaires plus de cent articles. EULER est mort soudainement le 18 septembre 1783 d'une crise d'apoplexie et fut enterré au cimetière luthérien de St-Petersbourg.

EULER pendant toute sa vie obtint des résultats importants dans l'analyse mathématique et particulièrement dans les méthodes de l'intégration des équations différentielles et la théorie des fonctions complexes à une variable sans omettre ses résultats dans la théorie des nombres et le calcul des probabilités. En mécanique, il fit évoluer la théorie moderne en suscitant le passage de la langue géométrique des «*PRINCIPIA*» de NEWTON à l'analyse mathématique, comme nous allons le discuter dans le paragraphe suivant. Il faut surtout souligner la tournure eulerienne vers les applications pratiques de ses découvertes mathématiques qui traitent des problèmes les plus divers de la théorie de l'élasticité à l'hydrodynamique en passant par le mouvement d'un corps autour d'un point fixe et la théorie des oscillations.

Plusieurs générations de mathématiciens du XVIII^e et du XIX^e siècle ont été formées avec les travaux et les manuels d'EULER et la lecture de ses œuvres suscite encore aujourd'hui des travaux de recherche. Fils des Lumières, EULER opposé au sensualisme de HUME et de BERKELEY, croyait à la possibilité de la compréhension rationnelle de la réalité. Pour ce faire, il privilégiait les mathématiques tout en concevant le monde d'une manière mécaniste composée de points matériels et fonctionnant selon les lois newtoniennes.

6.1.3 Les travaux sur la mécanique d'Euler ; de la «*Mechanica*» de 1736 à la «*Theoria motus*» de 1765 [303]

LA SCIENCE DE LA MÉCANIQUE occupa déjà le jeune EULER, comme le démontrent les notes qu'il prenait à l'âge de dix-huit ou de dix-neuf ans. En 1736, lors de son premier séjour à St-Petersbourg, parut en deux volumes sa «*Mechanica sive Motus scientia analytica*» [270] dont le titre annonce tout un programme : l'utilisation de l'analyse mathématique dans la formulation des principes de la science mécanique tout comme l'entendirent les membres de l'école de Bâle. Le livre constitue le premier traité de mécanique analytique dans lequel tous les problèmes traités sont résolus à l'aide de l'analyse leibnizienne. Tout comme chez NEWTON, EULER considère le concept de la force comme une entité primitive, ne nécessitant pas d'explication supplémentaire. Il ajouta néanmoins des précisions aux principes newtoniens.

Ainsi il s'apercevait très vite que la désignation de «*corps*» chez NEWTON était loin d'être univoque, mais que toutes les propositions des «*PRINCIPIA*» sont correctes seulement si on les applique à des masses concentrées en des points matériels. Voilà pourquoi EULER introduisit la notion du «*point masse*» et le traité de 1736 est exclusivement voué à la mécanique du point. Il s'aperçut aussi le premier de l'importance de l'accélération pour la mécanique et il étudia celle-ci comme une quantité cinématique définie dans le mouvement sur une ligne courbe. Finalement il introduit le concept de vecteur comme une quantité géométrique dirigée non pas seulement pour symboliser des forces en statique mais aussi pour représenter des vitesses, des accélérations et d'autres quantités dirigées.

Mais ce premier traité d'EULER ne couvre pas tous les sujets que NEWTON avait évoqués dans les «*PRINCIPIA*». Si le mouvement en trois dimensions est expliqué avec tous les détails, les considérations euleriennes se limitent au point matériel. Néanmoins le traitement du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale, constitue dans sa formulation brillante un chef d'œuvre de l'utilisation de l'analyse mathématique. Si le premier tome est consacré aux mouvements d'un point matériel libre, le deuxième traite des mouvements de points sur une surface ou une courbe et EULER donne en passant les solutions de problèmes de géométrie différentielle, liés au mouvement forcé de points matériels.

EULER a bâti toutes ses déductions autour de sa loi de la dynamique qu'il met dans la forme : «*L'augmentation de la vitesse est proportionnelle à pdt où p est la puissance agissant sur le corps pendant le temps dt.*» Ce principe s'applique à un seul corps. Si plusieurs corps sont considérés simultanément, leurs masses respectives doivent être introduites. Cette loi met l'accent sur la quantité de mouvement exercée par une force pendant un temps infiniment court. EULER déclare que cette loi est non seulement vraie mais aussi nécessaire et il maintient que toute autre relation mènerait à une contradiction, déclaration eulerienne certainement erronée.

EULER ne parvient à la forme classique des équations du mouvement que

dans un texte : «*Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*» [304] écrit en 1747 et publié en 1749 avec lequel il applique les principes newtoniens à la mécanique céleste. Nous allons revenir sur ce texte, extrêmement important pour le sujet de notre étude, plus bas. Dans ce texte, EULER part de son principe énoncé dans «*Mechanica*», pour formuler de façon claire les équations du mouvement avec les forces accélératrices :

$$M_x = \frac{X}{m} \quad M_y = \frac{Y}{m} \quad M_z = \frac{Z}{m} \quad (6.47)$$

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} \quad 2 \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} \quad 2 \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} \quad (6.48)$$

EULER remarque dans un scholie que 6.48 «... n'est autre chose que le principe connu de la Mécanique du $u = p dt$, où p marque la puissance accélératrice, et u la vitesse ; car ayant $u = ds/dt$, si ds est l'élément de l'espace parcouru, on aura $du = d^2s/dt^2$ et partant $d^2s/dt^2 = p < \dots$ » [304]

Il est à noter que EULER écrivit jusque vers 1770 les équations du mouvement sous la forme générale :

$$2m \frac{d^2x}{dt^2} = X \quad (6.49)$$

Le facteur 2 du côté gauche provient du fait que g est introduit comme étant égal à $1/2$.

Aussi le texte eulerien de 1749 ne considère que le point matériel en y appliquant la deuxième loi de NEWTON en vue de résoudre les problèmes de mécanique céleste. Lentement, il se rendit compte que cette loi newtonienne a un champ d'application beaucoup plus vaste car elle s'applique à toutes les parties de tous les systèmes mécaniques et peut être la base pour l'établissement de toutes les équations du mouvement et en fait EULER l'utilisa pour dériver les équations de mouvement du corps rigide. Naturellement EULER se trouvait dans l'erreur en pensant que cette deuxième loi newtonienne, elle seule, était suffisante et c'est seulement vers la fin de sa vie et fort de son expérience cumulée en mécanique, qu'il se rendit compte qu'il fallait introduire un deuxième principe : la conservation du moment cinétique d'un système de points qui est complètement indépendante de la deuxième loi de NEWTON.

Dans son texte : «*Découverte d'un nouveau principe mécanique*» [305] de 1752, EULER obtint les équations générales du mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité. Il appliqua le premier principe à tous les points matériels de ce corps tout en remplaçant l'accélération de ces points par le vecteur de la vitesse angulaire qu'il introduit ici pour la première fois. En considérant les moments des forces autour du centre de gravité et après quelques manipulations algébriques, il obtint les équations différentielles désignées depuis lors comme «*équations d'EULER*» et exprimant l'équilibre d'un corps rigide soumis à des moments de force autour de son centre d'inertie.

EULER développa la théorie du mouvement du corps solide dans sa deuxième mécanique : « *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum* » [306] en 1760. Une deuxième édition amendée fut publiée par son fils Jean Albrecht en 1790. Le traité débute avec une introduction dans laquelle EULER confirme les résultats de sa première « *Mechanica* ». Il énonce alors la caractéristique d'un corps solide qui est de conserver les distances mutuelles de différents points matériels constituant ce corps. Il définit ensuite le centre de masse ou le centre d'inertie d'un tel corps, en insistant que celui-ci est déterminé uniquement par l'inertie, en négligeant les forces appliquées. Finalement il introduit le concept du moment d'inertie et calcule ceux-ci pour différents corps homogènes. Suit alors l'étude du mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, les forces extérieures étant d'abord égales à zéro, puis assimilées aux forces gravitationnelles. EULER démontre l'existence d'axes de rotation pour tout corps solide et introduit la notion d'axes principaux d'inertie. Le problème LXXXVI demande de calculer les forces élémentaires agissant sur tout point d'un corps solide tournant autour d'un axe passant par son centre d'inertie de façon que la vitesse angulaire et l'axe de rotation varient de manière donnée lors d'un temps dt . EULER introduit le centre d'inertie I , les axes principaux IA , IB , IC du solide ; α , β , γ les angles entre l'axe de rotation et les axes principaux ; ω la vitesse angulaire de rotation du solide ; x , y , z les coordonnées d'un point matériel appartenant au corps par rapport aux axes principaux ; u , v , w les composantes de la vitesse du point matériel suivant les mêmes axes ; X , Y , Z les forces inconnues à l'élément considéré dM . Les variables du problème sont $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et $d\omega$ et les inconnues sont X , Y , Z .

D'après le principe fondamental de la dynamique eulérienne les du , dv et dw sont proportionnelles au Xdt/dM , Ydt/dM et Zdt/dM . La solution du problème se réduit au calcul des du , dv et dw . EULER obtient par des considérations géométriques :

$$\begin{aligned} u &= \omega(z \cos \beta - y \cos \gamma) & dx &= udt = \omega dt(z \cos \beta - y \cos \gamma) \\ v &= \omega(x \cos \gamma - z \cos \alpha) & dy &= vdt = \omega dt(x \cos \gamma - z \cos \alpha) \\ w &= \omega(y \cos \alpha - x \cos \beta) & dz &= wdt = \omega dt(y \cos \alpha - x \cos \beta) \end{aligned} \quad (6.50)$$

Une simple dérivation donne alors les valeurs pour du , dv et dw et les forces inconnues X , Y , Z appliquées à l'élément $dM(x, y, z)$ et sont déduites du principe fondamental. EULER calcule alors les moments P , Q , R par rapport aux axes principaux. Il définit :

$$\begin{aligned} dP &= \frac{dM}{dt}(ydw - zdv) \\ dQ &= \frac{dM}{dt}(zdu - xdw) \\ dR &= \frac{dM}{dt}(xdv - ydu) \end{aligned} \quad (6.51)$$

comme étant les composantes du moment de l'élément dM . En intégrant sur l'ensemble des points formant le corps solide, il obtient les expressions différentielles pour les composantes P, Q, R . Or en introduisant les composantes de la vitesse angulaire instantanée :

$$\begin{aligned} p &= \omega \cos \alpha \\ q &= \omega \cos \beta \\ r &= \omega \cos \gamma \end{aligned} \tag{6.52}$$

EULER parvint à donner à ces équations la forme [307] :

$$\begin{aligned} P &= A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr \\ Q &= B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp \\ R &= C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq \end{aligned} \tag{6.53}$$

C'est à la fin de sa vie en 1775 qu'EULER possède sa théorie définitive du mouvement d'un corps solide. Elle sera publiée en 1776 [308]. Il y expose les deux principes fondamentaux et indépendants : Sur chaque partie d'un corps solide la force totale est égale à la dérivée du vecteur de la quantité du mouvement, tandis que le vecteur du moment résultant est égal à la dérivée du moment cinétique par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \int_P \ddot{x} dM &= \vec{F}(P) \\ \int_P \vec{p} \wedge \ddot{x} dM &= \vec{L}(P) \end{aligned} \tag{6.54}$$

Avec le mémoire eulérien de 1776, l'entité du programme de la mécanique analytique est devenue complète. Les deux lois s'appliquent à tous les corps, mais sont insuffisantes pour spécifier leurs mouvements. Les différences entre les différents corps sont représentées par les équations constitutives qui indiquent la nature de leur réponse à leur environnement. Le XVIII^e siècle possédait ces équations pour les systèmes discrets, le corps solide, la ligne élastique, la poutre élastique et le fluide parfait et elles convenaient toutes au schéma général indiqué par EULER dans son mémoire de 1775.

6.2 Euler et la loi de la gravitation universelle

6.2.1 Le rappel des doutes sur la validité de la loi de l'attraction au début du XVIII^e siècle



LE LEGS NEWTONIEN paraît un problème majeur. D'un côté, NEWTON, en appliquant ses lois du mouvement à l'interprétation de la théorie keplérienne avait obtenu sa loi de la gravitation universelle. Mais en même temps, il se refusait de donner une interprétation quant au caractère ontologique de cette loi, ce qui provoquait le slogan du retour des «*qualités occultes*» que le siècle des Lumières avait cru faire évacuer pour de bon. Si NEWTON avait déclaré dans le scholie général du LIVRE III des «*PRINCIPIA*» [1] qu'il «*n' imagine pas d'hypothèses*» et que pour lui, la philosophie expérimentale devrait être développée uniquement en partant des phénomènes, dont les propositions démontrables sont tirées et ensuite généralisées par induction, il n'en restait pas pourtant une absence d'explication ressentie douloureusement, de la force gravitationnelle.

NEWTON conclut que pour lui «*il suffit que la gravité existe, qu'elle agisse selon les lois que nous avons exposées et qu'elle puisse expliquer tous les mouvements des corps célestes et ceux de la mer*» [1]. Pour lui, la gravitation est un «*fait général*», rien de plus, rien de moins.

Or au XVIII^e siècle, cette réduction phénoménaliste était loin d'être généralement acceptée. Considérée par beaucoup comme inintelligible, comme mystérieuse par d'autres, la gravitation était autant un problème qu'une solution. Et le moindre écart qui se révélait entre les prévisions quantitatives de la loi et l'observation mettait en doute l'ensemble de la théorie newtonienne. Et une autre explication du système du monde était toute prête : celle de la physique de DESCARTES mais où faisait défaut toute application mathématique, comme toute référence à l'observation.

D'ALEMBERT, lui-même, un protagoniste de la méthode mathématique et de l'acceptation purement phénoménaliste de la gravitation, cherche à expliquer, voire à protéger l'approche cartésienne quand il écrit : «*Si on juge sans partialité ces tourbillons devenus aujourd'hui presque ridicules, on conviendra qu'on ne pouvait alors imaginer mieux : les observations astronomiques qui ont servi à les détruire étaient encore imparfaites ou peu constatées. Rien n'était plus naturel que de supposer un fluide qui transportait les planètes : il n'y avait qu'une longue suite de phénomènes, de raisonnements et de calculs, et par conséquent une longue suite d'années qui pût faire renoncer à une théorie si séduisante. Elle avait d'ailleurs l'avantage singulier de rendre raison de la gravitation des corps par la force centrifuge du tourbillon même : et je ne crains point d'avancer que cette explication de la pesanteur est une des plus belles et des plus ingénieuses hypothèses que la philosophie ait jamais imaginées. Aussi a-t-il fallu, pour l'abandonner, que les physiciens aient été entraînés comme malgré eux par la Théorie des forces centrales et par des expériences faites longtemps après. Reconnaissons donc que DESCARTES, forcé de créer une physique toute nouvelle, n'a pu la créer meilleure ; qu'il a fallu, pour ainsi dire, passer par les tourbillons pour arriver au vrai système du monde ; et que s'il s'est trompé sur les lois du mouvement, il a du moins deviné le premier qu'il*

devait y en avoir»[214].

Il est certain que l'ensemble de la présentation donnée par D'ALEMBERT, aussi bien dans le «*Discours préliminaire*» [214] que dans ses «*Réflexions sur différents points importants du système du monde*» [235], est motivé par les querelles ayant entouré l'introduction de l'idée newtonienne de la gravitation en France, relatée dans un chapitre précédent. N'écrit-il pas qu' «*il ne faut qu'ouvrir nos livres, pour voir avec surprise qu'il n'y a pas encore trente ans qu'on a commencé en France à renoncer au cartésianisme*» [214]. Si donc la réputation de NEWTON n'est plus à faire, D'ALEMBERT insiste pourtant sur l'honneur de DESCARTES et ses explications de la force gravitationnelle bien concrètes et rationnelles à première vue. Mais il réclame aussi pour les savants français le mérite d'avoir rendu compréhensible les idées newtoniennes. Et il récapitule toute cette histoire par une formule lapidaire : «*l'Angleterre nous doit la naissance de cette philosophie que nous avons reçue d'elle*» [214]. Ensuite il souligne que ce sont précisément de jeunes géomètres non entachés par les discussions d'ordre métaphysique, et parmi lesquels il se compte, qui ont pu régler la question de l'acceptation du principe de la gravitation universelle, parce qu'ils ont réduit celle-ci strictement au plan mathématique. Ce qui restait encore prudence chez NEWTON devint méthode chez D'ALEMBERT et surtout chez CLAIRAUT qui, de toute façon, portait beaucoup moins d'attention aux débats philosophiques. D'ALEMBERT affirme que «*la physique est donc uniquement bornée aux observations et aux calculs*» [214]. Et dans l'article : «*Attraction*» de l'Encyclopédie [309], il insiste même sur le fait que l'indétermination métaphysique de l'attraction newtonienne dispense d'une recherche sur le pouvoir qui s'exercerait en elle, de façon qu'il faut sagement s'en tenir au traitement mathématique du rapport entre les corps. En termes empiristes, cela signifie que la nature de la cause n'est point connue, que son existence est inférée aux phénomènes. La loi newtonienne n'exprime donc qu'un fait général, et le calcul pour en déterminer exactement les conséquences est son unique légitimité rationnelle.

Par ailleurs, il faut relever que l'action par contact cartésienne n'a pas non plus une d'évidence empirique et appartient donc à la même catégorie des faits généraux.

Lentement, mais sûrement, la discussion quant au statut véritable de la gravitation s'estompe et la conception positiviste qui s'affirmera au XIX^e siècle ne crût plus nécessaire l'attachement des entités physiques à une explication d'ordre métaphysique. Pour la mécanique, il est donc inutile de chercher où que ce fut la «*cause*» qui produit les mouvements, de se demander «*pourquoi*» les corps s'attirent, et précisément suivant la loi de NEWTON.

Auguste COMTE dans le «*Discours de l'esprit positif*» [310] formule d'une façon concise l'essence de ce nouveau paradigme : le mot «*positif*» désigne d'abord, écrit-il, le réel par rapport au chimérique. L'esprit humain aux prises avec les phénomènes a manifesté qu'il pouvait s'y prendre de deux façons différentes pour les interroger. La première consiste à chercher leurs causes. Elle a donné lieu à deux types de questions également chimériques : questions théolo-

giques lorsqu'on cherche des puissances surnaturelles personnifiées comme «*responsables*» de ce qui est observé ; questions métaphysiques, lorsqu'on impute les phénomènes à des «*entités abstraites*». La seconde manière d'interroger les phénomènes consiste à «*écarter comme nécessairement vaine toute recherche quelconque des causes proprement dites, soit premières, soit finales, pour se borner à étudier les relations invariables qui constituent les lois effectives de tous les phénomènes observables.*» L'esprit se contente alors de «*l'appréciation systématique de ce qui est*» et il se donne aussi le pouvoir de la prévision rationnelle «*principal caractère de la vraie science*». Et cette prévision peut se traduire dans la pratique par une «*prévoyance*» elle même rationnelle, donnant lieu à des «*applications*».

Cette nouvelle approche philosophique aida à imposer le modèle gravitationnel qui, au courant du XIX^e siècle, devenait même le paradigme qui servira à l'étude également des forces non gravitationnelles, telles les forces électrostatiques et magnétiques ou même de la capillarité. Adapté par HELMHOLTZ au nouveau concept de conservation de l'énergie, le programme des forces centrales, auquel LAPLACE avait réduit l'idée newtonienne de la gravitation universelle, devint la pierre angulaire de la mécanique qui domina la physique jusqu'à la fin du XIX^e siècle.

Si le statut ontologique de la gravitation n'était plus une question, le problème de la forme mathématique exacte de la loi de la gravitation demeura.

NEWTON avait, introduit cette forme mathématique de la loi dans son œuvre maîtresse des «*PRINCIPIA*» [1] à travers ses calculs de l'orbite lunaire. Sa démarche est longuement décrite dans le chapitre 2.4, ci-avant, et il suffit donc ici de la rappeler de façon succincte. NEWTON introduit le concept de la force centrale et montre qu'une telle force, proportionnelle à l'inverse du carré de la distance, mène à la loi des aires que les planètes suivent dans leur mouvement autour du Soleil. Cette même loi est encore remplie par les satellites de Jupiter dans leurs rotations autour de cette planète. Finalement NEWTON mentionne pour prouver sa loi d'attraction, la fixité des aphélies des orbites planétaires. Il démontre que c'est uniquement la loi des carrés inverses qui garantit cette fixité. Or NEWTON sait que la ligne des apsides de la Lune n'est pas fixe, et ici apparaît la faille dans la théorie newtonienne qui ne parvient pas à donner la valeur exacte de ce mouvement de rotation qui s'avère deux fois plus rapide que la prédiction calculée. Cette impossibilité entretenait le doute sur l'exactitude de la forme mathématique de la loi de l'attraction et générait un vaste programme de recherche auquel participaient CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE et enfin LAPLACE, qui après environ cent années de réflexions et de calculs ramena la mécanique céleste au statut d'une «*science normale*» [311] qui ne mettait plus en doute le paradigme de base, mais se confinait aux explications de plus en plus détaillées des phénomènes.

Ce programme de recherche, le plus important de tout le XVIII^e siècle, possédait les axes principaux suivants :

- il s'agissait d'abord de réduire les «*inégalités*» observées, surtout dans les mouvements de la Lune, puis dans les mouvements de Saturne et de

Jupiter pour ne citer que les plus importantes. Pour cela, il faut montrer que toutes les fois où la trajectoire s'écarte de la forme keplérienne définie pour le problème des deux corps, cet écart peut être totalement et exactement expliqué en tenant compte de toutes les interactions formulées suivant la loi de la gravitation.

- il s'agissait ensuite de fixer, en s'en tenant strictement à la méthode newtonienne, le statut exact de la loi de la gravitation ainsi que toute explication physique de celle-ci et de sa propagation à travers l'espace. La loi elle-même est-elle valable seulement à grande échelle, ou décrit-elle exactement et universellement l'action réciproque de toute molécule de matière sur toute autre ?
- les questions soulevées ci-avant débouchaient, à la fin du XVIII^e siècle, sur le problème de la stabilité du système solaire décrit dans le cadre de la théorie newtonienne. Les courbes fermées à peu près elliptiques que parcourent planètes et satellites risquent-elles de se déformer complètement ? Verra-t-on la Lune tomber sur la Terre ou Saturne se perdre dans l'espace sidéral ? Les progrès des mathématiques, allant de pair avec le développement des méthodes de la mécanique céleste, dans un processus où les mêmes savants étaient très souvent engagés des deux côtés, laissaient espérer désormais la possibilité de progresser dans ce programme de recherche en déterminant tous les effets de la gravitation par l'analyse mathématique. Le calcul exact et l'accord avec les résultats des observations constitueraient une confirmation de la loi de NEWTON de la gravitation universelle. Mais en même temps, ils représentaient une très grande innovation par rapport à la théorie de NEWTON. Les savants de l'époque, engagés dans le programme de recherche exposé, étaient aux prises avec des problèmes inédits combinant l'astronomie et l'analyse. Ils empruntaient, certes à NEWTON la loi de l'inverse carré, et innovaient sur le reste.

EULER, avec CLAIRAUT et D'ALEMBERT, fut le premier à utiliser ce nouvel outil mathématique pour la détermination des mouvements des corps célestes appartenant au système solaire dans l'hypothèse de la gravitation universelle de NEWTON, même s'il faut le relever, ils passèrent tous les trois par des périodes de doutes plus ou moins longues. On leur doit donc les premières approches précises du problème des trois corps qui étaient construites sur des méthodes perturbatrices propres à chacun d'eux, mais qui convergeaient quant aux résultats obtenus.

Ce fut LAPLACE qui arriva à intégrer les résultats obtenus entre 1750 et 1780 en expliquant que la loi de NEWTON contenait dans sa forme les éléments suffisants pour la solution de tous les problèmes que l'on pouvait poser à son sujet. Cette théorie était bien, selon une expression qui revient fréquemment sous sa plume, *«le vrai système du monde»*.

-II-

LE PROGRAMME DE RECHERCHE décrit se concentrait d'abord à l'explication de tous les mouvements de la Lune à laquelle CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER se consacraient à partir des années 1740. La description de leurs travaux constitue le sujet principal de la présente étude et il est inutile d'entrer encore une fois dans les détails dans le cadre de ce chapitre introductif aux travaux astronomiques d'EULER. Il ne peut s'agir ici que de rappeler quelques points saillants de ces travaux en vue de les positionner dans le contexte général et dans l'ordre chronologique.

Si donc les premiers grands progrès dans la théorie de la Lune eurent lieu à partir du milieu du XVIII^e siècle, il y avait, dès la parution en 1727 de la troisième et dernière édition des «PRINCIPIA», des commentaires, voire des explications de l'œuvre maîtresse de NEWTON. Ainsi parut en 1728, l'ouvrage de Pemberton intitulé : «*A view of NEWTON's philosophie*» [166] tandis que Machin publia en 1729 son ouvrage ; «*The law's of the Moon's Motion*» [312]. Leadbetter publia une «*Uranoscopie*» [313] en 1735, et un ouvrage intitulé : «*A complete System of Astronomy*» [314] en 1738. Il faut mentionner ici encore le commentaire des «PRINCIPIA» rédigé par les P. P. LE SEUR et JACQUIER [315] entre 1739 et 1742. Ceux-ci s'adjoignirent dans ce travail J.-L. CALANDRINI qui fut professeur à l'Académie de Genève et fournissait des notes et des additions qui sont le meilleur de cet ouvrage. CLAIRAUT le cite avec éloge, et D'ALEMBERT reconnaît : «*qu'il a montré beaucoup de sagacité et de connaissances, et que cet habile commentateur est le premier qui ait entrepris, depuis NEWTON, de résoudre la question du mouvement de l'apogée.*» [174]

CLAIRAUT fit paraître en 1743 son bel ouvrage sur la figure de la Terre [157] où il supposait que la Terre a été primitivement formée par une matière homogène et fluide. Pour expliquer l'équilibre entre les différentes parties de ce corps, CLAIRAUT admettait l'égalité de poids entre des colonnes allant du centre au pôle et du centre à l'équateur. Mais la colonne qui répond à l'équateur étant formée d'une matière que la force centrifuge avait rendue plus légère que la matière qui forme la colonne qui répond au pôle, il faut alors que la colonne de l'équateur soit plus longue que celle du pôle et la conséquence en est une Terre aplatie. Cette conclusion valide en même temps les résultats de l'expédition en Laponie de 1736 à 1737.

En même temps que son travail sur la figure de la Terre, CLAIRAUT entra activement dans le programme de recherche esquissé et s'occupa, à travers le problème des trois corps, des mouvements de la Lune. En 1746, il présenta à l'Académie des Sciences un mémoire : «*De l'orbite de la Lune dans le système de Monsieur NEWTON*» [171]. Il y formula le problème général de l'attraction réciproque de trois corps et le système newtonien lui permettait de réduire le problème de la Lune au calcul de ce problème de dynamique. CLAIRAUT préludait ainsi au traitement analytique de ce fameux problème des trois corps, sur lequel allaient ensuite s'exercer, en même temps que lui, bon nombre de mathématiciens astronomes et qui était destiné à devenir à la fois le fondement

de la mécanique céleste et finalement aussi le meilleur argument en faveur du système newtonien de l'attraction.

Mais avant d'y arriver, il fallait déblayer un terrain parsemé d'embûches. Le 15 novembre 1747, CLAIRAUT lut un discours devant l'Académie des Sciences ayant comme titre : *«Du système du Monde dans les principes de la gravitation universelle»* [172]. Il y expose la marche de ses propres idées sur le sujet : *«Après avoir examiné longtemps la théorie de Monsieur NEWTON sans en tirer la conviction que j'attendais, je me suis déterminé à ne plus rien emprunter de lui, et à chercher directement la détermination des mouvements célestes d'après la supposition de l'attraction mutuelle.»* [172] Dans le chapitre sur CLAIRAUT, sa démarche analytique est exposée dans les détails et il suffit ici d'y renvoyer. Mais dans ce texte, CLAIRAUT fait part aussi de ses réflexions sur la nature de la force gravitationnelle et s'attaque directement aux cartésiens : *«Ils se sont flattés de détruire son système, sans suivre les calculs et les observations sur lesquels il est fondé ; ils ont cru pouvoir s'en éviter la peine, en cherchant dans la métaphysique des moyens de prouver l'impossibilité de l'attraction, comme cause et comme propriété que la matière a par elle-même : ils ne pensaient pas que, quand même leur démonstration aurait été sans réplique, ils étaient réfutés par un seul mot de NEWTON, qui avertit en propres termes qu'il n'emploie le mot d'attraction qu'en attendant qu'on trouve sa cause, et en effet, il est aisé de juger, par le livre des Principes mathématiques de la philosophie naturelle, qu'on y a seulement pour but de constater l'attraction comme fait.»* [172]

CLAIRAUT, en appliquant ses calculs à l'orbite de la Lune se trouva bientôt en face de résultats inacceptables concernant le mouvement de l'apogée du satellite de la Terre. *«Après avoir mis à ce calcul toute l'exactitude qu'il demandait, j'ai été bien étonné de trouver qu'il rendait le mouvement de l'apogée au moins deux fois plus lent que celui qu'il a par les observations, c'est-à-dire que la période de l'apogée qui suivrait de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances, serait d'environ 18 ans, au lieu d'un peu moins de 9 qu'elle est réellement.»* [172] CLAIRAUT songe alors à abandonner complètement l'idée de l'attraction pour se raviser peu après : *«Ce qui m'a paru de plus simple et de plus propre à servir de dénouement, c'est que l'attraction a lieu dans la nature, mais en suivant une autre loi que celle qu'avait établie Monsieur NEWTON.»* [172] Restait une objection, que CLAIRAUT eut la prévoyance de se poser à lui-même : *«La Lune exige sans doute une autre loi d'attraction que le carré des distances, mais les planètes principales ne demandent-elles pas au contraire cette loi en conséquence de l'observation des règles de KEPLER ? Il est aisé cependant de répondre à cette difficulté, en faisant remarquer qu'il y a une infinité de lois à donner à l'attraction, qui différeront très sensiblement de la loi du carré pour de petites distances et qui s'en écarteront si peu à de grandes, qu'on ne pourra pas s'en apercevoir par les observations ... »* [172]

Si la proposition de résolution de CLAIRAUT était ingénieuse, elle n'était pas à l'abri de toutes les difficultés. En effet, les cartésiens n'hésitaient pas à exploiter une soi-disant faille dans le système newtonien pour prédire un effondrement prochain et complet de la théorie de NEWTON. Ce fut alors BUFFON,

inquiet sur le sort global de la thèse attractionnaire, qui entreprit de défendre la formule de l'attraction universelle des «PRINCIPIA»[316]. Si BUFFON était d'abord naturaliste, il avait assez de connaissances dans les sciences exactes pour l'inciter à donner en 1740 une traduction française de «*La méthode des fluxions et des suites infinies*» de NEWTON [54]. «*Malgré l'autorité de Monsieur CLAIRAUT*», écrit BUFFON dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1747 [188], «*je suis persuadé que la théorie de NEWTON s'accorde avec les observations; je n'entreprendrai pas ici de faire l'examen qui serait nécessaire pour prouver qu'il n'est pas tombé dans l'erreur qu'on lui reproche, je trouve qu'il est plus court d'assurer la loi de l'attraction telle qu'elle est, et de faire voir que la loi que Monsieur CLAIRAUT veut substituer à celle de NEWTON n'est qu'une supposition qui implique contradictions.*» BUFFON oppose le nombre très considérable de phénomènes où la loi de NEWTON s'accorde parfaitement avec la nature au seul cas où elle en diffère. Il propose alors «*que la première idée qui doit se présenter est qu'il faut chercher la raison particulière de ce phénomène singulier*» [188], plutôt que de tout bouleverser par l'introduction d'une formule nouvelle beaucoup plus compliquée. BUFFON propose alors d'introduire, en vue de tenir compte de cette accélération dans le mouvement de l'apogée, la force magnétique de la Terre, dont l'influence sur la Lune est au moins plausible.

Finalement tout le débat se concentra sur l'idée de simplicité des lois naturelles et BUFFON reproche à la loi que CLAIRAUT avait proposée sous la forme :

$$F = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} \quad (6.55)$$

de n'être plus une loi physique. Car «*une loi en physique n'est loi que parce que sa mesure est simple, et que l'échelle qui la représente est non seulement toujours la même, mais encore qu'elle est unique, et qu'elle ne peut être représentée par une autre échelle; or toutes les fois que l'échelle d'une loi ne sera pas représentée par un seul terme, cette simplicité et cette unité d'échelle, qui font l'essence de la loi, ne subsistent plus; et par conséquent, il n'y a plus aucune loi physique.*» [188] La réponse de CLAIRAUT à cette objection consista à établir une distinction entre la simplicité d'une loi et le nombre de termes qui servent à l'exprimer. D'après lui, il faut se garder de confondre la simplicité de l'équation et la commodité de construction géométrique. Une loi physique peut bien être composée de plusieurs termes et que c'est alors la faute des limitations du langage algébrique. La controverse entre CLAIRAUT et BUFFON fit long feu, comme le témoignent plusieurs mémoires et lettres entre 1745 et 1749. Le premier assistait avec quelque ennui à cette crise qu'il avait suscitée au sein de l'école newtonienne et qui fut exploitée par les adversaires de la doctrine. Aussi, bien loin d'être vexé de constater son erreur et de la signaler lui-même à ses collègues de l'Académie des Sciences, il déclarait en 1749 qu'il «*était parvenu, à concilier assez exactement les observations faites sur le mouvement de l'apogée de la Lune avec la théorie de l'attraction, sans supposer d'autres forces attractives que celle qui suit la proportion inverse du carré des distances.*» [193]

D'ALEMBERT fit un parcours similaire, quoique moins spectaculaire que celui de CLAIRAUT. Il commença à s'occuper du problème des trois corps vers les années 1745 et il lut un mémoire à l'Académie Royale de Paris le 14 juin 1747 avec le titre : «*Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes, en ayant égard à leur action mutuelle*» [209] qui fut imprimé dans le même tome des «*Mémoires*» que le premier travail de CLAIRAUT à ce sujet. Les méthodes analytiques employées par D'ALEMBERT sont sensiblement les mêmes que celles de CLAIRAUT quoique d'une plus grande généralité. Il emploie sa méthode pour le calcul de l'orbite de la Lune et il conclut que la valeur du mouvement de l'apogée de ce corps est de $1^{\circ}31'$ par révolution, la moitié du mouvement réel. Au moment où CLAIRAUT trouva, par la théorie, le vrai mouvement de l'apogée, D'ALEMBERT était absorbé dans ses recherches sur la précession des équinoxes et ne vérifia point les calculs de celui-ci. Dans le premier tome des «*Recherches sur différents points importants du Système du Monde*» [235], il s'excuse de l'erreur, qui était de suivre de trop près les méthodes de CLAIRAUT, ceci pour hâter la publication de son premier mémoire [209]. Après avoir trouvé la solution exacte, il remit un pli cacheté à Monsieur DE FAUCHY, secrétaire perpétuel de l'académie, le 10 janvier 1751, donc plus de neuf mois avant le jugement de l'Académie de St-Petersbourg donnant son premier prix à CLAIRAUT. D'ALEMBERT publia sa théorie de la Lune, basée sur la loi de la gravitation newtonienne, dans le 1er tome de ses «*Recherches*» [235]. Celle-ci est présentée dans les détails dans le chapitre consacré à D'ALEMBERT ci-avant.

Les réflexions successives d'EULER sur le concept de la gravitation et la forme à donner à la loi d'attraction sont examinées dans un des chapitres suivants.

-III-

UN AUTRE CRITÈRE pour décider de la validité de la loi de la gravitation fut sans doute la théorie des planètes et surtout celle des inégalités de Jupiter et de Saturne. Il faut rappeler que le LIVRE PREMIER des «*PRINCIPIA*»[1] donne la solution du problème de deux corps s'attirant suivant la loi de l'attraction newtonienne. La PROPOSITION LXVI avec ses vingt-deux corollaires cherche à élucider le problème des trois corps tout en se limitant à l'outil géométrique et ne parvient pas au-delà de résultats purement qualitatifs. Dans le LIVRE III, NEWTON parla des influences mutuelles de Jupiter et de Saturne et dans la PROPOSITION XIII, il souligna que ces influences étaient à prendre en compte dans tout calcul des tables de ces deux planètes. Ainsi, il détermina le rapport de l'attraction sur Saturne du Soleil par rapport à celle de Jupiter à 1 : 211 dans la troisième édition de 1726 et il releva que ces influences mutuelles des autres planètes pouvaient être négligées, vu leur petitesse. NEWTON ne parvint pas à indiquer une méthode quantitative pour le calcul des perturbations mutuelles et

ne disposait donc d'aucun résultat numérique. En effet, ce fut EULER qui posa les bases mathématiques permettant le calcul des perturbations, comme nous allons le voir plus loin en analysant différents de ses mémoires de mécanique céleste, écrits vers le milieu du XVIII^e siècle.

En 1747, CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER s'attaquèrent au problème des trois corps et la formulation des équations du mouvement en résultant, ceci en acceptant la loi newtonienne de l'attraction comme étant exacte. Ces équations contiennent l'expression de l'inverse du carré de la distance du corps perturbant au corps perturbé et EULER parvint à exprimer cette expression en une série convergente, qui procède suivant les cosinus des multiples de l'élongation. EULER applique son procédé à la théorie des inégalités de Jupiter et de Saturne et réussit à condenser la série en un très petit nombre de termes, ce qui rend possible le traitement numérique des équations du mouvement obtenues.

Il y avait longtemps déjà que les astronomes s'étaient aperçus des différences que les tables de PTOLÉMÉE donnaient par rapport aux observations. Ainsi FLAMSTEED remarqua en 1682 que les tables donnaient trop de vitesse à Saturne et trop peu à Jupiter, ce qui indiquait un retardement dans le mouvement du premier et une accélération dans celui du second. HALLEY fixa, par les observations, la première quantité à $1'24''$, et la seconde à $36''$ pour le premier siècle après 1700, et il admit dans ses tables deux équations séculaires qui augmentent comme les carrés des temps. Il supposait aussi, de même que Jacques CASSINI, que les aphélies et les nœuds de ces planètes étaient mobiles et en détermina les valeurs numériques pour leurs variations. Enfin LEMONNIER avait vu en 1746, que les observations indiquaient pour Saturne une inégalité sensible, qui disparaît lorsque, se trouvant dans ses moyennes distances, il est dans une certaine configuration avec Jupiter.

Telle était la situation quant aux connaissances empiriques sur les mouvements de ces deux planètes. Et ce fut pour déterminer la cause de ces inégalités, et fixer leurs quantités avec plus de précision, que l'Académie Royale des Sciences proposa pour sujet du prix fondé par Monsieur Rouillé DE MESLAY qu'elle devrait donner en 1748 une «*Théorie de Saturne et de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux planètes paraissent se causer mutuellement, principalement dans le temps de leur conjonction*» [117]. L'Académie reposa la même question en 1750 et en 1752.

Pour le premier concours, l'Académie reçut trois pièces et couronna celle d'EULER, arrivée en août 1747 et qui fut imprimée en 1749 [317]. Aucun prix n'était décerné en 1750 et pour l'année 1752, EULER reçut encore une fois le prix pour son mémoire : «*Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne*» [179] tandis que BOSCOVICH reçut un «*accessit*» pour son mémoire : «*De inaequalitatibus quas Saturnus et Jupiter sibi mutuo videntur inducere praesertim circa tempus conjunctionis*» [318].

Dans son mémoire de 1747, EULER entreprit la comparaison des observations avec le calcul fait selon ses formules. L'erreur constatée ne surpasse que fort rarement $5'$ au lieu de monter à $20'$ dans les tables de CASSINI. Mais l'Académie Royale des Sciences n'était pas encore contente et pensa : «*que les auteurs*

auraient pu tirer encore un plus grand parti de leur travail, soit pour donner un nouveau degré de perfection aux solutions des problèmes relatifs à la matière proposée, soit pour procurer, au moyen de ces solutions et d'un meilleur choix d'observations, de nouveaux secours à l'Astronomie, ou jeter un plus grand jour sur le mécanisme des corps célestes.» [117] Le pluriel employé dans l'appréciation émise par l'Académie se rapporte aussi au deuxième mémoire remis par un auteur anonyme. EULER fut couronné aussi en 1752 et il reprit dans son mémoire, d'abord les défauts de la marche qu'il avait suivie dans le précédent, pour constater que les inégalités de Jupiter et de Saturne sont tellement liées ensemble qu'il est impossible de les bien déterminer séparément. Estimant qu'il a résolu à la satisfaction les mouvements des nœuds et de l'inclinaison des deux planètes, il se limite alors à la détermination des longitudes des deux corps célestes. Mais il se rend compte qu'il est quasiment impossible d'intégrer rigoureusement ces équations du mouvement et qu'il faudra donc recourir à des approximations à l'usage des astronomes. Il reste encore à relever que la pièce de BOSCOVICH [318] se limita à appliquer les méthodes géométriques de NEWTON en vue de déduire les forces perturbatrices. Quoique BOSCOVICH indiqua encore que des résultats quantitatifs pourraient être obtenus par la quadrature analytique des courbes, il laissa ce pas aux astronomes. Il n'y avait aucune application pratique de ses idées.

Il est un fait, que les travaux d'EULER de 1747 et de 1752, basés tous les deux sur l'application de la loi de l'attraction universelle de NEWTON, ont mené à une meilleure compréhension des inégalités de Jupiter et de Saturne, quoiqu'il faille attendre LAPLACE pour avoir une théorie exacte. Le succès explicatif partiel d'EULER est une confirmation majeure pour la théorie newtonienne.

–IV–

M AIS À CÔTÉ des inégalités des planètes, un autre problème majeur planait sur l'astronomie théorique au milieu du XVIII^e siècle. En effet EULER constata que le temps périodique de la Terre n'est pas constant mais diminue *«petit à petit»* comme il l'exprima dans une lettre à DELISLE du 15 février 1746 [319] et il en rendit responsable une résistance de l'éther, dont il estimait l'existence nécessaire, aussi pour des raisons métaphysiques. En effet, il avait découvert que, pour satisfaire aux observations faites au courant du XVIII^e siècle, il était nécessaire de supposer l'année un peu plus courte que généralement admis dans les tables de CASSINI. Et cela était encore plus vrai pour les observations faites au cours des XVII^e, XVI^e et XV^e siècles qui toutes nécessitaient une année plus longue. Dans une autre lettre écrite à DELISLE, le 16 août 1746 [319], EULER expliqua comment il avait calculé la durée de l'année tropicale dans le passé en utilisant des paires d'observations méridiennes du passage du Soleil quand celui-ci avait la même altitude. Il arrivait de cette manière à éliminer la plupart des erreurs possibles. EULER trouva une valeur

de 5'' par siècle et il reprit cette valeur dans ses tables. Plus tard, il s'avéra que ce chiffre était dix fois trop grand.

En 1743, EULER écrivit un mémoire, voué à la comparaison des forces agissant sur un aimant avec l'attraction gravitationnelle. Le texte : «*Dissertatio de magnete*» [320] fut soumis à l'Académie des Sciences de Paris et publié en 1743. EULER y exposa une symbiose entre la théorie des tourbillons cartésiens et la friction due à la matière éthérique. Il admit, tout comme DESCARTES, un tourbillon d'éther recouvrant chaque corps, mais son explication différait fondamentalement de celle du premier dans le sens qu'il ne considérait pas les forces centrifuges qu'il estimait étant trop petites, mais qu'il voyait dans les tourbillons une différence de pression dans un fluide se trouvant dans un état stationnaire. Là où la vitesse du fluide est plus grande, la pression ou «*force élastique*» diminue ceci suivant la loi de BERNOULLI. EULER posa pour la pression :

$$p = k - \frac{k'}{r} \quad (6.56)$$

avec k et k' des constantes et r la distance du corps central. De 6.56 suit :

$$dp = \frac{k' dr}{r^2} \quad (6.57)$$

de façon que la différence de pression entre les deux côtés obéit à une formule analogue à la loi newtonienne. En 1751, EULER revient à cette théorie, et dans une lettre à T. MAYER [321], il estime que son explication est trop peu reliée aux faits et quoiqu'il pense avoir montré que la gravité a une cause mécanique, d'autres explications peuvent aussi être données, surtout que l'on ne sait pas si l'éther est en repos ou non. Le comportement des queues des comètes, pointant toujours en direction opposée du Soleil semblent indiquer qu'il n'y a pas de mouvement dans cet éther.

EULER fut convaincu des effets négligeables de la résistance de la matière éthérique à travers la réussite de CLAIRAUT dans la démonstration exacte du mouvement de la ligne des apsides de la Lune qui était uniquement fondée sur l'application de la loi newtonienne. Il l'exprima explicitement dans une lettre d'avril 1751 à celui-ci : «*Car il est bien certain que ce n'est que depuis cette découverte qu'on puisse regarder la loi d'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances comme solidement établie, d'où dépend cependant toute la théorie de l'Astronomie*» [319]. Mais EULER n'abandonna pas pour autant l'ensemble de la théorie de l'éther et même encore son fils Jean Albert spécula en 1762 [322] sur la possibilité d'expliquer la gravitation à l'aide de la pression de l'éther. EULER y consacra un mémoire particulier en 1746 avec le titre «*De relaxatione motus planetarum*» [323], en effet, il restait profondément persuadé de l'existence de cette matière car un vide parfait serait trop loin de la vraie physique selon son opinion. Le problème de l'attraction devient alors un problème d'hydrodynamique avec une force perturbatrice du type :

$$F = -(\alpha v_r + \beta v_t)r^{-2} \quad (6.58)$$

EULER parvient à écrire les équations du mouvement tentant compte de 6.58. Mais il constate tout de suite que la force perturbatrice ne peut expliquer le mouvement de la ligne ou de celui de la ligne des nœuds. Par contre, il arrive à montrer que l'orbite d'une planète en présence d'une matière éthérique devient de plus en plus circulaire et que le temps de rotation diminue progressivement. Mais EULER est incapable de constater ces phénomènes pour les planètes pendant les siècles passés. Finalement le seul argument pour l'existence de l'éther restait l'accélération séculaire de la Lune, non explicable à première vue par la loi de la gravitation newtonienne. Ce fut T. MAYER qui expliquait alors cette accélération séculaire par des perturbations à très longue période, tel qu'EULER avait pu les déterminer pour les planètes Jupiter et Saturne. Ces perturbations pourraient être dues à un changement de l'excentricité de l'orbite de la Terre et rendraient impossible une influence éventuelle d'une force de résistance de l'éther [321]. Ce fut finalement LAPLACE en 1787 qui confirmait l'hypothèse de MAYER et une modification de la loi de la gravitation newtonienne en vue de tenir compte de la friction étherienne s'avérait superflue.

-V-

FINALEMENT LAPLACE prit en main la charge de montrer que la théorie newtonienne avec sa loi de l'attraction contenait les éléments suffisants pour la solution de tous les problèmes de mécanique céleste connus à la fin du XVIII^e siècle. Cette théorie était pour lui, selon une expression qui revient fréquemment sous sa plume : « *le vrai système du monde* ». Déjà dans son premier mémoire : « *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent* » [324] de 1776, LAPLACE aborde l'examen du principe de la gravitation universelle, en discutant les quatre propositions qui émanent de NEWTON et qui sont :

- l'attraction est en raison directe de la masse et réciproquement comme le carré de la distance ;
- la force attractive d'un corps est le résultat de l'attraction de chacune des parties qui la composent ;
- cette force se propage dans un instant, du corps attirant à celui qu'il attire ;
- elle agit de la même manière sur les corps en repos et en mouvement.

Ces affirmations, LAPLACE les formule dans la première partie de son papier qui est plutôt spéculative et se propose de trouver une raison métaphysique pour la loi newtonienne. LAPLACE prétend que les lois de la nature ont été conçues de façon à ce que l'univers serait toujours semblable à lui-même, en supposant que toutes ses dimensions viennent à augmenter ou à décroître proportionnellement. Il y a ici une référence étrange à des idées de POINCARÉ et au principe anthropomorphique. LAPLACE discute aussi la propagation de l'attraction : « *Il n'est pas vraisemblable que la vertu attractive où généralement qu'aucune des forces qui s'exercent à distance ne se communique dans l'instant d'un corps à l'autre ; car tout ce qui se transmet à travers l'espace nous paraît répondre successivement à ses différents points ; mais l'ignorance où nous sommes sur la nature des forces, et sur la manière dont elles sont transmises, doit nous rendre très retenus dans nos jugements, jusqu'à ce que l'expérience vienne nous éclairer.* » [126] LAPLACE admet qu'il est encore trop tôt pour décider d'une éventuelle vitesse de la propagation de cette force attractive, mais il est curieux de constater que sa quatrième assertion concernant l'attraction peut être mise en relation de la théorie de la relativité restreinte d'EINSTEIN. En effet LAPLACE note « *qu'il est naturel de penser que la vitesse d'un corps doit le soustraire en partie à l'effort de la pesanteur. Ce sentiment très vraisemblable en lui-même, serait incontestable, si la cause de cette force venait de l'impulsion d'un fluide quelconque ... Je considérerai la pesanteur d'une molécule de matière comme produite par l'impulsion d'un corpuscule infiniment plus petit qu'elle, et mû vers le centre de la Terre avec une vitesse quelconque.* » [126] Manifestement nous assistons ici à la naissance du graviton.

Dans tous ses mémoires, LAPLACE se limite exclusivement à l'utilisation de la loi de l'attraction sous sa forme newtonienne, comme nous allons encore le

voir dans la suite. Et il dessine un vaste tableau des résultats qu'il a obtenus grâce à cette hypothèse dans son œuvre monumentale qui est le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126]. Dans le préambule de son œuvre maîtresse, LAPLACE se propose : «*de présenter sous un même point de vue (i.e. la loi de l'attraction newtonienne) les théories éparses dans un grand nombre d'ouvrages et dont l'ensemble embrassant tous les résultats de la gravitation universelle sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, forme la mécanique céleste.*» [126]

Dans la préface du tome III du «*Traité*», LAPLACE rappelle encore une fois la recette de ce succès explicatif : «*C'est principalement dans les applications de l'analyse au système du monde, que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument sans lequel il eut été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets. qu'il est simple dans sa cause. Le géomètre embrasse maintenant dans ses formules, l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives, il remonte par la pensée, aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs ...* » [126] Et un peu plus loin, il continue : «*La théorie de la pesanteur, devenue par tant d'applications, un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connaître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1759 dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations comme d'une mine féconde, un grand nombre d'éléments importants et délicats qui sans l'analyse, y resteraient éternellement cachés.*» [126]

LAPLACE a transformé en paradigme le système de pensée newtonien, quoi qu'au XVIII^e siècle certains problèmes importants resteront à résoudre.

6.2.2 L'échange épistolaire entre Clairaut, d'Alembert et Euler

EN 1980 parut la correspondance de Leonard EULER avec A.-C. CLAIRAUT, J. D'ALEMBERT et J.-L. LAGRANGE [325]. Ce volume rassemble la plus grande partie des lettres qu'EULER avait écrites à ces trois savants et qui très partiellement avaient été publiées en plusieurs endroits plus ou moins bien accessibles.

Le volume en question comprend un ensemble de 138 lettres : 61 d'entr'elles appartiennent à la correspondance d'EULER avec CLAIRAUT, 40 à celle d'EULER avec D'ALEMBERT et les 37 dernières à celle d'EULER avec LAGRANGE. Les nombres des lettres d'EULER lui-même dans ces trois correspondances sont respectivement de 15, 14 et 18. Vu que la majorité de ces lettres sont éditées pour la première fois, et notamment la presque totalité de la correspondance entre CLAIRAUT et EULER ainsi qu'une très grande partie de celle entre D'ALEMBERT et EULER, elles jettent une lumière nouvelle et précise sur les travaux scientifiques en mathématiques et en mécanique céleste, poursuivis parallèlement par CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER. Elles sont donc des documents inestimables pour l'histoire des sciences au XVIII^e siècle et méritent un examen détaillé par tous ceux s'intéressant au sujet.

Dans le cadre de notre texte, nous nous limiterons dans ce qui suit, d'abord à la correspondance entre CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER et nous nous confinons en plus à la partie traitant des questions de mécanique céleste.

Comme beaucoup de ces lettres écrites par CLAIRAUT et par D'ALEMBERT ont été citées et commentées dans les chapitres respectifs à ces deux savants, il ne peut s'agir ici que d'un rappel succinct des questions abordées tout en mettant l'accent sur les lettres écrites par EULER.

La correspondance EULER-CLAIRAUT concernant les questions de mécanique céleste débute avec une lettre datée du 23 août 1744 dans laquelle CLAIRAUT annonce à EULER l'envoi de la partie principale de son mémoire sur la théorie de la Lune [172]. Les lettres suivantes de CLAIRAUT jusqu'en 1752 traitent pour la plupart du même sujet mais aussi du mouvement de Jupiter et de Saturne. La correspondance sur la théorie de la Lune apporte de nombreux détails nouveaux et importants sur l'épisode le plus dramatique de l'histoire de la mécanique céleste au XVIII^e siècle, à savoir que la loi de l'attraction universelle de NEWTON ne semblait pas très bien concorder avec les observations du mouvement réel. Les doutes à ce sujet apparaissent dès le début de l'échange de vues entre les deux partenaires. EULER, dans une lettre à CLAIRAUT du 30 septembre 1747, se range de l'avis de ce dernier. *«Que les forces qui agissent sur la Lune ne suivent pas exactement la règle de NEWTON, je puis alléguer plusieurs preuves, et en effet celle que vous tirez du mouvement de l'apogée est la plus éclatante, et je l'ai fort bien remarquée dans mes recherches sur la Lune, où j'ai trouvé que selon la théorie newtonienne le mouvement moyen de la Lune devrait être au mouvement de l'apogée comme 10.000.000 à 41.046, au lieu que les observations donnent cette raison comme 10.000.000 à 84.447,*

le nombre 84 447 étant plus que deux fois plus grand que 41.046, comme vous remarquez.» [325]

EULER resta longuement sceptique après le changement d'avis de CLAIRAUT, en décembre 1748 et maintenait une position formulée dans une lettre datée du 2 décembre 1747 à MAUPERTUIS [325] : « Mrs CLAIRAUT et d'ALEMBERT ont bien raison de soutenir que si l'attraction de la Terre diminuait exactement en raison réciproque des carrés des distances, le mouvement de l'apogée de la Lune devrait être deux fois plus rapide qu'il n'est en effet. J'avais d'abord remarqué la même chose, laquelle avec quelques autres circonstances (savoir que la parallaxe de la Lune est plus grande qu'elle ne devrait être selon la théorie, et qu'il y a quelques inégalités dans le mouvement de la Lune, qui sont incompatibles avec la théorie de NEWTON) m'a porté à soutenir que les forces des corps célestes ne suivent pas exactement la loi newtonienne ; ce que j'ai bien soigneusement étalé dans ma pièce sur Saturne [317]. Mais j'ai aussi remarqué que cette irrégularité peut non seulement subsister avec la théorie de NEWTON, mais qu'elle en est une suite nécessaire, car supposant que les moindres molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés des distances, pour les corps grands, cette même loi ne trouve plus lieu que lorsque les corps sont parfaitement sphériques » [325].

CLAIRAUT chercha tout de suite à persuader EULER. Dans une lettre du 28 mars 1749, il dit : « Je n'attendrai point que les pièces qui viendront pour la question de Saturne paraissent, comme vous le pensez pour publier mes recherches, on le verra ce que j'ai fait sur le problème des trois corps dans le volume de 1745 où j'ai inséré mon mémoire tel qu'il était fait avant que je visse, ni votre pièce, ni celle de M. BERNOULLI, ni aucune autre » [325]. Le mémoire auquel CLAIRAUT fait référence est bien sa pièce : « Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle » [172] dans laquelle il résout définitivement le problème du mouvement de la ligne des apsides. Dans la lettre suivante du 19 juin 1749, CLAIRAUT se référa à la présence de l'astronome A.-N. GRISCHOW lors de la séance du 17 mai 1749 à l'Académie Royale des Sciences, au cours de laquelle CLAIRAUT avait présenté sa rétractation et qui avait donné connaissance à EULER du changement d'opinion de celui-ci. Dans une lettre, aujourd'hui perdue, EULER pria CLAIRAUT de lui faire part de sa nouvelle méthode, ce que celui-ci fit dans une lettre du 21 juillet 1749. CLAIRAUT dit ici : « Je soupçonne donc que c'est pour avoir négligé les termes qui viennent des carrés des forces perturbatrices dans votre calcul lorsque vous intégrez vos premières équations différentio-différentielles, que vous n'êtes pas arrivé au vrai résultat. Du moins, c'est après avoir eu égard à ces termes que je suis parvenu à trouver à peu près le mouvement réel de l'apogée » [325]. Ces explications ne satisfirent pas entièrement EULER qui resta encore longtemps persuadé que la loi de la gravitation de NEWTON ne donnait pas à elle seule le moyen de concilier la théorie avec le mouvement observé de la Lune.

Manifestement, EULER ne comprenait pas entièrement la méthode de CLAIRAUT. Ainsi dans une lettre du 2 juin 1750 [325], dans laquelle il remercie CLAIRAUT pour l'envoi de quelques feuilles de son mémoire de 1745 [172] et dit

avoir compris l'élimination du temps des deux équations du mouvement de la Lune. Par contre, il est incapable de tirer à partir de l'équation :

$$d^2x + xd^2\phi = Axd^2\phi + Bd^2\phi \cos 2\eta \quad (6.59)$$

le mouvement vrai de l'apogée. Il est presque certain que cet échec temporaire d'EULER poussa celui-ci à proposer comme sujet du prix de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg pour l'année 1751 la théorie de l'orbite de la Lune en espérant que CLAIRAUT prit part au concours dont il était un des juges. En décembre 1750, CLAIRAUT présenta à ce concours un mémoire intitulé : «*Théorie de la Lune déduite du seul principe d'attraction*» [173]. Le 16 mars 1751, EULER informa CLAIRAUT qu'il avait lu sa pièce : «*avec une satisfaction infinie*» [325]. Et le 10 avril 1751, il put dire : «*Je suis maintenant tout à fait éclairci sur le mouvement de l'apogée de la Lune et que je le trouve après vous entièrement conforme avec la Théorie de NEWTON. Cette recherche m'a entraîné en de terribles calculs et j'ai enfin découvert la source de l'insuffisance des méthodes, que j'avais suivies jusqu'ici à cet égard, qui consistait dans la détermination incomplète d'une constante, que l'intégration introduisit dans le calcul, inconvénient, auquel votre méthode n'était pas assujettie ; mais à présent, comme deux méthodes tout à fait différentes conduisent à la même conclusion, il n'y aura plus personne qui refusera de reconnaître la justesse de votre recherche.*» [325] Et EULER récidivait dans une lettre du 29 juin 1751 quand il écrit à CLAIRAUT : «*Quelque répugnance que j'ai sentie de reconnaître la justesse de votre calcul sur le mouvement de l'apogée de la Lune, j'en suis maintenant d'autant plus sensiblement pénétré ; et plus je considère cette heureuse découverte, plus elle me paraît importante, et à mon avis, c'est la plus grande découverte dans la théorie de l'Astronomie, sans laquelle il serait absolument impossible de parvenir jamais à la connaissance des dérangements, que les planètes se causent les unes les autres dans leur mouvement. Car il est bien certain que ce n'est que depuis cette découverte qu'on puisse regarder la loi d'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances comme solidement établie d'où dépend cependant toute la Théorie de l'Astronomie.*» [325]

CLAIRAUT fut le lauréat du concours et sa pièce fut imprimée à St-Petersbourg en 1752. Mais il y avait un deuxième intérêt commun entre CLAIRAUT et EULER : c'était la théorie des orbites des comètes. Plusieurs remarques dans les lettres de CLAIRAUT à EULER en témoignent. Et en 1760, l'Académie de Pétersbourg proposa pour l'année 1761 un concours de prix sur la théorie du mouvement des comètes avec le sujet : «*Déterminer la théorie des perturbations que subissent les comètes dans leur mouvement du fait de l'attraction des planètes, et démontrer dans quelle mesure cette théorie s'accorde avec les observations de la comète de l'année 1759*». Or il se faisait que CLAIRAUT avait travaillé le sujet de façon intense en considérant la question comme un nouveau cas particulier du problème des trois corps. Son étude d'ensemble : «*Théorie du mouvement des comètes ...*» [199] avait été publiée en 1760 et il y donna

la date du passage dans le périhélie de la comète de HALLEY avec une exactitude remarquable. G.-F. MULLER, le secrétaire perpétuel de l'Académie l'incita à continuer ses recherches et à envoyer pour le concours un nouveau manuscrit. Et fin de l'année 1761, CLAIRAUT envoya un nouveau mémoire intitulé «*Recherches sur la comète des années 1531, 1607, 1682 et 1759 ...* » [327]. L'Académie partagea le prix entre CLAIRAUT et le fils de Leonard EULER, Jean Albert, et les deux mémoires furent publiés dès 1762 à St-Petersbourg. Comme tous les travaux du fils EULER furent contrôlés et patronnés par son père, il s'agissait là en fait de la dernière rencontre entre CLAIRAUT et L. EULER. A partir de 1752, la correspondance entre EULER et CLAIRAUT se tarit ou plutôt s'éteignit. Quoiqu'en fût la cause, l'on peut s'imaginer que les deux partenaires qui avaient entretenu un dialogue fructueux depuis de longues années, n'avaient plus rien à se dire. Cette hypothèse confirmerait aussi que, depuis le milieu du siècle, l'astronomie théorique avait atteint un seuil qui approchait du concept de la science normale, ce qui permettait dans la suite de prendre une nouvelle envolée révolutionnaire.

La correspondance d'EULER avec Jean D'ALEMBERT diffère de celle qu'il échangea avec CLAIRAUT, tant par son caractère général que par certaines des questions traitées. En effet, il y avait beaucoup de sujets de discorde entre les deux grands hommes qui se limitaient principalement à des sujets d'analyse. Dans le contexte qui nous préoccupe ici, nous nous limiterons aux questions de mécanique céleste qui opposaient depuis 1747 les deux interlocuteurs. D'ALEMBERT ne s'est véritablement intéressé à l'astronomie qu'à partir de mars 1746, à la suite de la décision prise par l'Académie des Sciences de choisir comme sujet de son concours de prix pour 1748, un cas particulier du problème des trois corps, la théorie du mouvement de Saturne et de Jupiter. Et c'est à l'Académie de Berlin, où siégeait EULER, qu'il adressera entre décembre 1746 et septembre 1747 ses premiers travaux dans ce domaine, tout comme les sujets de mécanique céleste deviennent le point principal dans les échanges épistolaires entre les deux hommes depuis cette date.

Dans sa lettre du 20 janvier, D'ALEMBERT révèle sa perplexité persistante devant la position audacieuse de CLAIRAUT quant à la forme de la loi de la gravitation : «*Dites-moi aussi Monsieur, si vous croyez que la différence entre le mouvement réel des apsides de la Lune et celui qu'on trouve par la théorie prouve nécessairement que l'attraction n'est pas exactement en raison inverse du carré de la distance. Tout ce qu'on en doit conclure, ce me semble, c'est que la force qui attire vers la Terre le centre de gravité de la Lune n'est pas comme le carré de la distance, mais il me paraît que cela doit être si la Lune n'est pas un corps sphérique et composé de couches concentriques homogènes.*» [325] Quant à EULER qui avait déjà considéré le modèle proposé par D'ALEMBERT et montré son inadaptation, il n'hésite pas à envisager une loi d'attraction différente de celle de NEWTON. Il en fait part à D'ALEMBERT dans sa lettre du 15 février 1748 à celui-ci : «*J'ai vu avec bien du plaisir que vous pensez comme moi sur les irrégularités qui paraissent se trouver dans les forces célestes, car j'avais d'abord fait cette remarque, que quoiqu'on accorde que les moindres*

particules de la matière s'attirent mutuellement en raison réciproque des carrés des distances, il ne s'ensuivra pas que cette même loi ait lieu dans les corps d'une grandeur finie, à moins que tous les deux corps, l'attirant et l'attiré, ne soient sphériques et composés d'une matière homogène, ou d'une autre forme qui revienne au même. Les recherches qu'on a faites sur l'attraction de la Terre, en tant que sa figure n'est pas sphérique, donnent clairement à connaître, que sa force d'attraction ne suit pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, mais qu'elle est comme»

$$\frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z^4} + \frac{\gamma}{z^6} + \dots \quad (6.60)$$

«*z* marquant la distance.» [325] Nous avons déjà vu que le modèle proposé par D'ALEMBERT et analysé par EULER concernant la forme du corps de la Lune était inadéquat pour justifier la différence dans le mouvement de la ligne des apsides entre la théorie et l'observation. La suite de la discussion épistolaire porte dans les quatre lettres suivantes, sur d'autres divergences entre théorie et observations constatées à propos de divers points particuliers du mouvement de la Lune, sur différentes possibilités d'accorder les prévisions théoriques aux résultats d'observations, sur la précision effective des tables lunaires de NEWTON et aussi sur certaines des méthodes employées par EULER dans son mémoire sur les perturbations mutuelles de Jupiter et de Saturne.

Le 17 mai 1749, CLAIRAUT se rétracta devant l'Académie Royale des Sciences concernant la modification de la loi de la gravitation. Tandis qu'EULER, après avoir vérifié ses calculs, maintient sa position favorable à une légère retouche de cette loi, D'ALEMBERT, dans une lettre du 20 juillet 1749, affirme son désaccord sur ce point : «*Quoi qu'il en soit, Monsieur, je vous avouerai qu'en supposant même que nous ne nous soyons point trompés dans le calcul du mouvement de l'apogée, je ne goûte nullement l'opinion où vous paraissez être, et où Monsieur CLAIRAUT était aussi, que l'attraction ne suit pas exactement la loi inverse du carré des distances. Si l'apogée de la Lune ne faisait en effet son tour qu'en 18 ans, en vertu de la force du Soleil, j'aimerais mieux expliquer son mouvement en neuf ans par le moyen de quelque force particulière magnétique ou autre qui vienne de la Terre, que de changer pour un seul phénomène, une loi qui s'accorde avec toutes les autres et qui est fort simple.*» [325] D'ALEMBERT, un paragraphe plus loin, tire une conclusion presque philosophique : «*Que résulte-t-il de tout cela, Monsieur ? C'est qu'il ne faut point se presser, et que nous devons prendre tout le temps nécessaire pour examiner une question si importante.*» [325]

Parallèlement au temps que D'ALEMBERT passe avec la rédaction finale du premier tome de l'«*Encyclopédie*», il continue à réfléchir au problème de la Lune. Et il intensifie ses recherches lorsqu'en janvier 1750 parvient à Paris le programme du concours de prix de l'Académie de St-Petersbourg sur la théorie de la Lune. Il est décidé à participer au concours, comme il l'annonce à CRAMER le 12 février 1750 [227]. Dans une lettre du 22 février 1750 à EULER, il précise que le travail considérable qu'il a fait dans les trois derniers mois,

lui a permis de constater l'accord de tous les mouvements de la Lune calculés d'après sa théorie, avec les observations. Et le 30 mars, D'ALEMBERT annonce à EULER que son travail sur la Lune est presque achevé et qu'il a «*poussé les calculs aussi loin que la patience humaine peut les porter*» [325]. Un peu plus loin, il continue : «*J'ai trouvé en particulier des choses très singulières dans le calcul du lieu de la Lune. A l'égard du mouvement de l'apogée, je le trouve assez conforme aux observations, et je ne doute pas que vous ne le trouviez comme CLAIRAUT et moi, si vous voulez vous donner la peine de calculer plus exactement la valeur du rayon vecteur de l'orbite lunaire, en vous servant pour cela de la belle méthode de votre pièce sur Saturne.*» [325] C'est ici la première fois que D'ALEMBERT annonce avoir réussi à prévoir correctement par la théorie des éléments du mouvement de l'apogée de la Lune.

Mais en octobre 1750, D'ALEMBERT renonce tout à coup à participer au concours de prix de l'Académie de St-Péterbourg et décide de publier lui-même son travail et, si possible avant l'impression de la pièce couronnée à St-Petersbourg. Tout laisse croire qu'il était profondément vexé par le résultat obtenu à Berlin avec son mémoire sur la résistance des fluides et dont il rendait EULER coupable. Il remit donc son manuscrit le 10 janvier 1751 au secrétaire perpétuel de l'Académie qui le data. Le mémoire correspond pour la plus grande partie au texte publié en 1754 comme tome I des «*Recherches sur différents points importants du Système du monde.*» [235]

Les rapports entre D'ALEMBERT et EULER se gâtèrent lorsque le premier écrivit dans une ajoute aux «*Recherches ...* » «*que EULER n'a encore rien publié de son travail sur ce sujet*» et que les tables qu'il a publiées antérieurement «*sont dressées les unes sur les observations et les autres sur des formules peu exactes*». Manifestement D'ALEMBERT n'a pas eu connaissance de la «*Theoria motus lunae*» [291] d'EULER survenue en février 1753 car il maintient qu'uniquement CLAIRAUT et lui étaient parvenus à donner à la théorie de la Lune une forme analytique. A partir de 1752, les questions de mécanique céleste n'ont plus été évoquées dans la correspondance des deux savants.

6.2.3 Les réflexions successives d'Euler sur le concept de la gravitation

—|—

Nous avons revu dans les paragraphes précédents que, non seulement CLAIRAUT et D'ALEMBERT doutaient de la validité de l'expression mathématique de la loi de la gravitation universelle, mais qu'EULER aussi avait de sérieux problèmes de compréhension avec celle-ci. Soulignons encore, que toute la discussion sur la validité de la loi de la gravitation était centrée autour du problème du mouvement de la ligne des apsides de la Lune. En effet les travaux des trois mathématiciens, CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER étaient intimement liés et BUFFON [188] mena un certain temps la discussion au sein de l'Académie

Royale des Sciences quant à la question cruciale de la validité de la théorie newtonienne. Nous avons relaté dans les chapitres précédents toute la péripétie des hésitations de CLAIRAUT à ce sujet et de son «*aveu*» en 1749. EULER n'eut besoin que de cette communication pour parvenir aux mêmes résultats, tout en employant une méthode différente, ce qui ne l'empêcha pas de reconnaître que CLAIRAUT en méritait tout l'honneur.

Avant d'accepter la validité des calculs de CLAIRAUT, EULER, tout comme D'ALEMBERT, avait fait l'hypothèse d'une force encore inconnue pour expliquer la différence entre les calculs et l'observation dans le mouvement de la ligne des apsides de la Lune. En effet, le problème principal était bien situé ici quoique EULER avec CLAIRAUT et D'ALEMBERT étaient d'avis que les planètes n'exerçaient qu'une action négligeable les unes sur les autres. Ainsi, EULER ne mentionne pas dans le texte de ses tables solaires de 1744 et 1746 [257] la possibilité du mouvement des nœuds et des apsides de la Terre. Bien au contraire, il suit STREET et FLAMSTEED [326, 328] en identifiant l'avance de l'aphélie de la Terre avec la pression des équinoxes. Cela équivaut au fait que les perturbations planétaires seraient négligeables. La question de la validité de la loi d'attraction newtonienne ne se posait pas encore à cette date. N'écrit-il pas, et ceci malgré les doutes exprimés par son ami Daniel BERNOULLI : «*l'hypothèse de la gravitation universelle satisfait si bien aux mouvements célestes et principalement à ceux de la Lune, qu'on ne peut plus douter que la Terre est attirée par la Lune, tout comme celle-ci est attirée par la Terre*» [257]. Il dit les mêmes choses dans un Mémoire lu à l'Académie de Berlin le 5 octobre 1744 [329]. Pour lui, les tables astronomiques des planètes primaires peuvent être construites sur la base de la solution exacte du problème des deux corps, comme si elles étaient attirées uniquement par le Soleil. Or, au moment où EULER fait cette affirmation, les différences entre les tables de STREET et les observations devenaient voyantes. Ainsi l'aphélie de la planète Mars avait avancé de $33'20''$ pendant un siècle, tandis que la ligne des nœuds retardait de $20'$. De plus les inégalités dans les mouvements de Jupiter et de Saturne n'étaient pas explicables dans le cadre d'un problème de deux corps.

EULER changea d'opinion à partir de l'année 1747, comme le démontre sa correspondance avec CLAIRAUT surtout, et D'ALEMBERT, qui a été présentée amplement dans plusieurs chapitres précédents. Mais aussi ses deux mémoires écrits en 1747 : «*Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*» [304] et «*Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*» [179] en témoignent. Ce dernier mémoire qu'EULER termina avant la fin de 1747, fut présenté par lui, pour répondre au sujet que l'Académie Royale des Sciences avait proposé pour 1748 avec le titre : «*Théorie de Saturne et de Jupiter par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux planètes paraissent se causer mutuellement, principalement dans le temps de leur conjonction*». L'Académie reçut trois réponses et couronna la pièce d'EULER qui fut imprimée en 1749.

Dans les deux mémoires, EULER fit de longues considérations sur la validité de la loi d'attraction newtonienne que nous allons présenter dans ce chapitre.

Les questions purement techniques de mécanique céleste de ces deux pièces seront exposées dans le chapitre suivant.

-II-

EULER développe dans le premier mémoire : «*Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*» [304] les quatre équations différentielles fondamentales qui reviennent dans tous ses travaux ultérieurs sur les perturbations planétaires. Marquant l'abandon de ses anciennes idées, il rejette explicitement les vues de STREET et des «*Tables Carolines*» pour revenir aux remarques newtoniennes faites dans les deuxième et troisième éditions des «*PRINCIPIA*» sur l'avance de l'aphélie de la planète Mars. Par contre, il doute que la force gravitationnelle de la Terre serait assez importante pour perturber les orbites de Mars et de Venus.

Avant d'aborder la solution des cinq problèmes fondamentaux qu'il se propose de traiter dans le mémoire et que nous allons analyser dans le chapitre suivant, EULER expose une vue d'ensemble des problèmes auxquels la mécanique céleste est exposée au milieu du XVIII^e siècle.

Il relève d'abord le problème des perturbations, c'est-à-dire des influences gravitationnelles mutuelles entre les planètes : «*Après la découverte des forces centrales, dont les Planètes principales sont poussées vers le Soleil, et les Satellites vers leurs principales, selon la raison renversée des carrés des distances, le mouvement des Planètes n'est jugé irrégulier, qu'en tant qu'il ne suit pas exactement cette loi générale. En effet, le mouvement d'une Planète serait parfaitement régulier, s'il était conforme aux règles établies par KEPLER ; ou ce qui revient au même, si la force, par laquelle le mouvement de cette Planète est modifié, était dirigée constamment vers le centre du Soleil, et qu'elle fût proportionnelle réciproquement aux carrés de sa distance au Soleil*» [304]. EULER donne ici pour la première fois une définition exacte et explicite du problème des perturbations qui a comme conséquence que chaque corps attiré par le Soleil n'est pas seulement soumis à une force centrale suivant le rayon vecteur mais aussi à une force perpendiculaire à celui-ci.

Le système solaire n'est pas statique, comme le suggère encore STREET dans ses «*Tables Carolines*». Il ne reconnaît aucun mouvement, ni dans le lieu des aphélies, ni dans celui des nœuds, par rapport aux étoiles fixes. EULER fait alors un raisonnement à rebours dérivé des théories newtoniennes dans les «*PRINCIPIA*» : «*Comme c'est une vérité constatée, que ni les aphélies des Planètes, ni leurs nœuds, ne seraient sujets à aucun changement, s'il n'y avait pas d'autre force, qui agissait sur les Planètes, que celle, qui étant dirigée vers le Soleil, décroît exactement dans la raison des carrés des distances, il s'ensuit nécessairement, ou que cette force par laquelle chaque Planète est actuellement poussée, ne soit pas dirigée précisément vers le centre du Soleil, ou qu'elle ne suive pas exactement la raison réciproque des carrés des distances ou qu'il*

y ait d'autres forces outre celle-ci, qui troublent le mouvement des Planètes en y causant ce changement observé dans leurs aphélie et nœuds» [304]. On ressent chez EULER une hésitation causée à la fois par la non-concordance de certains calculs astronomiques avec les observations, et l'ignorance d'autres forces inconnues encore, qui agissent dans la nature et qui ne se manifestent pas seulement dans l'attraction planétaire. Ainsi dans une lettre du 15 février 1746 [330] EULER écrit à DESLISLE qu'il avait trouvé que «le temps périodique de la Terre n'est pas constant mais diminue légèrement et que cette diminution est due à l'effet de la résistance de l'éther». Nous avons vu auparavant qu'EULER croyait un certain moment avoir trouvé dans l'existence d'un fluide éthérique une explication des déficiences de la loi newtonienne.

Mais dans son exposé, EULER revient d'abord à réfléchir sur la force gravitationnelle et l'interaction des planètes due à cette force : «Cependant, si nous supposons que cette force de la Terre, qui dans sa surface cause la pesanteur, décroît en raison carré des distances, elle deviendra si petite à la distance, où Mars ou Vénus se peuvent approcher, que son effet doit être absolument insensible. Mais il n'en est pas de même de la force dont les Satellites de Jupiter sont poussés vers lui ; cette force étant pareillement diminuée selon les carrés des distances, demeure encore assez considérable dans la région de Saturne, pour en altérer le mouvement. Et réciproquement, la force avec laquelle Saturne attire ses Satellites, s'étend encore avec assez de vigueur jusqu'à l'orbite de Jupiter pour y pouvoir causer quelque dérangement.» [304]

Et EULER de conclure que «dans Le Système de la gravitation universelle [il] devient donc par là très vraisemblable que toutes les Planètes ne sont pas seulement attirées vers le Soleil, mais qu'elles s'attirent aussi mutuellement les unes les autres, par des forces réciproquement proportionnelles aux carrés de leurs distances : et que même le Soleil est attiré vers les Planètes par des forces semblables» [304]. La situation devient inextricable car il n'y a plus de point fixe de référence et les calculs deviennent très difficiles comme en témoigne le cas, simple encore, du mouvement de la Lune où seulement trois forces sont en cause, mais qui est sujet pourtant à tant d'inégalités encore mal expliquées.

EULER vient alors à la forme mathématique de la loi de la gravitation et il écrit : «Car quelques recherches et réflexions que j'ai faites, tant sur l'origine de ces forces, que sur les dérangements, qu'on remarque dans le mouvement de la Lune, et des Planètes supérieures, m'ont porté à croire, que les forces, dont on soutient que les Planètes s'attirent les unes les autres, ne suivent pas exactement la raison réciproque des carrés des distances, et il me semble presque, que l'aberration de cette raison croît avec les distances, puisque quelques inégalités périodiques qu'on ne saurait attribuer à l'action des autres Planètes, se trouvent beaucoup plus grandes dans Saturne, que dans les autres Planètes. Et les Astronomes ont déjà remarqué que les Planètes supérieures s'écartent plus sensiblement des Tables Astronomiques, que les inférieures» [304]. Même si EULER, tout comme CLAIRAUT, met ici en doute la forme de la loi attractive, il est en contradiction avec ce dernier. En effet, CLAIRAUT pense à une loi qui, pour des distances Terre-Lune, diffère assez sensiblement de la forme newto-

nienne, tandis que pour des distances plus grandes, cette loi converge vers celle de l'inverse du carré des distances. EULER visiblement pense à une autre forme de la loi, mais il n'approfondit pas la question sur le plan mathématique.

Par contre, il avance certains problèmes qui pourraient se poser sur le plan physique : *«Car les partisans de ce système [newtonien] ne reconnaissent cette force d'attraction dans les corps célestes qu'en tant qu'ils sont composés de matière : or ils soutiennent que chaque particule de la matière est douée d'une force d'attraction proportionnelle à sa masse, et qui va en diminuant selon les carrés des distances. Donc la force de la gravité de la Terre, par exemple, sur un point placé hors d'elle, n'est autre chose que le résultat de toutes les forces dont ce point est attiré, vers toutes les particules de la matière, dont la Terre est composée. Mais quoique la force de chaque particule soit supposée exactement suivre la raison renversée des carrés des distances, il n'en suit pas que la force totale, qui en résulte se règle suivant la même raison, quelque figure qu'ait le corps entier. NEWTON n'a démontré cette loi de forces, qu'au cas où la Planète est ronde et composée de matière homogène, ou du moins de couches sphériques homogènes. Or dans le cas, où la figure de la Planète n'est pas sphérique, il n'est pas difficile de prouver par le calcul que la force résultante de toutes les attractions des particules de la matière, ne décroît plus dans la raison de carrés de la distance ni qu'elle est dirigée vers le centre de la Planète, ou vers quelqu'autre point fixe.»* [304]

De cette constatation, EULER conclut que les Planètes qui ne sont ni sphériques ni homogènes ne peuvent obéir de façon rigoureuse à la loi newtonienne de l'attraction : *«... il sera permis de croire que la force, dont les Planètes sont poussées vers le Soleil, ne se règle pas parfaitement sur la raison renversée des carrés des distances : et cette loi sera encore moins certaine, quand il s'agit des forces, dont les Planètes s'attirent mutuellement»* [304]. Il est donc fort vraisemblable que, ni les orbites des Planètes ne sont des ellipses parfaites, ni que leur mouvement se règle exactement sur les lois de KEPLER, même en négligeant les attractions mutuelles entre les différents corps célestes.

Après l'exposition des raisons physiques plaidant contre la forme newtonienne de la loi de la gravitation, EULER revient au mouvement de la Lune pour élargir encore ses doutes sur la forme de cette loi : *«... m'étant appliqué depuis longtemps avec tout le soin possible à approfondir les inégalités dans le mouvement de la Lune, j'ai été encore davantage fortifié dans ce sentiment [sceptique]. Car d'abord ayant supposé, que les forces tant de la Terre que du Soleil, qui agissent sur la Lune, sont parfaitement proportionnelles réciproquement aux carrés des distances, j'ai trouvé toujours le mouvement de l'apogée presque deux fois plus lent que les observations le marquent ; et quoique plusieurs petits termes que j'ai été obligé de négliger dans le calcul, puissent accélérer le mouvement de l'apogée, j'ai pourtant bien vu après plusieurs recherches, qu'ils ne sauraient de beaucoup près suppléer à ce défaut, et qu'il faut absolument, que les forces, dont la Lune est actuellement sollicitée, soient un peu différentes de celles, que j'avais supposées ; car la moindre différence dans les forces sollicitantes en produit une très considérable dans le mouvement de l'apogée. J'ai*

remarqué aussi une petite différence entre le mouvement de la ligne des nœuds, que le calcul donne, et celui que les observations ont donné à connaître, qui vient sans doute de la même source.» [304]

Dans la suite, EULER entre dans les détails de ses difficultés de calcul : soit la distance moyenne de la Lune, soit la parallaxe ne correspondent pas aux données observées. Mais les difficultés augmentent encore si on prend en considération les forces qui dépendent du Soleil et EULER de constater que : «... ayant examiné un grand nombre d'observations, j'ai remarqué qu'il y faut absolument faire quelque changement, et que les équations qui dépendent uniquement de l'excentricité et de l'anomalie moyenne, ne peuvent être calculées selon les règles ordinaires. Toutes ces raisons jointes paraissent donc prouver invinciblement, que les forces centripètes qu'on conçoit dans le Ciel, ne suivent pas exactement la loi établie par NEWTON.» [304]

EULER tire une conclusion générale qui reflète son inaptitude à trancher le problème, conditionnée par l'ignorance des forces réelles dans l'univers : «La théorie de l'Astronomie est donc encore beaucoup plus éloignée du degré de perfection, auquel on pourrait penser, qu'elle soit déjà portée. Car si les forces, dont le Soleil agit sur les Planètes, et celles-ci les unes sur les autres, étaient exactement en raison renversée des carrés des distances, elles seraient connues, et par conséquent la perfection de la théorie dépendrait de la solution de ce problème. Que les forces, dont une Planète est sollicitée, étant connues, on détermine le mouvement de cette Planète. Ce problème tant difficile qu'il puisse être, appartient néanmoins à la Mécanique pure, et on pourrait espérer qu'à l'aide de quelques nouvelles découvertes dans l'Analyse, on saurait enfin parvenir à sa solution. Mais comme la loi même des forces, dont les Planètes sont sollicitées, n'est pas encore parfaitement connue, ce n'est plus qu'une affaire de l'Analyse seule : et il en faut bien davantage pour travailler à la perfection de l'Astronomie théorique. Et il semble même, qu'il n'y ait d'autre chemin pour parvenir à ce but, que de s'imaginer plusieurs nouvelles hypothèses sur la loi des forces, et après y avoir appliqué le calcul, de chercher, combien chacune s'écarte des observations, afin que d'un grand nombre d'erreurs, on puisse enfin conclure la vérité.» [304]

Ce programme de recherche, plutôt pessimiste formulé par EULER devient tout à coup inutile par la découverte de CLAIRAUT de 1749 et l'on peut comprendre parfaitement la réaction enthousiaste d'EULER quand il adresse des éloges à celui-ci dans plusieurs lettres vers 1750. Ainsi dans sa correspondance du 29 juin 1751 [331] EULER remarque que : «plus il considère cette heureuse découverte, plus elle lui semble être, à son opinion, la plus grande dans la théorie de l'Astronomie sans laquelle il serait absolument impossible de pouvoir connaître les perturbations que les Planètes se causent mutuellement. Car il est certain que c'est seulement depuis cette découverte que l'on peut regarder la loi de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances comme étant solidement établie que de celle-ci dépend toute la théorie de l'Astronomie». Avec cette constatation, EULER est loin d'avoir fait un simple compliment à CLAIRAUT. En témoigne sa lettre à Wettstein du 27 avril 1751 dans laquelle il

dit que «... après des calculs terribles, j'ai enfin trouvé à ma satisfaction que Mr CLAIRAUT a raison et que cette théorie est effectivement suffisante pour expliquer le mouvement de l'apogée de la Lune. Or cette recherche est de la dernière difficulté et ceux qui ont prétendu jusqu'ici avoir prouvé ce bel accord de la théorie avec la vérité se sont trompés. C'est donc à Mr CLAIRAUT qu'on est redevable de cette importante découverte qui donne un tout nouveau relief à la théorie du grand NEWTON et ce n'est qu'à présent qu'on peut atteindre de bonnes tables astronomiques pour la Lune» [332]

—III—

EGALEMENT dans le deuxième mémoire écrit en 1747 [179], EULER revient à ses considérations sur la forme de la loi d'attraction. Comme les deux mémoires ont probablement été écrits simultanément, les réflexions eulériennes se ressemblent fortement.

La pièce : «*Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*» [179] fut la réponse d'EULER au concours proposé par l'Académie Royale des Sciences de Paris pour l'année 1748. L'Académie avait demandé une «*Théorie de Saturne et de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux Planètes paraissent se causer mutuellement, principalement vers le temps de leur conjonction*». Le mémoire qu'EULER soumettait est une pièce maîtresse de la mécanique céleste, qui sera amplement présentée et discutée dans le chapitre traitant des travaux d'EULER en cette branche. Dans ce qui suit, nous nous limiterons à l'introduction précédant les résultats mathématiques.

EULER fixe les limites de son sujet dès la première phrase : «... il n'y a aucun doute que l'Académie Royale n'ait en vue la théorie de NEWTON, fondée sur la gravitation universelle, qu'on a trouvée jusqu'ici si admirablement bien d'accord avec tous les mouvements célestes que quelles que soient les inégalités qui se trouvent dans le mouvement des Planètes, on peut toujours hardiment soutenir, que l'attraction mutuelle des Planètes en est la cause» [179]. Et tout de suite, il convertit le problème à étudier en un problème de mécanique, celui du mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement en raison composée de celle de leurs masses, et de la raison inverse des carrés de leurs distances, et de mettre ensuite à la place de l'un de ces trois corps le Soleil, et les corps de Saturne et de Jupiter au lieu des deux autres. EULER insiste que «*ce Problème est un des plus difficiles de la mécanique et dont on ne saurait espérer une solution parfaite, à moins qu'on ne fasse des progrès beaucoup plus considérables en Analyse*» [179]. Mais EULER espère trouver des solutions approchées vu la disparité des masses entre le Soleil et les deux Planètes et le fait que celles-ci ont des orbites très proches d'un cercle. Il constate quand même que si on «*s'enfonce dans cette recherche, on s'apercevra bientôt qu'elle est beaucoup plus difficile que celle du mouvement de la Lune*» [179]

EULER expose ensuite sa méthodologie qui consiste à avancer pas à pas et de faire des hypothèses de plus en plus réalistes tout en avançant dans les calculs. Mais il met aussi en garde quant à l'exactitude parfaite de ses résultats : *«Aussi ai-je été bien surpris de voir, après avoir examiné un grand nombre d'observations, que les inégalités tirées de la théorie ne sont pas suffisantes pour expliquer toutes les irrégularités dont les observations sont troublées ; et qu'il s'y trouve même des inégalités d'une autre espèce, qui sont presque aussi grandes que celles qui viennent de l'action de Saturne»* [179]. Voilà donc revenu le doute eulerien sur la représentativité de la loi de l'attraction et son aptitude à expliquer la totalité des mouvements dans l'univers quand il écrit que sa théorie de Jupiter et Saturne *«donne à connaître que les forces que nous concevons dans le ciel, ne sont pas les seules qui agissent sur les Planètes, ou qu'elles ne suivent pas exactement la loi que nous leur adjugeons.»* [179]

Ce scepticisme affiché par EULER ne devrait pourtant pas le disqualifier pour le concours de l'Académie et il plaide qu'il a de plus grands droits à prétendre au prix que ceux qui ne se sont pas encore aperçu de l'insuffisance de la théorie newtonienne : *«On conviendra aisément que si cette théorie a besoin de quelque correction, ce doit être une recherche qui demande un beaucoup plus grand nombre d'exactes observations, et encore un plus long temps pour les examiner, et en corriger la théorie»* [179]. Et puis, il enchaîne : *«Ayant comparé fort soigneusement les observations de la Lune avec la théorie, j'ai trouvé que la distance de la Lune à la Terre n'est pas si grande qu'elle devrait être selon la théorie : d'où il s'ensuit que la gravité de la Lune vers la Terre est un peu moindre, que selon la raison inverse des carrés des distances : et quelques petites irrégularités dans le mouvement de la Lune, qu'on ne saurait expliquer par cette théorie, m'ont encore davantage confirmé dans ce sentiment. Il me semble donc que la proportion newtonienne selon les carrés des distances n'est vraie qu'à peu près dans les forces des corps célestes, et que peut-être elle s'écarte d'autant plus de la vérité que les distances sont grandes. Dans ce cas, il n'y aurait donc pas lieu de s'étonner si le mouvement de Saturne était assujetti encore à d'autres inégalités qu'à celles qui sont causées par l'action de Jupiter : et il me paraît fort vraisemblable que l'action même de Jupiter sur le corps de Saturne, s'écarte considérablement de la raison inverse des carrés des distances.»* [179]

Puis EULER procède à une conclusion générale quant à la nature de la force gravitationnelle : *«Si l'on croit que la gravitation universelle a une cause physique ou mécanique, on sera presque forcé d'accorder, qu'elle ne s'étend point à l'infini : et alors il faudra avouer que les forces des corps célestes décroissent davantage que selon la raison carrée des distances, puisque cette raison les répandrait à l'infini : mais aussi ceux mêmes qui regardent tant l'attraction que la raison renversée des carrés des distances, comme une propriété essentielle de la matière, ne sauraient nier cette irrégularité que je viens d'avancer.»* [179] EULER avance ici une idée profonde : celle de la stabilité de l'univers tout entier, qui n'a trouvé des réponses que bien plus tard. [333]

EULER revient encore à ses considérations du premier mémoire de 1747

[304] qui ont été présentées plus en haut et qui font la distinction entre un corps céleste qui peut être assimilé à un point matériel et une planète qui est sphéroïdale et dont la gravité n'est ni constamment dirigée vers son centre, ni proportionnelle inverse aux carrés des distances. *«Puisque le corps de Jupiter est le plus aplati de toutes les Planètes, sa force attractive pourra considérablement différer de la raison établie, et la force du Soleil même pourra s'en écarter un peu. Ensuite, quand même la force du corps attirant serait exactement conforme à cette raison, la figure du corps attiré y peut apporter quelques irrégularités, en tant que la direction moyenne de toutes les forces qui agissent sur les parties de ce corps, ne passe pas par son centre de gravité, (d'où il doit naître un mouvement de rotation ou une mutation de son axe) et que la force résultante suit ordinairement une règle tout à fait différente, qu'il est difficile d'exprimer par une formule algébrique finie.»* [179]

Malgré ces réserves, la décision d'EULER d'appliquer dans son mémoire la loi newtonienne paraît à première vue étrange, et elle n'est justifiable que par son indécision d'introduire une autre loi des forces gravitationnelles. Il dit en effet : *«Je suivrai dans mes recherches théoriques exactement le système d'attraction tel qu'il est adopté aujourd'hui par tous les Astronomes ; et je supposerai que les forces, tant du Soleil que des Planètes, décroissent précisément dans la raison carrée des distances, et qu'elles agissent sur le centre de gravité des corps qui en sont sollicités»* [179]. EULER fait ici un raisonnement à rebours : toutes les inégalités non explicables avec cette hypothèse sont des faits qui témoignent en vue de la modification nécessaire de la loi newtonienne de l'attraction sans que pour autant, il arrive à en formuler une autre expression.

–IV–

EULER REVIENT encore dans plusieurs autres travaux sur la forme de la loi de la gravitation et, à titre exemplaire, nous présentons ses vues dans deux autres mémoires écrits dans l'année 1753 lors de son séjour à Berlin mais tous les deux publiés dans les actes de l'Académie de St-Petersbourg. Ainsi dans la pièce : *«De perturbatione motus Planetarum ab eorum Figura non sphaerica oriunda»* [335], EULER émet encore ses doutes quant à l'exactitude de la forme newtonienne de la loi de la gravitation dans l'avant-propos de ce travail. C'est lors de la préparation pour l'impression de ce mémoire que CLAIRAUT avertit EULER de sa découverte du résultat exact de la détermination du mouvement de la ligne des apsides, résultat qui convainquit EULER et qui rend les acquis du texte quelque peu hybrides. Dans ce texte, EULER cherche à expliquer les perturbations de l'orbite lunaire en admettant une forme non sphérique de la Lune. Pour ce faire, il admet que celle-ci serait constituée de deux sphères liées par une barre rigide. Pour que le mouvement de ce corps soit stable, il faut que la barre soit dirigée toujours vers le centre de la force attractive. Mais la forme adoptée provoque un mouvement de la ligne des apsides à l'aide

duquel EULER cherche à combler la différence entre l'observation et les premiers calculs de CLAIRAUT. Et il trouve un résultat impossible physiquement : l'axe longitudinal de la Lune devrait avoir une longueur de trois diamètres terrestres. Les résultats que CLAIRAUT obtint en 1749 réduisent le travail d'EULER au statut d'un exercice purement théorique.

EULER reprit la discussion sur la loi de la gravitation encore une fois dans sa première théorie de la Lune. Celle-ci fut composée vers 1751 et accompagna son jugement sur la pièce que A.-C. CLAIRAUT [173] avait remis à St-Petersbourg afin de concourir pour le prix que cette jeune Académie avait mis à concours. Nous avons déjà vu que EULER, étant membre honoraire de cette Académie qu'il avait quitté pour aller à Berlin, avait été sollicité pour proposer des sujets de prix. Il en proposa quatre et dont le premier fut choisi : «*Si les inégalités qui sont observées dans le mouvement de la Lune sont à expliquer par la Théorie newtonienne ou pas ? Et comment une théorie vraie qui expliquerait le lieu exact de la Lune pourrait être définie*» [201]. Ce sujet, tout comme deux autres encore témoignent de la préoccupation eulerienne concernant l'adéquation ou l'inadéquation de la théorie newtonienne. Il était pleinement satisfait du choix que les académiciens avaient fait, comme en témoigne une lettre d'EULER à TEPLOV du 3 janvier 1750 [332]. De cette lettre ressort combien EULER était intrigué par la volte-face de CLAIRAUT de 1749 où celui-ci se muta du critique en protagoniste de la théorie newtonienne sans pour autant découvrir les raisons de son changement d'esprit. EULER écrivit : «*Mais ce qui est le plus remarquable dans cette controverse vaine, est que M. CLAIRAUT, qui plusieurs fois a souligné l'insuffisance de la théorie newtonienne en ce qui concerne le mouvement de la ligne des apsides de la Lune, a soudainement changé d'opinion et a déclaré qu'il avait fait une erreur dans ses calculs et qu'après avoir corrigé ses erreurs, il trouve que la théorie est en accord parfait avec les observations ... En ce qui me concerne, je vous confesse Monsieur que j'ai une opinion complètement différente à ce sujet et mes calculations me paraissent être trop claires pour pouvoir penser que la théorie pourrait donner plus de 20° pour le mouvement annuel de l'apogée lunaire. Or, M. CLAIRAUT persiste dans ses vues malgré mes expositions*» [332]. Quelques phrases plus loin, EULER fait voir toute son impatience pour connaître les raisons qui ont fait changer CLAIRAUT d'opinion : «*Jusqu'à maintenant, CLAIRAUT a fait un mystère autour de sa nouvelle méthode, mais dès qu'il la publiera, et puisqu'il ne peut être qu'une question de calcul, nous tous seront, ou bien persuadés et convaincus de son résultat, ou bien nous trouverons quelque erreur. Et quoique puisse être l'issue, l'astronomie, la physique et l'analyse en profiteront.*» [332]

EULER fut nommé commissaire du concours pour l'année 1751 et il reçut en mars de cette année les quatre mémoires qui avaient été introduits. Dans une lettre à CLAIRAUT [331] du 16 mars 1751, il écrit à celui-ci : «*Je crois que je ne me trompe pas, quand je vous attribue la pièce qui porte pour devise : Qua causa argentea Phoebe etc.*». Puis EULER tranquillise CLAIRAUT sur les causes qui avaient fait reculer la date d'admission des pièces pour le concours au 1^{er} juin 1751 ; changement qui n'était pas provoqué par des académiciens

français car personne, ni même D'ALEMBERT, n'avait marqué un intérêt pour la participation à ce concours. Et il poursuit dans cette même lettre : «*J'aurai donc l'honneur de vous dire, que j'ai lu avec une satisfaction infinie votre pièce, que j'avais attendue avec autant d'impatience. C'est un magnifique tour d'adresse, que vous avez ramené tous les angles, qui doivent entrer dans le calcul, à des multiples de votre angle ν , ce qui rend d'abord tous les termes intégrables. C'est à mon avis le principal mérite de votre solution, vu que vous arrivez par ce moyen d'abord au vrai mouvement de l'apogée ; et je dois avouer qu'à cet égard, votre méthode est de loin préférable, à celle dont je me suis servie.*» [331]

La lecture de la pièce de CLAIRAUT avait redonné le goût à EULER de se consacrer à nouveau à la théorie de la Lune. Ce nouvel intérêt aboutit avec le grand mémoire : «*Théoria motus lunae*» [291] publié par l'Académie de St-Petersbourg ensemble avec la pièce de CLAIRAUT qui avait remporté le prix du concours. Le mémoire en question est connu comme étant la première théorie de la Lune d'EULER qui résolvait, après CLAIRAUT, la question du mouvement de l'apogée de la Lune, quoique d'une façon différente à celle employée par celui-ci. EULER ressent une satisfaction réelle par sa réussite scientifique, que l'on remarque encore dans sa lettre à CLAIRAUT du 10 avril 1751 : «*J'ai enfin la satisfaction de vous marquer que je suis maintenant tout à fait éclairci sur le mouvement de l'apogée de la Lune et que je trouve après vous entièrement conforme avec la Théorie de NEWTON. Cette recherche m'a entraîné en de terribles calculs et j'ai enfin découvert la source de l'insuffisance des méthodes, que j'avais suivies jusqu'ici à cet égard, qui consistait dans la détermination incomplète d'une constante, que l'intégration introduisit dans le calcul, inconvénient, auquel votre méthode n'était pas assujettie ; mais à présent comme deux méthodes tout à fait différentes conduisent à la même conclusion, il n'y aura plus personne, qui refusera de reconnaître la justesse de votre recherche*» [331]. Plus loin, EULER insiste sur sa propre méthode, entièrement différente de celle de son correspondant : «*... voilà comme je m'y suis pris : au lieu de supposer la force de la Terre sur la Lune = m/x^2 pour la distance x , je l'ai exprimée par $m/x^2 - \mu$ dans le dessein de déterminer le terme μ en sorte que j'obtienne le même mouvement de l'apogée, que les observations donnent et j'ai enfin trouvé contre toute mon attente, que ce terme doit être supposé si petit, qu'on le peut regarder sans faute comme rien ; au lieu que suivant mon sentiment précédent, il aurait dû devenir assez considérable.*» [331]

EULER est dorénavant convaincu de l'exactitude de la loi d'attraction newtonienne, tout comme de son importance vitale pour la mécanique céleste. D'après ses mots, la découverte de CLAIRAUT a marqué le pas. «*Car il est bien certain que ce n'est que depuis cette découverte, qu'on puisse regarder la loi d'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances comme solidement établie d'où dépend cependant toute la théorie de l'astronomie.*» [331]

La dissertation d'EULER avait donc comme but principal de résoudre la question du mouvement de l'apogée de la Lune. Dans l'introduction à son texte, il dit : «*Le célèbre CLAIRAUT, n'ayant pas encore exposé publiquement*

les raisons qui l'ont porté à rétracter sa première assertion sur l'insuffisance de l'attraction newtonienne, qu'il me soit permis, à moi qui ai toujours été d'une opinion contraire à celle qu'il énonce maintenant, et qui m'y suis confirmé depuis longtemps par plusieurs méthodes différentes, de ne pas regarder la question comme décidée jusqu'à ce que je sois parvenu à la résoudre par mes propres recherches» [291]. EULER expose alors sa manière de procéder : «Je considérerai d'abord le problème dans sa plus grande généralité, afin de déterminer le mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques ; j'introduirai ensuite dans le calcul les expressions de celles auxquelles la Lune est soumise, et je donnerai les équations de son mouvement ; je les transformerai de diverses manières, jusqu'à ce qu'elles soient mises sous la forme la plus convenable ; enfin je m'attacherai à en conclure, tout le mouvement de l'apogée que toutes les inégalités de la Lune, de manière à parvenir à leurs véritables expressions, dans le cas même où la loi de NEWTON serait en défaut.» [291]

Plus loin dans son Introduction, EULER conclut que, «la considération de l'apogée de la Lune est le moyen le plus sûr pour décider sur la validité de la Théorie newtonienne. En effet, si pour une inégalité dans le mouvement de la Lune quelconque, dérivée théoriquement, les observations donnent des valeurs quelque peu différentes, il n'y a pas de raison pour douter de l'exactitude de la théorie newtonienne, il n'en est plus ainsi pour la comparaison des valeurs du mouvement de l'apogée lunaire calculées et observées. Si les forces agissant sur la Lune dévient de celles calculées d'après NEWTON d'une valeur même imperceptible, l'effet sur le mouvement de la ligne des apsides peut différer de plusieurs degrés. Mais comme une telle différence ne peut raisonnablement être attribuée à une erreur d'observation, l'investigation du mouvement de l'apogée fournit le critère le plus certain pour juger de la validité de la théorie newtonienne.» [291]

Même si pour EULER, certaines questions, comme celle de la présence d'un fluide éthérique dans l'espace, n'étaient pas encore décidées, il était dorénavant persuadé de la validité universelle de la loi newtonienne et il était prêt à poursuivre toutes les conséquences résultant de l'acceptation de cette hypothèse avec la rigueur la plus stricte.

En 1756, EULER revient une dernière fois à la question de la loi de l'attraction newtonienne. Dans la préface de son mémoire [334] qui gagna le prix de l'Académie Royale des Sciences de cette année, il exprima sa conviction dans l'exactitude de cette loi et il fonda celle-ci sur le calcul des aphélies et du mouvement des nœuds des orbites planétaires confirmé par les observations. L'explication des perturbations de Saturne par Jupiter et la dérivation du mouvement de la ligne des apsides de la Lune par CLAIRAUT sont d'autres points forts qui militent pour la vérité de la loi newtonienne. Si donc, d'après EULER, tous les progrès de l'astronomie doivent dorénavant être basés sur ladite loi, il subsiste la difficulté que la solution du problème du mouvement de trois ou plusieurs corps, interagissant suivant la loi des carrés inverses de leurs distances, surpasse de loin les capacités de l'esprit humain. Seul le fait que les perturbations mutuelles des planètes soient extrêmement petites permet de séparer

les effets causés individuellement par celles-ci et d'introduire des approximations successives. EULER consacrera plusieurs mémoires à la réalisation de ce programme scientifique.

6.3 Euler — mécanicien du Cosmos

6.3.1 La mécanique céleste au milieu du XVIII^e siècle, une science presque achevée

APRÈS L'ÉCHEC PARTIEL de la théorie newtonienne de la Lune et l'impossibilité de tenir compte d'une manière quantitative des perturbations mutuelles des planètes avec les méthodes synthétiques employées dans les «PRINCIPIA», la mécanique céleste était fixée au milieu du XVIII^e siècle sur la solution de ces deux problèmes par les méthodes de l'analyse. Des problèmes complémentaires étaient la précession des équinoxes et la libration de la Lune. Le but principal des recherches fut la correction des tables entreprise par HALLEY, FLAMSTEED, CASSINI, CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, MAYER et d'autres.

Différents livres importants pour les développements théoriques ultérieurs virent le jour dans la première moitié du XVIII^e siècle. À côté des 2^e et 3^e éditions des «PRINCIPIA»[1], les textes principaux sont sans doute le bel ouvrage de CLAIRAUT sur la figure de la Terre [157], ainsi que le «*Traité de Dynamique*» [215], de D'ALEMBERT qui ont paru tous les deux en 1743. Du côté de l'analyse mathématique, il faut absolument mentionner le «*Traité de Fluxions*» de MACLAURIN, paraissant en 1742 [336], et qui pour la première fois substitue aux formules des forces tangentielles et des forces normales, la décomposition des forces suivant trois axes rectangulaires, que sa simplicité a fait ensuite généralement adopter. En même temps, EULER, lors de son séjour à l'Académie de Berlin rédige ses traités d'analyse, qui furent édités à plusieurs reprises et fournirent les bases des nouvelles mathématiques pour les astronomes intéressés à la théorie des mouvements célestes. Il y eut d'abord l'«*Introductio*» [288] en trois tomes de 1748 donnant une introduction à l'algèbre et aux séries, mais aussi à la géométrie analytique et à la discussion des courbes. Les «*Institutiones calculi differentialis*» [289] donnent de nombreux exemples de calcul de dérivées, des transformations de séries et la théorie de l'interpolation. Les «*Institutiones calculi integralis*» [290] expliquent l'intégration comme étant l'inverse de la différentiation. Mais le traité donne aussi de nombreux exemples d'intégrales de fonctions rationnelles, irrationnelles et transcendentes, ainsi que la théorie des équations différentielles du premier ordre et d'ordre supérieur. En même temps, EULER aborde ici le calcul des variations destiné à jouer un rôle important dans le développement futur de la mécanique céleste. Dans ces traités, EULER adopta aussi une vue complètement nouvelle concernant les fonctions trigonométriques, qui sont dorénavant définies comme des rapports de longueurs. Cette nouvelle approche lui a permis de développer les expressions irrationnelles, apparaissant dans les équations différentielles de la théorie

newtonienne, en séries de FOURIER plus facilement intégrables, comme nous allons le voir encore dans les détails dans la discussion des principaux textes de mécanique céleste d'EULER.

Un des événements principaux, juste avant le milieu du XVIII^e siècle, comme nous l'avons déjà vu, furent les doutes concernant la validité de la loi d'attraction newtonienne apparaissant à la fois chez CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER. Les péripéties de cet épisode ont été retracées en plusieurs endroits du présent texte et ne doivent plus être présentées ici. Après la rétractation fracassante de CLAIRAUT devant l'Académie des Sciences et l'acceptation de ses arguments par D'ALEMBERT et EULER, tout rentra dans l'ordre concernant cette question essentielle pour le développement futur de la discipline. A partir de la deuxième moitié du XVIII^e siècle, les Académies, en proposant des prix sur des questions d'astronomie physique, n'accueillirent plus que les pièces fondées sur la théorie newtonienne de l'attraction. Elles canalisèrent ainsi les axes de recherche et propagèrent l'idée de la gravitation universelle en couronnant les pièces aussi de savants étrangers, travaillant dans cette matière.

Nous assistons ainsi, après un certain nombre d'années de repos suivant la parution de la 3^e édition des «PRINCIPIA» en 1726, à une renaissance fulminante de travaux sur l'astronomie théorique vers le milieu du siècle, traitant des effets de l'attraction réciproque des corps célestes, dont il importe le plus de connaître les mouvements. Il semble que tout à coup, l'époque soit arrivée où les esprits mûrs en quelque sorte pour les découvertes, se rencontrent sur les mêmes routes, où les géomètres se partageront la gloire sans se l'enlever.

Mais si la forme de la loi de la gravitation n'est plus mise en doute, le chemin vers la compréhension complète de tous les phénomènes planétaires est encore long et débouche sur le XIX^e siècle avec les travaux de LAGRANGE et de LAPLACE. Et l'explication du mouvement de la ligne des apsides de Mercure n'a pu se faire qu'au XX^e siècle grâce à la théorie de la relativité.

Les étapes dans le développement de la mécanique céleste vers le milieu du siècle sont les suivantes :

- il fallait d'abord formuler les équations différentielles. Cela fut fait de façon indépendante par CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER comme il a été exposé dans les chapitres antérieurs consacrés aux deux premiers. Le prochain chapitre expliquera en détail l'approche d'EULER. Il est certain que les trois auteurs étaient familiers avec la discussion de NEWTON du problème des trois corps dans la PROPOSITION LXVI du LIVRE PREMIER et connaissaient donc la décomposition de la force perturbatrice en une composante radiale et une composante perpendiculaire au rayon vecteur. Mais tous les trois préféraient une formulation analytique de cette décomposition, ce qui était nouveau par rapport à l'approche newtonienne ;
- les équations différentielles, exprimant les relations entre les forces et les accélérations, contiennent un facteur proportionnel à l'inverse du cube de la distance entre la planète perturbante et la planète perturbée et cette expression, en termes de coordonnées héliocentriques des deux corps, est une expression irrationnelle, impossible à intégrer, sauf de façon approxi-

mative. Si les méthodes de résolution de CLAIRAUT et de D'ALEMBERT avaient su se passer de la prise en compte explicite de ce terme, ce fut une intuition générale d'EULER d'introduire des séries trigonométriques en vue d'obtenir des approximations facilement intégrables terme par terme. Or, l'utilisation de telles séries présupposait une méthode commode en vue de calculer approximativement les termes successifs de ces séries. EULER, comme nous allons le voir dans un prochain chapitre, proposa un algorithme pour la résolution de ce problème ;

- la solution des équations différentielles pour le rayon vecteur contient des termes proportionnels au temps qui furent appelés au XVIII^e siècle : «*arcs de cercle*». Tout de suite après la découverte d'EULER de ce fait en 1747 [185], beaucoup de réflexions furent consacrées en vue de positionner l'importance de ce résultat à l'intérieur de la théorie, et de se rendre compte qu'il était, ou bien une insuffisance de la théorie algébrique utilisée, ou qu'il était une indication signalant l'instabilité fondamentale du système solaire. Cette question, importante entre toutes, fut liée très vite à un autre développement des méthodes de l'astronomie théorique, à savoir la variation des paramètres orbitaux, initiée par EULER également, et qui sera discutée dans un prochain chapitre. Elle occupera principalement le développement des méthodes de calcul pendant la deuxième moitié du XVIII^e siècle. Il en sera rendu compte dans la présentation succincte des œuvres de LAGRANGE et LAPLACE dans la suite de ce texte ;
- dans cette deuxième moitié du XVIII^e siècle, l'application de la loi de la gravitation sur le problème des marées et la précession des équinoxes ainsi que la considération de la force gravitationnelle dans le cas de corps non sphériques prenaient le devant de la scène. En même temps, après une ultime tentative de LAPLACE de nier l'action gravitationnelle dans l'accélération de Jupiter et la décélération de Saturne qui l'accompagnait, pour rechercher une explication par la vitesse finie de la force attractive, respectivement une influence gravitationnelle des comètes, la mise au point des méthodes perturbatrices se poursuit dans les dernières décennies du XVIII^e siècle et qui vont se conjuguer avec les méthodes d'analyse mathématique modernes introduite dans la mécanique céleste au courant du XIX^e siècle.

La première application pratique du problème des trois corps furent les tentatives de calculer l'orbite de la Lune. CLAIRAUT fut le premier à déduire les équations du mouvement pour subir l'échec dans l'explication du mouvement de la ligne des apsides. En 1749, il trouvait pourtant la solution exacte, qu'il exposa dans son mémoire «*De l'orbite de la Lune, en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*» [193]. Dans ce texte, il fait référence à des idées qui se retrouveront après au centre des réflexions sur les méthodes de perturbations et qui sont de considérer le même ordre d'approximation pour les fonctions connues et celles inconnues menant ainsi à des suites d'équations du même ordre d'approximation. Le parcours scientifique de CLAIRAUT concernant ses découvertes et ses théories est retracé

dans le chapitre lui consacré dans le présent texte. D'ALEMBERT développa lui aussi en 1747 sa théorie de la Lune et se heurta également au problème du mouvement de la ligne des apsides. Nous avons vu qu'il a renoncé à concourir au prix de l'Académie de St-Petersbourg de 1750 pour présenter sa théorie dans le 1^{er} volume de ces *«Recherches sur différents points importants du système du Monde»* [235]. Les détails de la théorie de la Lune de D'ALEMBERT sont exposés et commentés de façon détaillée dans le chapitre correspondant du présent texte.

EULER envoya à l'Académie de St-Petersbourg, dont il était membre honoraire, son jugement sur la pièce de CLAIRAUT [173] avec une dissertation latine très étendue, qu'il avait composée quelque temps auparavant sur le même sujet. Cette Académie la fit ensuite imprimer à Berlin, sous les yeux de l'auteur, et elle parut en 1753 sous le nom de *«Theoria motus Lunae»* [291]. Dans ce qui suit, cette pièce, dans laquelle EULER introduisit le premier l'emploi des trois équations du mouvement en coordonnées rectangulaires, sera présentée et commentée de façon détaillée.

Les trois théories de la Lune donnèrent naissance à des tables des positions du satellite terrestre ceci surtout dans le but pratique de les utiliser pour la détermination de la longitude en mer. Les premières tables de la Lune de MAYER, bâties sur la théorie d'EULER, parurent en 1753. Elles seront présentées dans un chapitre ultérieur de ce texte. D'ALEMBERT fit paraître en latin, au commencement de 1756 de nouvelles *«Tables de Corrections»* [337] et, dans le 3^e volume de ses *«Recherches»* [235], il donna de nouvelles idées en vue de les perfectionner. CLAIRAUT, lui aussi construisit des tables qu'il fit concorder avec les observations avant de les publier en 1754 [338]. L'utilisation de ces tables se faisait en deux temps. Il fallait d'abord déterminer les coefficients des 22 équations nécessaires en vue de déterminer la longitude vraie de la Lune à l'aide d'autant de tables à simple entrée. A l'aide de comparaisons des solutions de ce système d'équations, il parvenait alors à en réduire considérablement le nombre des équations nécessaires à la détermination de la longitude. Il arriva à des résultats analogues pour le calcul de la latitude. EULER, comme nous l'avons vu, a publié ses tables lunaires déjà en 1742.

Il est à la fois significatif et intéressant de prendre connaissance des vues de LAPLACE, un des artisans de ce développement, sur la théorie de la Lune et de l'importance de la loi de la gravitation comme étant la base de celle-ci. Suivant LAPLACE, les vérités des deux approches théoriques sont démontrées simultanément par la conformité des observations de la position lunaire avec les déterminations théoriques. Dans le LIVRE VII de la *«Mécanique céleste»* [126], LAPLACE constate d'abord que *«La théorie de la Lune a des difficultés qui lui sont propres, et qui résultent de la grandeur de ces nombreuses inégalités, et du peu de convergence des séries qui les donnent. Si cet astre était plus près de la Terre, les inégalités de son mouvement seraient moindres, et leurs approximations plus convergentes. Mais à la distance où il se trouve, ces approximations dépendent d'une analyse très compliquée, et ce n'est qu'avec une attention particulière, et au moyen de considérations délicates, que l'on peut*

déterminer l'influence des intégrations successives, sur les différents termes de l'expression de la force perturbatrice. Le choix des coordonnées n'est point indifférent au succès des approximations : la force perturbatrice du Soleil dépend des sinus et cosinus des elongations de la Lune au Soleil et de ses multiples : leur réduction en sinus et cosinus d'angles dépendant des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, est pénible et peu convergente, à raison des grandes inégalités de la Lune ; il y a donc de l'avantage à éviter cette réduction, et à déterminer la longitude moyenne de la Lune, en fonction de sa longitude vraie, ce qui peut être utile dans plusieurs circonstances. On pourra ensuite, si on le juge convenable, déterminer avec précision, par le retour des séries, la longitude vraie, en fonction de la longitude moyenne».

Après cette exposition succincte des difficultés de la théorie de la Lune, LAPLACE vient à la loi de la gravitation et déclare son programme : «*Mon objet dans ce livre, est de montrer dans la seule loi de la pesanteur universelle, la source de toutes les inégalités du mouvement lunaire, et de me servir ensuite de cette loi, comme moyen de découvertes pour perfectionner la théorie de ce mouvement et pour en conclure plusieurs éléments importants du système du monde, telles que les équations séculaires de la Lune, sa parallaxe, celle du Soleil, et l'aplatissement de la Terre*» [126].

Après avoir disserté sur les tables lunaires de différents auteurs, LAPLACE revient à la théorie de la Lune et la loi de la gravitation : «*Les mouvements du périhélie et des nœuds de l'orbe lunaire, offrent encore un moyen de vérifier la loi de la pesanteur. Leur première approximation n'avait donné d'abord aux Géomètres, que la moitié du premier de ces mouvements, et CLAIRAUT en avait conclu qu'il fallait modifier cette loi, en lui ajoutant un second terme. Mais il fit ensuite l'importante remarque, qu'une approximation ultérieure rapprochait la théorie de l'observation. Le mouvement conclu de mon analyse ne diffère pas du véritable, de sa quatre cent quarantième partie : la différence n'est pas d'un trois cent cinquantième, à l'égard du mouvement des nœuds. De là, il suit incontestablement que la loi de la gravitation universelle est l'unique cause des inégalités de la Lune ; et si l'on considère le grand nombre et l'étendue de ces inégalités, et la proximité de ce satellite à la Terre, on jugera qu'il est de tous les corps célestes, le plus propre à établir cette grande loi de la nature, et la puissance de l'analyse de ce merveilleux instrument sans lequel, il eut été impossible à l'esprit humain de pénétrer dans une théorie aussi compliquée, et qui peut être employée comme un moyen de découvertes, aussi certain que l'observation elle-même.*» [126]

Un peu plus loin, il poursuit en parlant de l'autre grand sujet de la mécanique céleste du XVIII^e siècle qui sont les «*arcs de cercle*». Il fait ici aussi la relation avec la théorie de la gravitation en affirmant que : «*l'un des plus intéressants résultats de la théorie de la pesanteur, est la connaissance des inégalités séculaires de la Lune*» [126]. Et finalement, il conclut en affirmant que : «*L'accord de la théorie avec les observations, nous prouve que si les moyens mouvements de la Lune sont altérés par des causes étrangères à l'action de la pesanteur, leur influence est très petite, et jusqu'à présent insensible.*» [126].

Une autre application de la théorie du problème des trois corps qui mobilisait les adeptes de l'astronomie théorique au XVIII^e siècle fut la perturbation mutuelle des planètes. NEWTON avait déjà déclaré dans la PROPOSITION XIII **Théorème** [XIII] du LIVRE III des «PRINCIPIA» qu'il y avait une action de Jupiter sur Saturne qui «ne doit pas être absolument négligée» [1] ... «Et de là vient que l'orbe de Saturne est dérangé si sensiblement dans chaque conjonction avec Jupiter, que les astronomes s'en aperçoivent» [1]. NEWTON était encore d'avis que les perturbations mutuelles des autres planètes étaient négligeables, abstraction faite de l'action mutuelle de la Lune et de la Terre : «Les dérangements qu'éprouvent les orbes des autres planètes par leurs actions mutuelles sont beaucoup moins considérables si on en excepte l'orbe de la Terre que la Lune dérange sensiblement.» [1]. Dans la proposition suivante, NEWTON déclare que : «L'aphélie et les nœuds des orbites sont en repos.» [1]. Dans le commentaire à cette proposition, qui supposerait des actions perturbatrices nulles entre les planètes, NEWTON relativise cette affirmation en indiquant : «que les actions des planètes et des comètes les unes sur les autres, peuvent causer quelques inégalités tant dans les aphélies que dans les nœuds, mais ce sont des inégalités assez petites pour qu'il soit permis de les négliger.» [1]

Les perturbations mutuelles des planètes, dès que les outils analytiques sont assez perfectionnés vers le milieu du siècle, deviennent un sujet d'intérêt général tel que le témoignent les concours de prix de plusieurs académies et les écrits de plusieurs astronomes traitant le problème tant du point de vue théorique que du point de vue observationnel.

D'ALEMBERT, dans le deuxième volume de ses «Recherches» [235] traite de la «Recherche de l'orbite des Planètes principales dans le système de l'attraction». Il applique sa méthode générale, exposée déjà dans le chapitre sur sa théorie lunaire, à la recherche des orbites des planètes principales, en les supposant dans le même plan. Il distingue trois différentes causes qui peuvent altérer le mouvement des astres, à savoir : leur attraction mutuelle, celle qu'elles exercent sur le Soleil, et l'action que les satellites d'une planète peuvent avoir sur celle-ci, et il propose pour déterminer ce dernier effet, de chercher l'orbite elliptique décrite par le centre de gravité commun de la planète et de ses satellites, de déterminer ensuite le lieu de chaque satellite, et d'en conclure celui de la planète principale ; quant à l'altération provenant de l'action des planètes sur le Soleil, il montre que cette action devant être transportée à la planète troublée, en sens contraire de sa direction, on peut traiter à cet égard la planète troublante comme un satellite de la première, qui n'agirait point sur le Soleil, et qui au lieu d'attirer celle-ci, la repousserait. Il s'occupe enfin des perturbations produites par l'action directe des planètes l'une sur l'autre et donne les expressions des composantes rectangulaires des forces troublantes, qui doivent être réduites à la forme rationnelle, afin que l'on puisse intégrer l'équation de l'orbite. Une partie du mémoire de D'ALEMBERT publié en 1754 traite de l'inégalité de Jupiter et de Saturne qu'il aborde avec les mêmes outils qu'EULER tout comme il s'inspire du mémoire de celui-ci ayant ce même sujet pour réduire les forces perturbatrices à une forme rationnelle intégrable.

L'écrit principal sur la perturbation des planètes est sans doute le mémoire d'EULER de 1747 : «*Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*» [185] qui sera présenté et analysé dans les détails dans un chapitre suivant. Avec ce mémoire ainsi que les essais suivants sur le même sujet, EULER fut le créateur de la théorie des perturbations. Celle-ci fut développée et complétée par LAGRANGE et ce fut LAPLACE, se basant sur des idées essentielles du premier, qui résolut en 1786 la grande anomalie de Jupiter et de Saturne comme il sera montré dans le chapitre consécutif sur LAGRANGE et LAPLACE.

Il est intéressant, encore une fois, de lire les commentaires de celui qui a achevé la théorie des perturbations et qui en fait une preuve pour la vérité de la théorie de la gravitation : «*Les mouvements des planètes sont sensiblement troublés par leur attraction mutuelle : il importe de déterminer exactement les inégalités qui en résultent, soit pour vérifier la loi de la pesanteur universelle, soit pour perfectionner les tables astronomiques, soit enfin pour reconnaître si les causes étrangères au système planétaire ne viennent point altérer sa constitution et ses mouvements*» [126]. Après avoir expliqué sa manière de calcul approximatif dans les termes dépendant des différents degrés de la force perturbatrice, il poursuit : «*C'est principalement dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, les deux plus grands corps du système planétaire, que l'attraction mutuelle des planètes est sensible. Leurs moyens mouvements sont presque commensurables ; de sorte que cinq fois celui de Saturne est à très peu près égal à deux fois celui de Jupiter : les inégalités considérables qui naissent de ce rapport, et dont on ignorait les lois et la cause, ont paru longtemps faire exception de la loi de la pesanteur universelle, et maintenant, elles sont une des preuves les plus frappantes.*» [126]. LAPLACE mentionne ici les «*résonances dans les deux orbites de Jupiter et Saturne et montre par là le chemin vers les théories toutes modernes des mouvements chaotiques en mécanique céleste.*» [325]

Il faut parler encore d'un autre foyer d'intérêt chez les savants s'occupant de mécanique céleste au XVIII^e siècle et qui est la détermination de l'orbite des comètes. NEWTON a consacré à cette question plusieurs paragraphes dans le LIVRE III des «*PRINCIPIA*». Elle reprit un intérêt soudain quand le monde savant attendit le retour de la comète de 1682, que HALLEY avait prédit pour les années 1758 et 1759. LALANDE proposa à CLAIRAUT d'appliquer sa solution du problème des trois corps aux perturbations que l'action de Jupiter avait dû produire sur le mouvement de cette comète. CLAIRAUT était d'accord à entreprendre cette tâche immense, mais se rendait compte bien vite qu'il fallait aussi incorporer l'action de Saturne. Avec LALANDE et Mme LAPAUTE, il calcula par intégration numérique des équations du mouvement l'orbite de la comète. On connaît le succès brillant et mémorable de ce travail prodigieux que CLAIRAUT présenta à l'Académie le 14 novembre 1748 en prédisant le passage de la comète à son périhélie pour le milieu du mois d'avril 1759, tandis qu'elle y arriva le 12 mars. Son traité sur la comète [199] a été présenté et analysé dans le chapitre lui consacré.

LAPLACE, un demi-siècle plus tard, commente les difficultés propres à la

théorie des comètes : « *Les grandes excentricités des orbites des comètes et leurs inclinaisons considérables à l'écliptique, ne permettent pas d'appliquer aux perturbations que ces astres éprouvent, les formules relatives aux planètes . . . Il n'est pas possible, dans l'état actuel de l'analyse, d'exprimer ces perturbations par des formules analytiques qui embrassent, comme celles des planètes, un nombre indéfini de révolutions : on ne peut les déterminer que par parties, et au moyen de quadratures mécaniques.* » [126]. Il donne raison ainsi à l'approche de CLAIRAUT.

La précession des équinoxes est plutôt un problème de géophysique, quoiqu'il contribue, lui aussi, à valider la loi de la gravitation universelle. En effet, les forces d'attraction gravitationnelles du Soleil, de la Lune et des Planètes qui s'exercent sur toutes les particules de la Terre créent un couple perturbateur dépendant des positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil et qui est déterminé par la mécanique céleste. Nous nous limitons ici à relever que NEWTON a traité du problème dans le LIVRE III des «PRINCIPIA», que D'ALEMBERT a écrit tout un traité sur la question [340] et qu'EULER a écrit le premier les équations décrivant le phénomène.

C'est d'abord LAGRANGE qui s'est intéressé au problème de la libration de la Lune. Il suppose que le phénomène concernant l'égalité de la période de rotation de la Lune résulte de l'action combinée que le Soleil et la Terre exercent sur elle. Il s'agit donc encore une fois d'un phénomène validant la loi de la gravitation universelle [341].

La plage très large des pôles d'intérêts de la mécanique céleste au milieu du XVIII^e siècle, ainsi que la productivité exorbitante d'EULER, font comprendre qu'une sélection dans la présentation et l'analyse de ses travaux devra être faite. Nous nous limiterons aux aspects de la théorie des trois corps et à ses contributions à la théorie des perturbations sous l'optique de la validation de la loi de la gravitation universelle.

6.3.2 Recherches sur le mouvement des corps célestes en général [1]

—|—

EULER SOUMIT CE MÉMOIRE à l'Académie de Berlin le 8 juin 1747. Il a été écrit en parallèle avec sa pièce sur les inégalités de Jupiter et de Saturne [185] publiée une année plus tard. Ce mémoire de 1747 constitue le premier essai en vue de tenir compte des perturbations mutuelles des planètes et il est presque sûr, comme nous allons le voir encore, que beaucoup de découvertes attribuées à LAGRANGE étaient déjà connues d'EULER.

Dans un chapitre antérieur, nous avons exposé le chapitre introductif du mémoire eulerien qui fait état des doutes qu'EULER avait en ce temps sur la validité exacte de la loi newtonienne de la gravitation, doutes d'ailleurs partagés par CLAIRAUT et D'ALEMBERT. EULER conclut que : « *La théorie de*

l'Astronomie est donc encore plus éloignée du degré de perfection auquel on pourrait penser, qu'elle soit déjà portée. Car si les forces, dont le Soleil agit sur les Planètes, et celles-ci les unes sur les autres, étaient exactement en raison renversée des carrés des distances, elles seraient connues, et par conséquent la perfection de la théorie dépendrait de la solution de ce problème : «Que les forces, dont une planète est sollicitée, étant connues, on détermine le mouvement de cette planète». Ce problème, tout difficile qu'il puisse être, appartient néanmoins à la mécanique pure, et on pourrait espérer, qu'à l'aide de quelques nouvelles découvertes dans l'Analyse, on saurait enfin parvenir à sa solution.» [304]. Et le mémoire de 1746 constitue un guide pour la résolution de cette question à l'aide de cinq problèmes résolus et tenant compte, à la fois de la loi de la gravitation énoncée par NEWTON ainsi que différentes formes modifiées de cette loi de l'attraction.

Mais EULER revient aussi à son hypothèse concernant la résistance à laquelle les planètes sont exposées en passant par l'éther : *«Ce fluide, quelque subtil qu'il puisse être, ne saurait manquer d'opposer quelque résistance au mouvement des planètes; et je crois déjà avoir prouvé assez évidemment l'effet de cette résistance sur le mouvement de la Terre.» [304]. EULER fait référence ici à la diminution de la longueur de l'année tropicale qu'il attribue à la résistance de l'éther mais tant en précisant que «quelque loi que ces forces puissent suivre, elle différera si peu de la raison inverse doublée des distances, que dans le calcul on pourra sans faute regarder cette aberration comme infiniment petite, ce qui pourra beaucoup contribuer à vaincre les autres obstacles» [304]*

EULER propose alors de déterminer le mouvement d'une planète *«soit qu'elle soit sollicitée par une seule force dirigée vers un point fixe, ou par plusieurs selon des directions quelconques» [304]. Il pose d'abord un Lemme fondamental, étant valable pour l'ensemble des problèmes qu'il va traiter : «Si un Corps M est sollicité par des forces quelconques, déterminer le changement instantané, que ces forces produisent dans le mouvement du corps» [304]. EULER introduit un système de coordonnées orthogonales, dont l'origine est le centre du corps en question et dont les axes sont parallèles à un plan de référence, respectivement perpendiculaire à celui-ci. Les forces agissant sur le corps M sont alors décomposées suivant les mêmes axes de coordonnées et en prenant l'élément du temps dt pour constant, le changement instantané du mouvement du corps de masse M sera exprimé par les trois équations :*

$$\begin{aligned}\frac{2d^2x}{dt^2} &= \frac{X}{M} \\ \frac{2d^2y}{dt^2} &= \frac{Y}{M} \\ \frac{2d^2z}{dt^2} &= \frac{Z}{M}\end{aligned}\tag{6.61}$$

X, Y, Z , étant les forces motrices agissant au temps t . EULER a maintenu jusque dans les années 1770 la forme 6.61 des équations du mouvement pour

des raisons dimensionnelles comme il l'indique dans le **Corollaire I**. Le **Corollaire II** traite du cas particulier de l'absence de forces motrices, et par simple intégration de 6.61, EULER obtient :

$$\begin{aligned}x &= at + \alpha \\y &= bt + \beta \\z &= ct + \gamma\end{aligned}\tag{6.62}$$

«D'où l'on voit que la vitesse de ce corps sera constante et que la ligne, suivant laquelle le corps se meut, sera droite ; tout comme la première loi de la Mécanique l'exige» [304]. Dans un scholie final, EULER montre que le fondement du Lemme n'est autre chose que la deuxième loi de NEWTON :

$$du = pdt\tag{6.63}$$

où p marque la puissance accélératrice et u la vitesse. [1]

-II-

LE PROBLÈME I que EULER pose est formulé de la façon suivante : «*Un corps M étant constamment poussé vers un point fixe C avec une force quelconque, déterminer son mouvement*» [304]. EULER développe ici les équations différentielles pour une planète se déplaçant sous l'effet d'une force centrale. Comme ce mouvement se fera dans un plan passant par le centre de force C , EULER définit un axe CA et admet que le corps M commence son mouvement en A pour parvenir, après un temps t , en M . Il obtient alors :

$$\begin{aligned}CP &= x \\PM &= y \\CM &= \sqrt{x^2 + y^2} = r\end{aligned}\tag{6.64}$$

P étant le pied de la perpendiculaire PM sur AC .

Si V désigne la force avec laquelle M est attiré par C , on obtient les équations suivantes par un raisonnement géométrique :

$$\begin{aligned}r \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{1}{2}Vdt^2 \\r \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{1}{2}Vdt^2\end{aligned}\tag{6.65}$$

Comme les coordonnées x et y sont impropres à l'usage astronomique, EULER introduit des coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}\tag{6.66}$$

et l'angle $ACM = \varphi$ représente le temps.

Après un développement algébrique, EULER exprime le mouvement du corps M par les deux équations suivantes :

$$2drd\varphi + rd^2\varphi = 0\tag{6.67}$$

$$d^2r - rd\varphi^2 = -\frac{1}{2}Vdt^2\tag{6.68}$$

Dans ces équations, r représente le rayon vecteur, φ la longitude et V la force accélératrice. Comme il a été déjà relevé dans le commentaire de la formule 6.61, le facteur $\frac{1}{2}$ est dû au fait que EULER écrit la loi de la chute libre dans la forme :

$$v^2 = h\tag{6.69}$$

au lieu de :

$$v^2 = 2gh\tag{6.70}$$

de façon que $2g = 1$ et la quantité $2g$ devient l'unité de mesure de la force accélératrice.

Par intégration, l'équation 6.67 mène à l'expression

$$r^2 d\varphi = A dt\tag{6.71}$$

où A est une constante. C'est la loi des aires de KEPLER. L'intégration de l'équation 6.68 donne l'expression

$$d\varphi = \frac{A dr}{r \sqrt{Br^2 - A^2 - r^2 \int V dr}}\tag{6.72}$$

où B est une autre constante.

«Donc si la force centrale V dépend uniquement de la distance $CM = r$, on pourra pour chaque distance r déterminer tant le temps t que l'angle φ ; et partant réciproquement on sera en état à chaque temps t d'assigner tant l'angle φ que le rayon vecteur r » [304]. Dans un corollaire, EULER remarque que la plus grande ou la plus petite distance de la planète au Soleil sont données par les valeurs des racines réelles de l'expression :

$$Br^2 - A^2 - r^2 \int V dr\tag{6.73}$$

se trouvant au dénominateur de 6.72.

Un scholie final relève qu'il n'est pas pratique d'exprimer le temps t et l'angle φ par la distance r : «*on doit tâcher de chercher la distance r exprimée par le temps t , et alors on déterminera l'angle φ pareillement par le temps t à l'aide de l'équation :*»

$$d\varphi = \frac{A}{r^2} dt \quad (6.74)$$

«*Pour cet effet, il conviendra de développer le cas où la force V est exactement en raison inverse du carré de la distance ...* » [304]. EULER considère ce cas comme introduction au cas général où la loi de la gravitation universelle ne suit pas exactement la forme newtonienne.

—III—

LA FORMULATION DU PROBLÈME II est la suivante : «*La force, dont le corps M est poussé vers le point fixe C , étant réciproquement proportionnelle au carré de la distance CM ; déterminer le mouvement de ce corps*» [304]. EULER pose d'abord la force dont la Terre est poussée vers le Soleil à la distance a , égale à π . Il obtient :

$$V = \frac{\alpha a^2}{r^2} \pi \quad (6.75)$$

et en introduisant au lieu de $\frac{1}{2}dt^2$ le mouvement moyen de la Terre, obtenu dans le **Corollaire** II du Problème I, EULER obtient :

$$\frac{1}{2}Vdt^2 = \frac{\alpha a^3}{r^2} d\omega^2 \quad (6.76)$$

où ω est l'angle que la Terre décrit autour du Soleil dans le temps t . En nommant l'angle $ACM = \varphi$, EULER obtient alors les équations du mouvement :

$$2drd\varphi + rd^2\varphi = 0 \quad (6.77)$$

$$d^2r - rd\varphi^2 = -\frac{\alpha a^3}{r^2} d\omega^2 \quad (6.78)$$

Après quelques considérations algébriques sur la nature des expressions obtenues par intégration des équations différentielles 6.77 et 6.78, EULER introduit au lieu de l'angle ω qui est l'anomalie vraie, un autre angle ζ par :

$$\omega = \frac{c}{a\sqrt{\gamma}} \zeta \quad (6.79)$$

avec $\gamma = \alpha a/c$. L'élément $d\zeta$ est constant tout comme $d\omega$. Les équations 6.77 et 6.78 reprennent alors la forme :

$$2drd\varphi + rd^2\varphi = 0 \quad (6.80)$$

$$d^2r - rd\varphi^2 + \frac{c^3 d\zeta^2}{r^2} = 0 \quad (6.81)$$

EULER applique alors la relation keplerienne :

$$\zeta = v + k \sin v \quad (6.82)$$

avec ζ étant l'anomalie moyenne, k étant l'excentricité et v étant l'anomalie excentrique de la planète. Il obtient par intégration les deux relations :

$$r = c(1 + k \cos v) \quad (6.83)$$

$$d\varphi = \frac{dv\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos v} \quad (6.84)$$

en intégrant 6.84, EULER trouve finalement

$$\cos(\varphi - A) = \frac{k + \cos v}{1 + k \cos v} \quad (6.85)$$

où A est un angle fixe assimilé à la longitude de l'aphélie.

Dans un scholie, EULER propose alors de calculer l'intégrale 6.84 par le moyen de séries au lieu de se référer à 6.85, tout en admettant que l'excentricité k soit petite. Il pose :

$$\frac{1}{1+k\cos v} = 1 - k\cos v + k^2\cos^2 v - k^3\cos^3 v + k^4\cos^4 v - \dots \quad (6.86)$$

et, afin d'éviter les puissances de $\cos v$, EULER propose de les convertir en cos des angles multiples de v et il donne les formules adéquates. Finalement, il écrit une formule pour l'intégrale de 6.84 dans la forme :

$$\varphi = A + \zeta - (2f + k) \sin v + \frac{2}{2}f^2 \sin 2v - \frac{2}{3}f^3 \sin 3v + \frac{2}{4}f^4 \sin 4v - \frac{2}{5}f^5 \sin 5v \dots \quad (6.87)$$

avec :

$$\frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{k} = f \quad (6.88)$$

«La première partie $A + \zeta$ représente la longitude moyenne de la planète dans son orbite et elle montrerait son vrai lieu si l'excentricité k s'évanouissait ; auquel cas la Planète décrirait un cercle d'un mouvement uniforme ... » [304]

Le **Corollaire VII** discute alors les autres termes de l'expression 6.87 et qui représentent l'inégalité du mouvement, ou la différence entre la longitude

moyenne et la longitude vraie : l'équation elliptique. EULER conclut que si l'excentricité k n'est pas trop grande, les coefficients de ces termes décroissent si subitement que trois ou quatre termes suffisent pour la plus grande précision, que l'on peut souhaiter dans l'Astronomie. La méthode de calcul par la série 6.87 est supérieure à l'intégration directe 6.85.

Pour EULER, le but des calculs est la détermination de l'angle v donnant l'anomalie excentrique qui se déduit de l'anomalie moyenne ζ par le moyen de l'équation de KEPLER de façon itérative.

EULER termine l'exposé autour du Problème II par un scholie qui constate : *«Ayant ainsi découvert la forme la plus commode des quantités intégrales, qui déterminent le mouvement d'un corps sollicité vers un centre en raison réciproque des carrés de ces distances, ou pourra employer des formules semblables pour déterminer le mouvement, lorsque la force centripète est d'une autre nature, pourvu qu'elle ne diffère que fort peu de cette loi ; et que l'excentricité de l'orbite ne soit pas trop grande ; ce qui suffit tant pour les Planètes principales que pour les satellites»*. [304]

–IV–

LE PROBLÈME III traite du cas plus général, où la loi des forces gravitationnelles diffère légèrement de celle des carrés inverses avec une orbite ne différant que peu de la forme circulaire. EULER formule le problème de la façon suivante : *«Lorsque la force, dont le corps M est poussé vers le point C considéré comme fixe, n'est qu'à peu près proportionnelle réciproquement aux carrés de ses distances, trouver le mouvement de ce corps, supposé que son orbite ne diffère pas beaucoup d'un cercle»* [304]. Ceci est le même cas que celui traité par NEWTON dans la PROPOSITION XXXV du LIVRE PREMIER des «PRINCIPIA»[1] et qui avait comme but la détermination du mouvement de la ligne des apsides. Or les investigations d'EULER ne donnent pas seulement la formule du mouvement de cette ligne des apsides mais également des expressions pour la perturbation du rayon vecteur r et de l'angle de la longitude vraie φ . EULER examine les deux cas, ou bien un terme petit est ajouté à l'expression newtonienne, ou bien dans cette formule, l'exposant est légèrement différent de -2 .

Avec les notations introduites dans le cas du problème II, EULER écrit les deux équations du mouvement

$$2drd\varphi + rd^2\varphi = 0 \quad (6.89)$$

$$d^2r - rd\varphi^2 + \frac{aV}{\pi}d\omega^2 = 0 \quad (6.90)$$

qui, en fait, sont les mêmes que celles introduites pour le problème II. Mais, puisque la force V n'est qu'à peu près proportionnelle à l'inverse du carré de la distance r , EULER écrit :

$$\frac{aV}{\pi} = \frac{mc^3}{r^2} + R \quad (6.91)$$

où R désigne une fonction quelconque de r . L'équation 6.90 devient alors :

$$d^2r - rd\varphi^2 + \frac{mc^3d\omega^2}{r^2} + Rd\omega^2 = 0 \quad (6.92)$$

comparable à l'équation 6.78 du problème II. L'équation 6.89 est directement intégrable. EULER suppose que le rayon vecteur r puisse être mis sous la forme

$$r = c(1 + k \cos v + s) \quad (6.93)$$

avec s étant une quantité fort petite, pour laquelle il établit une équation différentielle de la forme :

$$d\left(\frac{dr}{d\omega}\right) - \frac{n^2c^4d\omega}{r^3} + \frac{mc^3d\omega}{r^2} + Rd\omega = 0 \quad (6.94)$$

qu'il obtient en introduisant dans 6.92 l'intégrale de 6.89.

Pour R , EULER fait alors plusieurs hypothèses. Il admet d'abord :

$$R = \frac{\mu c^{\nu+1}}{r\nu} \quad (6.95)$$

de façon que la force centrale totale soit :

$$V = \frac{\pi}{a} \left\{ \frac{mc^3}{r^2} + \frac{\mu c^{\nu+1}}{r\nu} \right\} \quad (6.96)$$

A cause de 6.93, R devient :

$$R = \frac{\mu c}{(1 + k \cos v + s)^\nu} \quad (6.97)$$

EULER part alors dans des développements algébriques complexes qui ont comme base son équation différentielle 6.94 et un développement de la petite quantité s en série trigonométrique et il aboutit aux expressions suivantes :

$$s = \frac{(3 - \nu)(2 - \nu)\mu k^2}{12m} \cos 2\nu + \dots \quad (6.98)$$

$$r = c(1 + k \cos v + \frac{(3 - \nu)(2 - \nu)\mu k^2}{12m} \cos 2\nu) \quad (6.99)$$

$$d\varphi = \frac{n\alpha dv}{1 + k \cos v} - \frac{\frac{n\alpha}{Gm}(3 - \nu)(2 - \nu)\mu k^2 dv \cos 2\nu}{(1 + k \cos v)^2} \quad (6.100)$$

m est égal au premier terme d'une expression que EULER établit pour la valeur $1/\alpha^2$ où α est un facteur de proportionnalité introduit déjà dans le

problème II pour tenir compte d'une force centrale différente en grandeur de celle du Soleil.

L'intégration de l'équation 6.100 donne finalement une expression :

$$\begin{aligned}\varphi = & C + \frac{n\omega}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{n\alpha}{\sqrt{1-k^2}}(2f+k)\sin v + \frac{n\alpha f^2}{\sqrt{1-k^2}}\sin 2v \\ & + \dots - \frac{n\alpha}{12m}(3-\nu)(2-\nu)\mu k^2 \sin 2v\end{aligned}\quad (6.101)$$

Le mouvement moyen du corps décrit sera donc égal à :

$$\frac{n\omega}{\sqrt{1-k^2}}\quad (6.102)$$

Après quelques transformations encore, EULER trouve la valeur suivante pour l'avancement de la ligne des apsides pendant une révolution du corps décrit.

$$\frac{\mu(\nu-2)}{m}180^\circ\quad (6.103)$$

L'inégalité du mouvement à ajouter, où l'équation à ajouter de la longitude moyenne devient :

$$\begin{aligned}-\left(1 + \frac{\mu(\nu-2)}{2m}\right)(2f+k)\sin v + \left(1 + \frac{\mu(\nu-2)}{2m}\right)f^2\sin 2v \\ -\frac{2}{3}f^3\sin 3v + \dots - \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k^2}{12m}\sin 2v\end{aligned}\quad (6.104)$$

Cette expression peut être comparée à la formule 6.87 établie pour le cas d'une force de la gravitation obéissant à la loi de NEWTON.

EULER considère encore une deuxième hypothèse pour la loi de la gravitation différente de celle de NEWTON. Il pose :

$$\frac{aV}{\pi} = \frac{mc^{3+\mu}}{r^{2+\mu}}\quad (6.105)$$

où μ est une fraction extrêmement petite. Il développe 6.105 en série et il suppose, vu la petitesse des termes μ et k :

$$l(1+k\cos v+s)=k\cos v+s\quad (6.106)$$

Il obtient pour la force perturbatrice la forme :

$$\begin{aligned}R &= -\frac{\mu mck(\cos v+s)}{(1+k\cos v+s)^2} \\ &= -\frac{\mu mck\cos v + \mu mcs}{(1+k\cos v)^2} + \frac{2\mu mcks\cos v}{(1+k\cos k)^3}\end{aligned}\quad (6.107)$$

Des développements algébriques analogues à ceux faits pour la première hypothèse donnant les expressions :

$$S = \frac{\mu k^2}{3(1-\mu)} \cos 2v \quad (6.108)$$

$$r = c \left(1 + k \cos v - \frac{\mu k^2}{3(1-\mu)} \cos 2v \right) \quad (6.109)$$

$$d\varphi = \frac{n\alpha dv}{1+k \cos v} + \frac{2n\alpha\mu k^2}{3(1-\mu)} dv \cos 2v \quad (6.110)$$

qui a pour intégrale :

$$\begin{aligned} \varphi = & c + \frac{n\omega}{\sqrt{1-k^2}} - \frac{n\alpha}{\sqrt{1-k^2}} (2f+k) \sin v \\ & + \frac{n\alpha f^2}{\sqrt{1-k^2}} \sin 2v + \frac{n\alpha\mu k^2}{3(1-\mu)} \sin 2v \end{aligned} \quad (6.111)$$

Pendant une révolution entière, la ligne des apsides avancera d'un angle $\mu 180^\circ$. Et l'inégalité du mouvement sera :

$$\begin{aligned} & -(1 + \tfrac{1}{2}\mu)(2f+k) \sin v + (1 + \tfrac{1}{2}\mu)f^2 \sin 2v \\ & - \tfrac{2}{3}f^3 \sin 3v + \frac{\mu(1+\frac{1}{2}\mu)}{3(1-\mu)} k^2 \sin 2v \end{aligned} \quad (6.112)$$

Cette expression est à comparer avec 6.87 et 6.104.

EULER propose encore une autre solution qu'il applique aux deux hypothèses examinées et il pose afin de rendre les expressions de $d\omega$ et de r plus semblables :

$$\begin{aligned} d\omega &= \alpha dv(1+k \cos v + s) \\ r &= c(1+k \cos v + s) \end{aligned} \quad (6.113)$$

EULER aboutit aux mêmes résultats déjà trouvés avant et calcule le mouvement de la ligne des apsides pour les deux hypothèses introduites d'abord. Il termine son exposé concernant le problème III en précisant la forme de l'expression s , résultat d'une double intégration, pour que des « arcs de cercle » ne soient pas possibles. Cette question va nous préoccuper encore dans la suite de ce texte.

-V-

LE PROBLÈME IV est énoncé par EULER de la façon suivante : «*Un corps étant sollicité par des forces quelconques dont les directions se trouvent pourtant toujours dans le même plan, où le corps se meut ; déterminer le mouvement du corps*» [304]

EULER raisonne sur la figure qu'il avait déjà introduite pour le problème I : «*Puisque nous supposons que les directions des forces sollicitantes se trouvent toujours dans le même plan, on voit d'abord, que pourvu que le corps ait une fois commencé son mouvement dans ce plan, il ne s'en écartera jamais*» [304]. EULER introduit donc une trajectoire courbe AM et en M introduit un système de coordonnées rectangulaires x, y avec le point C comme étant le centre du Soleil et M la position du corps après un temps t . Avec, comme le point A étant l'origine du mouvement, l'angle $ACM = \varphi$ et la distance $CM = r$. EULER introduit un système de coordonnées polaires ayant son origine en C et désigne les forces agissant sur M par : la force qui agit selon $MC = P$ et la force qui agit selon $MQ = Q$. La direction MQ étant perpendiculaire à la direction $MC = r$. Les coordonnées rectangulaires étant :

$$\begin{aligned} CP &= x \\ PM &= y \\ x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \tag{6.114}$$

La force centrale $MC = P$ peut donc être décomposée

– suivant la direction MV en :

$$P \cos \varphi \tag{6.115}$$

– suivant la direction MP en :

$$P \sin \varphi$$

De même, la force $MQ = Q$ donnera :

– suivant la direction MV une force :

$$Q \sin \varphi \tag{6.116}$$

– suivant la direction MP une force :

$$Q \cos \varphi$$

Du lemme introduit dans le texte avant l'examen des problèmes, on détermine :

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 x}{dt^2} &= -P \cos \varphi + Q \sin \varphi \\ 2 \frac{d^2 y}{dt^2} &= -P \sin \varphi - Q \cos \varphi \end{aligned} \quad (6.117)$$

dont résulte :

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2}{dt^2}(d^2 x \cos \varphi + d^2 y \sin \varphi) \\ Q &= \frac{2}{dt^2}(d^2 x \sin \varphi - d^2 y \cos \varphi) \end{aligned} \quad (6.118)$$

Finalement, EULER formule les équations du mouvement

$$\begin{aligned} d^2 r - r d\varphi^2 &= -\frac{1}{2} P dt^2 \\ 2 dr d\varphi + r d^2 \varphi &= -\frac{1}{2} Q dt^2 \end{aligned} \quad (6.119)$$

où l'élément dt est supposé constant, au lieu duquel on pourra introduire le mouvement moyen du Soleil ω en posant :

$$\frac{1}{2} dt^2 = \frac{a d\omega^2}{\pi} \quad (6.120)$$

où a marque la distance moyenne de la Terre au Soleil, et π la force avec laquelle la Terre est poussée vers le Soleil. Dans ce cas, les membres du côté droit des équations 6.119 deviennent :

$$\begin{aligned} &-\frac{a P d\omega^2}{\pi} \\ &-\frac{a Q d\omega^2}{\pi} \end{aligned} \quad (6.121)$$

Dans un scholie à la fin de la présentation d'EULER sur le problème IV, il conclut : «*La solution de ces équations 6.119 dépend principalement de la nature des fonctions P et Q , dont les forces qui agissent sur le corps, sont exprimées.*» [304]. Il introduit alors la réflexion sur le problème inverse quand il se demande de pouvoir déterminer les forces par lesquelles ce corps est sollicité : «*ce qui ne manquera pas d'apporter un grand avantage dans l'Astronomie, quand on se trouvera en état de déduire des observations, les petites irrégularités auxquelles le mouvement des Planètes est sujet, pour en connaître combien*

les forces, qui agissent actuellement sur les planètes sont différentes de celles qu'on suppose dans la Théorie» [304]. EULER formule ici clairement la question des perturbations planétaires quoique les solutions qu'il propose se limitent au problème des deux corps et s'expriment d'une façon finie. C'est seulement dans ses textes postérieurs qu'EULER introduit l'idée de la variation des constantes, ouvrant ainsi l'issue vers la mécanique céleste des LAGRANGE et LAPLACE dans la deuxième moitié du XVIII^e siècle.

Le Problème V prend alors en compte la question générale considérant à côté des forces P et Q une force R agissant à angle droit au plan des r et φ . EULER dérive deux nouvelles équations du mouvement, une pour la longitude π du nœud ascendant dans le plan référentiel et l'autre pour exprimer l'inclinaison G du plan de l'orbite de la planète par rapport à celui-ci. Les équations sont :

$$d\pi = \frac{1}{2} dt^2 \frac{\sin(\varphi - \pi)}{rd\varphi} \left[P \sin(\varphi - \pi) + Q \cos(\varphi - \pi) - \frac{R}{\tan G} \right] \quad (6.122)$$

et

$$d(\ln \tan G) = \frac{1}{2} dt^2 \frac{\cos(\varphi - \pi)}{rd\varphi} \left[P \sin(\varphi - \pi) + Q \cos(\varphi - \pi) - \frac{R}{\tan G} \right] \quad (6.123)$$

En traitant la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite comme variables, EULER introduit la méthode de la variation des constantes arbitraires orbitales qui sera plus tard, généralisée par LAGRANGE et que nous exposerons dans la suite du présent texte.

Soit z la distance du corps étudié par rapport au plan de référence. EULER exprime alors la dérivée de z de deux manières différentes : d'abord sous l'hypothèse que π et G sont invariables, puis en admettant qu'ils sont variables. En prenant en compte la méthode appelée plus tard celle «des moyennes», EULER parvient à établir les équations III et IV qui contiennent déjà l'idée essentielle de la variation des éléments orbitaux, qui est, qu'à tout instant le corps en mouvement se déplace suivant une section conique dont les éléments varient dans le temps.

Dans le mémoire que nous discutons ici, EULER n'osait peut-être pas encore donner suite à son idée et il en reparle dans le mémoire de Jupiter et Saturne de 1752 et dans sa théorie de la Lune de 1753 qui affirme sa découverte.

6.3.3 Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter [1]

-I-

CETTE PIÈCE D'EULER, écrite en parallèle avec celle présentée dans le chapitre précédent [304], est la première application de la loi newtonienne au calcul des perturbations planétaires. Les essais antérieurs visaient exclusivement les perturbations de l'orbite de la Lune.

La question de ces inégalités était déjà ancienne. KEPLER s'était aperçu que les observations de Regiomontanus donnaient, pour Saturne et Jupiter, des lieux plus ou moins avancés qu'ils ne devaient l'être d'après les moyens mouvements établis sur les observations de PTOLÉMÉE. FLAMSTEED remarqua, en 1682, que toutes les tables faites d'après les observations de Tycho BRAHE donnaient trop de vitesse à Saturne et trop peu à Jupiter, ce qui indiquait un retardement dans le mouvement du premier et une accélération dans celui du second, devenus sensibles en l'espace d'un siècle. Et plus encore, HALLEY et Jacques CASSINI s'apercevaient que les aphélies et les nœuds des deux planètes étaient mobiles. LEMONIER, lui, avait remarqué par l'observation une inégalité sensible pour Saturne, qui disparaît pour une certaine configuration avec Jupiter [342]. NEWTON avait, dès la première édition des «PRINCIPIA»[1], supposé une perturbation sensible des deux planètes géantes, sans pour autant livrer des indications sur la nature et la valeur de ce phénomène.

Le problème était donc d'actualité au milieu du XVIII^e siècle et c'est pour déterminer les causes de ces inégalités, et fixer leurs quantités avec plus de précision, que l'Académie des Sciences proposa pour sujet le prix fondé par M. Rouillé DE MESLAIY, qu'elle devrait donner en 1748 : «*une Théorie de Saturne et de Jupiter, par laquelle on puisse expliquer les inégalités que ces deux planètes paraissent se causer mutuellement, principalement dans le temps de leur conjonction*» [342]. L'Académie reçut trois pièces et couronna celle d'EULER. Il obtint un autre prix pour le même sujet en 1752.

Nous allons nous concentrer dans ce qui suit sur les problématiques mathématique et mécanique de la pièce d'EULER. L'aspect historique de la genèse de ce texte a été exposé dans les chapitres traitant de la correspondance entre D'ALEMBERT, CLAIRAUT et EULER. De même, les objections de ce dernier dans la première partie de sa pièce concernant la forme newtonienne de la loi de la gravitation universelle ont été exposées et commentées dans un chapitre antérieur.

Il est compréhensible que ce premier essai en vue de comprendre les perturbations planétaires n'était pas parfait. À côté d'erreurs de calculs, dues surtout à la hâte qu'EULER déployait dans la rédaction de son texte, on y rencontre aussi des erreurs logiques et mathématiques parce que cette dernière science était trop peu développée pour tenir compte des besoins de la mécanique céleste. C'est probablement là la cause pour l'Académie de remettre au concours

de 1752 le même sujet et ce prix fut encore une fois gagné par EULER.

Dans le paragraphe II de son essai, EULER énonce les hypothèses fondamentales aux recherches qui vont suivre. «*Je suivrai dans mes recherches théoriques, exactement le système d'attraction tel qu'il est adopté aujourd'hui par tous les Astronomes; et je supposerai que les forces, tant du Soleil que des Planètes, décroissent précisément dans la raison carrée des distances, et qu'elles agissent sur le centre de gravité des corps qui en sont sollicités*» [185]. EULER limite ses investigations aux trois corps : le Soleil, Jupiter et Saturne et les forces agissant entre ces trois corps selon l'hypothèse newtonienne. Il sait pertinemment que le problème présente des difficultés très grandes pour une solution analytique et recherche des approches approximatives : «*Je tâcherai de réduire la solution de ce problème à des formules analytiques, qui me paraissent les plus propres pour en faire l'application au sujet proposé et desquelles je pourrai aisément tirer les approximations qui conduisent aux inégalités qui se trouvent tant dans le mouvement de Saturne que dans celui de Jupiter*» [185].

EULER introduit ensuite un plan de référence sur lequel il définit un axe fixe Ω comme direction vers le nœud ascendant. Le lieu P du corps se situe en dehors du plan et une perpendiculaire PQ est abaissée sur le plan de référence. Les coordonnées de P peuvent être déterminées en fixant un axe AC par l'angle $ACQ = \varphi$ comme longitude et la distance raccourcie $CQ = Z$, la longitude du nœud ascendant étant égale à π . Il a créé ainsi un référentiel sur lequel il peut appliquer les équations I à IV déduites dans la pièce : «*Recherches sur le Mouvement des corps célestes en général*» [304]. Or ce système de quatre équations différentielles doit être élargi de quatre autres équations dans le cas du problème des trois corps : Soleil, Jupiter et Saturne qui sont interdépendantes. L'intégration de ce système d'équations s'avère être inextricable et EULER, comme nous allons le voir, va procéder par approximations successives. Il est important de voir qu'EULER emploie dans toutes ces pièces sur les perturbations planétaires et lunaires, toujours les mêmes méthodes analytiques et qu'il y a donc une continuité dans sa démarche scientifique, ce qui le caractérise comme un des grands précurseurs des sciences modernes exactes.

Pour appliquer sa démarche générale, EULER construit d'abord un plan de référence qui est le plan de l'orbite de Jupiter, tout en faisant abstraction des écartements minimes de la planète de ce plan dus à des forces perturbatrices. Le centre du Soleil $\odot$ est le point fixe du plan de référence et une droite $\odot AB$ tirée dans ce même plan vers un point fixe du ciel servira à calculer les longitudes. Le plan dans lequel Saturne se meut coupe celui de Jupiter avec la ligne des nœuds $\odot\Omega$. En désignant par h la position et la masse de Saturne, on peut abaisser sur le plan $A \odot Q$ une perpendiculaire hQ , et ayant tiré les droites $\odot h$ et $\odot Q$, on nomme la distance raccourcie de Saturne au Soleil $\odot Q = Z$, sa longitude où l'angle $A \odot Q = \varphi$. La latitude de Saturne est l'angle $A \odot Q = \varphi$ et longitude du nœud est l'angle $A \odot \Omega = \Pi$.

L'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter est égal à ρ , EULER doit encore fixer les coordonnées de Jupiter qu'il suppose connues et désigne l'angle $A \odot = v^4$ comme longitude et sa distance au Soleil $\odot^4 = y$. L'élongation

de Saturne et de Jupiter est exprimée alors par l'angle $Q \odot \mathcal{I} = v - \varphi = \omega$. Toutes les distances entre les trois corps considérés peuvent alors être calculées. EULER obtient :

$$\mathcal{I}Q = \sqrt{z^2 + y^2 - 2yz \cos \omega} \quad (6.124)$$

et puisque $Q\hbar = z \tan \psi$

$$\mathcal{I}\hbar = \sqrt{\frac{z^2}{\cos^2 \psi} + y^2 - 2yz \cos \omega} = v \quad (6.125)$$

EULER peut maintenant exprimer les forces gravitationnelles agissant sur Saturne et les décomposer suivant le système de coordonnées $\hbar Q$, $Q \odot$ et QN , direction perpendiculaire à $Q \odot$.

Après quelques opérations géométriques, EULER parvient aux expressions suivantes pour les forces P , Q , R :

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\odot + \hbar) \cos \psi^3}{z^2} + \frac{\mathcal{I}z}{v^3} + \frac{\mathcal{I} \cos \omega}{y^2} - \frac{\mathcal{I}y \cos \omega}{v^3} \\ Q &= \frac{\mathcal{I} \sin \omega}{y^2} - \frac{\mathcal{I}y \sin \omega}{v^3} \\ R &= \frac{(\odot + \hbar) \sin \psi \cos \psi^2}{z^2} + \frac{\mathcal{I}z \tan \psi}{v^3} \end{aligned} \quad (6.126)$$

EULER introduit ses forces dans les équations I à IV de son mémoire de 1747 [304], et au lieu du temps dt apparaissant dans ces équations différentielles, il a recours à l'anomalie moyenne de Jupiter ; ζ proportionnelle au temps et il trouve finalement les équations suivantes :

$$\begin{aligned} I \quad d^2 z - z d\varphi^2 &= -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{(1 + \nu) \cos \psi^3}{z^2} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos \omega}{y^2} - \frac{ny \cos \omega}{v^3} \right) \end{aligned} \quad (6.127)$$

$$II \quad 2dzd\varphi + zd^2\varphi = -na^3 d\zeta^2 \sin \omega \left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{v^3} \right) \quad (6.128)$$

$$III \quad d\Pi = \frac{na^3 d\zeta^2 \sin(\varphi - \Pi) \sin(\vartheta - \Pi)}{zd\varphi} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{v^3} \right) \quad (6.129)$$

$$IV \quad d(\ln \tan \varphi) = \frac{na^3 d\zeta^2 \cos(\varphi - \Pi) \sin(\vartheta - \Pi)}{zd\varphi} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{y}{v^3} \right) \quad (6.130)$$

Les constantes introduites sont très petites :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}}{\odot} &= n = \frac{1}{1067} \\ \frac{\hbar}{\odot} &= \nu = \frac{1}{3021} \end{aligned} \quad (6.131)$$

a étant la distance moyenne de Jupiter au Soleil.

Dans les équations I à IV ci-dessus, l'anomalie moyenne de Jupiter $d\zeta$ est supposée constante.

-II-

APRÈS AVOIR ÉCRIT les équations du mouvement des deux planètes, régies par la loi de la gravitation newtonienne, il s'agit de les intégrer. EULER n'entreprend pas de tentatives pour une intégration formelle de celles-ci dans leur généralité mais procède par approximations successives. Il examine d'abord le cas du mouvement de Saturne, dans l'hypothèse que les deux orbites soient dans le même plan, et l'une et l'autre destituées d'excentricité. Dans ce cas l'angle ψ deviendra 0 et donc $\cos \psi = 1$ mais aussi les équations III et IV deviennent sans objet.

La distance de Jupiter au Soleil sera constant égale à a et son mouvement sera égal au mouvement de son anomalie moyenne, ce qui donne :

$$dv = d\zeta \quad (6.132)$$

et partant :

$$d\omega = -d\varphi + d\zeta \quad (6.133)$$

à cause de :

$$\begin{aligned} \omega &= v - \varphi \\ v &= \sqrt{a^2 - 2az \cos \omega + z^2} \end{aligned} \quad (6.134)$$

Les équations deviennent donc :

$$I \quad d^2z - zd\varphi^2 = -a^3 d\zeta^2 \left(\frac{1+\nu}{z^2} + \frac{nz}{v^3} + \frac{n \cos \omega}{a^2} - \frac{na \cos \omega}{v^3} \right) \quad (6.135)$$

$$II \quad 2dzd\varphi + zd^2\varphi = -na^3 d\zeta^2 \sin \omega \left(\frac{1}{a^2} - \frac{a}{v^3} \right) \quad (6.136)$$

La distance véritable z de Saturne au Soleil peut être mise sous la forme :

$$z = f(1 + nr) \quad (6.137)$$

avec f marquant la distance moyenne de Saturne au Soleil, et nr étant une fraction extrêmement petite, dont on peut négliger les puissances, et r dépendant uniquement de la valeur de ω ; EULER, vu l'uniformité du mouvement de Saturne, pose encore :

$$d\varphi = mrd\zeta + ndx \quad (6.138)$$

avec un terme ndx étant extrêmement petit. En ne gardant que le premier terme de l'équation 6.138 et en faisant :

$$d\omega = (1 - m)d\zeta \quad (6.139)$$

EULER transforme finalement le système des équations du mouvement dans la forme suivante :

$$\begin{aligned} I \quad & m^2 d\zeta + 2mndx + m^2 nrd\zeta - \frac{nd^2 r}{d\zeta} \\ &= \frac{(1 + \nu)d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nrd\zeta}{\lambda^3} + \frac{nd\zeta \cos \omega}{\lambda} + \frac{nd\zeta(\lambda - \cos \omega)}{h(1 - g \cos \omega)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (6.140)$$

$$\begin{aligned} II \quad & 2mdr + \frac{d^2 x}{d\zeta} \\ &= -\frac{d\zeta \sin \omega}{\lambda} + \frac{d\zeta \sin \omega}{h(1 - g \cos \omega)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (6.141)$$

avec les abréviations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + nr)^2} &\cong 1 - 2nr \\ f &= \lambda a \\ \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} &= g \\ \lambda(1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} &= h \end{aligned} \quad (6.142)$$

Pour profiter de ces équations, dit EULER : «*la plus grande difficulté se rencontre dans la formule irrationnelle : $(1 - g \cos \omega)^{\frac{3}{2}}$ laquelle ne peut se résoudre, vu que la valeur de g est environ égale à $\frac{4}{5}$.*» [179]. Dans un sous chapitre postérieur, nous allons revenir d'une façon détaillée à la démarche d'EULER en vue de résoudre ce problème. Celle-ci entra en mécanique céleste sous la dénomination de développement de la fonction perturbatrice.

Une expression de la forme $(1 - g \cos \omega)^{-\mu}$ peut être développée en série de Taylor :

$$\begin{aligned} (1 - g \cos \omega)^{-\mu} &= 1 - \frac{\mu}{1} g \cos \omega + \frac{\mu(\mu + 1)}{1 \cdot 2} g^2 \cos^2 \omega \\ &\quad + \frac{\mu(\mu + 1)(\mu + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} g^3 \cos^3 \omega + \dots \end{aligned} \quad (6.143)$$

Cette série présente l'inconvénient qu'elle n'est pas intégrable sans transformation différente pour chaque terme. Cet état des choses serait surmontable

dans le cas d'une forte convergence de la série en question de façon que seulement quelques termes pourraient donner une précision suffisante. Tel est le cas pour la théorie de la Lune et la perturbation de l'orbite de celle-ci par le Soleil. La valeur de g est alors égale à 0,005. Or dans le cas de figure de Jupiter et de Saturne $g = 0,84$ et une précision suffisante demanderait une soixantaine de termes de la série 6.143.

EULER propose alors de remplacer la série 6.143, en transformant les puissances du cos de l'angle ω à des cos des angles multiples selon les formules trigonométriques connues, pour parvenir à une expression de la forme :

$$A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + D \cos 3\omega + \dots \quad (6.144)$$

Une telle série est facilement intégrable et devient plus fortement convergente par intégration. Or, il faut d'abord déterminer les coefficients successifs A, B, C, D , qui sont des sommes de séries infinies dont on ne saurait donner la somme que par approximation. Or sa virtuosité algébrique fait entrevoir à EULER qu'il existe des relations entre les deux premiers coefficients A, B et les suivants, et il obtient des formules de récurrence.

Quand les valeurs des coefficients A, B, C, D sont connues, il est aisé de substituer ceux-ci dans l'expression initiale $(1 - g \cos \omega)^{-\frac{3}{2}}$ et d'écrire les équations différentielles :

$$\begin{aligned} I \quad & m^2 d\zeta + 2mndx + m^2 nrd\zeta - n \frac{d^2 r}{d\zeta} \\ &= \frac{(1 + \nu)d\zeta}{\lambda^3} - \frac{2nr d\zeta}{\lambda^3} + \frac{nd\omega \cos \omega}{\lambda(1 - m)} \\ &+ \frac{nd\omega}{h(1 - m)}(\lambda - \cos \omega)(A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + \dots) \end{aligned} \quad (6.145)$$

$$\begin{aligned} II \quad & 2mdr + \frac{d^2 x}{d\zeta} \\ &= -\frac{d\omega \sin \omega}{\lambda(1 - m)} \\ &+ \frac{d\omega \sin \omega}{h(1 - m)}(A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + \dots) \end{aligned} \quad (6.146)$$

EULER procède à l'intégration des équations 6.145 et 6.146 et il trouve la longitude de Saturne sous forme

$$\varphi = \Sigma + m\zeta + nx \quad (6.147)$$

La constante Σ est dépendante du point d'où l'on compte la longitude et $\Sigma + m\zeta$ exprime la longitude moyenne. La particule nx est la variation causée par l'action de Jupiter dans la longitude de Saturne. EULER obtient finalement :

$$\begin{aligned}\varphi = & \Sigma + m\varphi + 0,0000191 \sin \omega - 0,0001523 \sin 2\omega \\ & - 0,0000316 \sin 3\omega - 0,0000093 \sin 4\omega - \dots\end{aligned}\quad (6.148)$$

ou, en exprimant les facteurs de 6.148 en secondes :

$$\varphi = \text{long.moyenne} + 4'' \sin \omega - 32'' \sin 2\omega - 7'' \sin 3\omega - 2'' \sin 4\omega \quad (6.149)$$

EULER conclut que ce dérangement dans le mouvement de Saturne doit être presque imperceptible. «*Et comme le dérangement observé est plusieurs fois plus grand que 10', il est évident qu'on ne le saurait expliquer par cet effet de l'action de Jupiter. On reconnaîtra par la même raison la nécessité de recherches suivantes, où j'introduirai dans le calcul, non seulement l'excentricité de l'orbite de Saturne, mais encore celle de Jupiter.*» [185]

-III-

DANS L'HYPOTHÈSE que les deux orbites soient dans le même plan, l'orbite de Jupiter étant circulaire et celle de Saturne excentrique, EULER se réfère au système des équations du mouvement 6.135 et 6.136 et il introduit ensuite dans le calcul l'ellipse que Saturne décrirait s'il n'était sollicité que par la force du Soleil, pour connaître ensuite les dérangements que l'action de Jupiter doit causer dans l'orbite, aussi bien que dans le mouvement de Saturne. Pour le cas où le mouvement de Saturne n'est pas dérangé par l'action de Jupiter, EULER pose les deux équations pour l'ellipse de KEPLER :

$$\begin{aligned}z &= f(1 + k \cos q) \\ d\varphi &= \frac{dq\sqrt{1-k^2}}{1 + k \cos q}\end{aligned}\quad (6.150)$$

où f est la distance moyenne de Saturne au Soleil, k l'excentricité et q l'anomalie excentrique reliée à l'anomalie moyenne par l'expression

$$\begin{aligned}p &= q + k \sin q \\ dp &= dq(1 + k \cos q)\end{aligned}\quad (6.151)$$

A cause des perturbations de Jupiter, les expressions 6.150 ne peuvent être exactes, et EULER revient à la méthode employée déjà dans [304] pour le cas où la loi de la gravitation n'est qu'à peu près proportionnelle réciproquement aux carrés des distances. Il pose :

$$\begin{aligned} z &= f(1 + k \cos q + nr) \\ d\varphi &= \frac{\alpha dq \sqrt{1 - k^2}}{1 + k \cos q} + ndx \end{aligned} \quad (6.152)$$

qui sont les formules généralement employées dans la méthode des perturbations d'EULER. Il lui reste encore à calculer les variables entrant dans les équations du mouvement et il obtient :

$$d\zeta = \frac{dp}{m} = \frac{dq}{m}(1 + k \cos q) \quad (6.153)$$

$$d\omega = dq \left(\frac{1}{m} - \alpha + \left(\frac{1}{m} + \alpha \right) k \cos q \right) \quad (6.154)$$

α peut être égal à 1

$$v = \sqrt{a^2 + f^2 - 2af \cos \omega + 2kf^2 \cos q - 2kaf \cos q \cos \omega} \quad (6.155)$$

En négligeant toutes les puissances de k plus grandes que 2 et en posant $f = \lambda a$, EULER écrit les équations différentielles *I* et *II* et les intègre tout en appliquant sa méthode déjà exposée pour la transformation de v . Il s'ensuit un ensemble de calculs algébriques assez long et EULER aboutit finalement à l'expression de la longitude vraie de Saturne :

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{long.moyenne} + 4'' \sin \omega - 32'' \sin 2\omega - 7'' \sin 3\omega \\ &\quad - 2'' \sin 4\omega + 13'' \sin(\omega + q) - 257'' \sin(\omega - q) \end{aligned} \quad (6.156)$$

Cette expression est comparable à 6.149 . Le dernier terme de 6.156 est le plus considérable vu qu'il monte à $4'17''$ quand l'angle $(\omega - q)$ est ou 90° ou 270° .

EULER fait état que les expressions numériques qu'il trouve sont en très bonne concordance avec les tables astronomiques.

–IV–

EULER SAIT pertinemment que la prise en compte de l'excentricité de l'orbite de Jupiter engendre encore d'autres inégalités qui corrigeront le résultat 6.156 trouvé. Si dans les recherches antérieures, la distance de Jupiter au Soleil était égale à a , EULER considère a maintenant comme étant la distance moyenne, et suivant la théorie du mouvement des Planètes principales, il pose :

$$\begin{aligned}
y &= a(1 + e \cos p) \\
d\zeta &= dp(1 + e \cos p) \\
d\vartheta &= \frac{dp\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos p}
\end{aligned} \tag{6.157}$$

avec ζ , l'anomalie moyenne, ϑ la longitude vraie, p l'anomalie excentrique et y la distance vraie de Jupiter au Soleil.

EULER néglige les inégalités que l'action de Saturne cause réciproquement dans le mouvement de Jupiter, vu qu'elles sont très petites. En plus, il considère l'orbite de Saturne comme étant circulaire et il pose $k = 0$ tout en gardant les inégalités calculées avec l'hypothèse de l'excentricité de l'orbite de Saturne. EULER reprend alors les équations du mouvement *I* et *II* tenant compte des nouvelles hypothèses, et les intègre suivant les mêmes méthodes déjà utilisées auparavant.

Or, dans ses investigations, EULER tombe pour la première fois sur une inégalité séculaire de la forme :

$$T'''ep \sin(\omega - p) \tag{6.158}$$

dans l'expression de la distance de Saturne au Soleil. Il se rend compte que cette inégalité croîtra à chaque révolution puisque après chacune de ses révolutions, la valeur de p est augmentée de 360° : « *et quelque petite que soit la valeur de $T'''e$, il doit, avec le temps absolument arriver, que la valeur de cette inégalité surpasse toute quantité donnée ...* » [185]. EULER croyait avoir découvert dans ce terme la source des difficultés que les astronomes éprouvaient pour construire des tables pour Saturne : « *C'est ici sans doute qu'il faut chercher la cause principale des dérangements dans le mouvement de Saturne ; et comme les observations nous montrent assez clairement, que dans diverses périodes de Saturne, les différences entre son lieu vrai et son lieu moyen ne sont pas les mêmes, quoiqu'il se trouve à la même anomalie et au même aspect avec Jupiter ; il en faut conclure que les inégalités ne reviennent pas les mêmes dans chaque période, mais qu'elles vont en croissant : et je ne doute presque pas, que cette circonstance ne soit la véritable cause de la dissension des Astronomes, sur le temps périodique de Saturne selon les divers points de son orbite, qu'ils ont eue en vue en cherchant le temps que cette planète met à y retourner* ». [185]

EULER introduit dans ses investigations deux nouvelles variables r , x en posant pour Saturne :

$$z = f(1 + nr) \tag{6.159}$$

$$d\varphi = md\zeta + ndx \tag{6.160}$$

où f étant la distance moyenne de Saturne au Soleil, et z sa distance vraie. φ est la longitude vraie de Saturne et $d\zeta$ la longitude moyenne et n est un

coefficient très petit. A partir des équations du mouvement, EULER déduit alors deux équations en r et x en utilisant l'anomalie excentrique de Jupiter : p comme variable indépendante qu'il considère étant linéaire, et qui, pour des excentricités petites est pratiquement la moyenne entre l'anomalie moyenne et l'anomalie vraie. Dans l'intégration des équations du mouvement, développées à partir des équations de base *I* et *II*, EULER est en face d'expressions intégrales de la forme :

$$\int dp \sin(2\omega - p) = \frac{1}{1 - 2m} \cos(2\omega - p) \quad (6.161)$$

et il fait la remarque que de telles expressions deviendront si importantes qu'il n'est plus permis de les négliger à cause du dénominateur $(1 - 2m)$ qui, dans l'intégration, devient très grand quand le facteur $2m$ se rapproche de l'unité. Cette remarque est la première, à côté des développements de CLAIRAUT, qui fait référence à la question des petits dénominateurs.

L'intégration des équations du mouvement qui contiennent des termes du type 6.161, met EULER alors en présence de termes du type 6.158 qui apparaissent après un artifice de calcul pour faire disparaître ceux dont le dénominateur est égal à zéro.

EULER semble se rendre compte que l'inégalité séculaire ou «*l'arc de cercle*» est causée implicitement par ses hypothèses de départ et il montre le chemin vers son élimination. On peut donc se demander pourquoi il maintient le terme en question. La réponse est peut-être qu'il a cru avoir découvert dans ce terme la cause de l'échec des astronomes pour déterminer une période dans l'orbite de Saturne et de produire des tables exactes de son mouvement.

EULER résume et conclut quant à ses résultats : *«Rassemblant tout ce que je viens de trouver, tant dans cet article que dans les précédents, on aura, faisant l'anomalie excentrique de Jupiter égale à p , celle de Saturne égale à q et la distance de Saturne et de Jupiter égale à ω , que l'on trouve, en ôtant la longitude de Saturne de celle de Jupiter : nous aurons premièrement la distance $\frac{z}{f}$... »*. Cette expression contient tous les résultats acquis dans les investigations antérieures et EULER détermine à la fin de la section la longitude vraie de Saturne, après avoir introduit l'équation elliptique de la Planète :

$$Y = -23515'' \sin q + 167'' \sin 2q \quad (6.162)$$

par l'expression :

$$\begin{aligned} \varphi = & \eta \pm Y + 3'' \sin p + 4'' \sin \omega + 13'' \sin(\omega + q) \\ & - 32'' \sin 2\omega - 257'' \sin(\omega - q) - 7'' \sin 3\omega - 2'' \sin 4\omega \\ & - 3'' \sin(\omega + p) - 3'' \sin(2\omega + p) - \frac{1}{100000} p \cos(\omega - p) \\ & - \dots \sin(\omega - p) - 243'' \sin(2\omega - p) \end{aligned} \quad (6.163)$$

Nous constatons que dans cette expression, il y a l'inégalité séculaire en $\cos(\omega - p)$ et aussi un terme indéterminé pour lequel EULER propose de se référer aux résultats des observations. La formule 6.163 est à comparer aux formules 6.149 et 6.156.

-V-

EULER, dans le paragraphe VI, se tourne maintenant vers la détermination du mouvement des nœuds et de la variation de l'inclinaison de l'orbite de Saturne. Il constate d'abord que l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter est si petite que le changement que les inégalités 6.149, 6.156 et surtout 6.163 pourraient subir de ce fait sont négligeables et que les expressions citées peuvent être utilisées telles quelles. Il ne reste qu'à déterminer le mouvement qui peut se trouver dans la ligne des nœuds et la variation à laquelle l'inclinaison même peut être assujettie. EULER suit sa technique habituelle qui consiste à subdiviser le problème en problèmes plus élémentaires. Il suppose donc que les excentricités des orbites et les perturbations mutuelles des deux planètes sont négligeables pour le calcul du rayon vecteur et de la longitude et auront peu d'effets sur la détermination des perturbations des latitudes. EULER pose donc :

$$\begin{aligned}
 y &= a \\
 z &= f \\
 \vartheta &= \sqrt{a^2 + f^2 - 2af \cos \omega} \\
 f &= \lambda a \\
 dv &= d\zeta \\
 d\varphi &= md\zeta \\
 d\omega &= (1 - m)d\zeta
 \end{aligned} \tag{6.164}$$

Il introduit encore comme dans les paragraphes précédents :

$$\begin{aligned}
 \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} &= g \\
 \lambda(1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}} &= h
 \end{aligned} \tag{6.165}$$

et obtient les expressions suivantes des équations *III* et *IV* données par les formules 6.129 et 6.130

$$I \quad d\pi = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \sin(\varphi - \pi) \sin(\vartheta - \pi) \quad (6.166)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{h}(A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + D \cos 3\omega + \dots)\right)$$

$$II \quad d(\ln \tan \rho) = \frac{n}{\lambda m} d\zeta \cos(\varphi - \pi) \sin(\vartheta - \pi) \quad (6.167)$$

$$\left(1 - \frac{\lambda}{h}(A + B \cos \omega + C \cos 2\omega + D \cos 3\omega + \dots)\right)$$

Comme π ne varie que très peu, EULER admet que cette quantité, dans l'intégration des formules précédentes, peut être regardée comme constante, pour les soumettre ultérieurement à une itération. Avant de procéder à l'intégration de 6.166 et 6.167, EULER résout les intégrales qu'il va rencontrer dans les quadratures de ces expressions. Il trouve finalement les équations intégrales :

$$I \quad \pi = C - \frac{n}{4m^2h} B\varphi$$

$$+ \frac{n}{mh} \left(\frac{\alpha}{2(1-m)} \sin \omega - \frac{\alpha}{2(1+m)} \sin(\vartheta + \varphi - 2\pi) \right.$$

$$- \frac{B}{8(1-m)} \sin 2\omega + \frac{B}{8m} \sin 2(\varphi - \pi)$$

$$\left. + \frac{B}{8} \sin 2(\vartheta - \pi) \right) \quad (6.168)$$

$$II \quad \ln(\tan \rho) = D - \frac{n}{mh} \left(\frac{\alpha}{2(1-m)} \cos \omega + \frac{\alpha}{2(1+m)} \cos(\vartheta + \varphi - 2\pi) \right.$$

$$- \frac{B}{8(1-m)} \cos 2\omega - \frac{B}{8m} \cos 2(\varphi - \pi)$$

$$\left. - \frac{B}{8} \cos 2(\vartheta - \pi) \right) \quad (6.169)$$

Dans l'expression 6.169, une erreur de calcul d'EULER a été redressée pour les deux derniers termes. Il donne ensuite les inégalités périodiques de π et de $\ln(\tan \rho)$ exprimées en nombres :

$$\pi = \text{const} - 0,0004066\varphi + 141'' \sin \omega - 28'' \sin 2\omega$$

$$+ 42'' \sin 2(\varphi - \pi) + 17'' \sin 2(\vartheta - \pi)$$

$$- 60'' \sin(\vartheta + \varphi - 2\pi) \quad (6.170)$$

$$\ln(\tan \rho) = \text{const} - 141'' \cos \omega + 28'' \cos 2\omega$$

$$- 42'' \cos 2(\varphi - \pi) - 17'' \cos 2(\vartheta - \pi)$$

$$- 60'' \cos(\vartheta + \varphi - 2\pi) \quad (6.171)$$

Par l'équation 6.170, le lieu vrai du nœud peut différer quelquefois du lieu moyen de plus de 3' et l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter varie par rapport à la valeur moyenne d'environ 5". Ces inégalités sont si minimes, que suivant l'opinion d'EULER, les Tables Astronomiques ne devraient pas être chargées de ces équations et il suffira de se servir du lieu moyen du nœud dans les calculs astronomiques. EULER poursuit alors que : «*Les mêmes équations qui m'ont servi à déterminer jusqu'à présent les dérangements de Saturne causés par l'action de Jupiter, serviront aussi réciproquement à déterminer les dérangements de Jupiter causés par l'action de Saturne, pourvu qu'on détermine convenablement les valeurs des coefficients*» [185]. Il fait alors les calculs pour les planètes principales afin de trouver la rétrogradation de leurs nœuds ascendants quoique les considérations soient plus délicates dans le cas des planètes intérieures dont les perturbations ne dépendent pas uniquement d'un seul compagnon. Il reviendra à la question dans un mémoire de 1754 : «*De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique*» [343]. EULER conclut dans ce mémoire que l'obliquité de l'écliptique diminue, et calcule une valeur assez exacte de cette diminution. Mais aussi dans le texte qui nous préoccupe ici, EULER montre que le plan de l'écliptique n'est pas fixe et que les étoiles fixes subissent des changements de latitude. Il calcule à partir du mouvement séculaire de la ligne des nœuds de l'écliptique sur l'orbite de Jupiter, combien la latitude de chaque étoile fixe doit croître ou décroître pendant un siècle. Il regroupe ses résultats dans une table qui permet d'évaluer ces changements de latitude jusqu'aux temps de PTOLÉMÉE et même d'HIPPARQUE.

-VI-

EULER COMPARE, dans le restant de son mémoire, les formules, qu'il a déduites sur la base de la loi de la gravitation newtonienne, aux observations. Mais il ne considère que les longitudes de Saturne vu qu'il estime que la latitude de la planète n'est pratiquement pas perturbée par Jupiter. Utilisant pour ces comparaisons aussi des observations anciennes dont l'exactitude est tout au plus d'une minute, il néglige les inégalités qui sont moindres qu'une demie minute. La formule qui exprime la longitude vraie de Saturne sera :

$$\begin{aligned} \varphi = & \eta - 23525'' \sin q - 32'' \sin 2\omega - 257'' \sin(\omega - q) \\ & - \dots \sin(\omega - p) - 243'' \sin(2\omega - p) - \dots p \cos(\omega - p) \\ & + 168'' \sin 2q \end{aligned} \quad (6.172)$$

η étant la longitude moyenne de Saturne donnée dans les «*Tables astronomiques*» de J. CASSINI [344].

Les coefficients des termes $\sin(\omega - p)$ et $p \cos(\omega - p)$ ne sont pas donnés dans 6.172 car EULER conclut qu'il n'était pas possible de les déduire de la théorie.

Cette insuffisance théorique est due au fait qu'EULER avait admis l'aphélie de Jupiter comme étant stationnaire. EULER obtint ainsi un terme proportionnel à $\cos(\omega - p)$ dont le coefficient a un dénominateur égal à zéro. Il contourne cette difficulté en introduisant un terme proportionnel à p . EULER reconnut dans son deuxième mémoire [179] de 1752 sur le même sujet, tout comme le firent plus tard LAGRANGE et LAPLACE, que la prise en considération d'un aphélie mobile pour Jupiter ferait disparaître «*l'arc de cercle*» et fournirait des coefficients pour les termes en $\cos(\omega - p)$ et $\sin(\omega - p)$. Or dans la première pièce de 1748, EULER voit un intérêt à garder cette inégalité circulaire car il est persuadé que c'est bien elle qui explique la nature des perturbations de Saturne.

EULER procède maintenant à une application de sa formule 6.172 aux observations astronomiques et il choisit, à cette fin, 99 positions de Saturne en opposition au Soleil qu'il trouve dans les «*Elemens d'Astronomie*» [345] de J. CASSINI. Il calcule les valeurs de η , q , $2q$, ω , $\omega - q$ pour chacune de ces positions en utilisant les «*Tables astronomiques*» [344] du même J. CASSINI. Or, celles-ci «*étant fondées sur les règles de KEPLER ont besoin, comme il est aisé de le concevoir, de quelques corrections, puisqu'on a enveloppé les inégalités causées par l'action de Jupiter dans l'excentricité et la position de l'orbite de Saturne*». [185]

EULER propose donc de remplacer la longitude moyenne de Saturne η des Tables par $\eta + m'' + Nn''$, où m'' est une correction constante qu'il faut ajouter à chaque longitude moyenne, Nn'' représente une correction du temps périodique qui ira tous les ans en croissant avec le nombre d'années N , à commencer par l'an 1582, quand eut lieu la première observation de Saturne dont EULER dispose; m'' et n'' sont des inconnues à déterminer. D'une façon similaire, il remplace l'anomalie excentrique q par $q + k$ et les coefficients des deux premiers termes de l'équation du centre par $-(23525 + x)$ et $(168 + y)$ où k , x et y sont d'autres inconnues à déterminer. Pour le coefficient de $\sin(\omega - p)$, il utilise la lettre $-z$ et pour celui de $p \cos(\omega - p)$, l'expression $-\mu(\alpha + 360\nu + p)$ ou ν est le nombre de révolutions de Jupiter depuis 1582 et μ et α sont encore d'autres inconnues. L'équation 6.172 prend donc la forme modifiée :

$$\begin{aligned} \varphi = & \eta - 23525'' \sin q + 168'' \sin 2q - 32'' \sin 2\omega - 257'' \sin(\omega - q) \\ & - 243'' \sin(2\omega - p) - m'' - x'' \sin q + y'' \sin 2q - z'' \sin(\omega - p) \\ & - \mu(\alpha + 360\nu + p) \cos(\omega - p) + Nm'' - 0,11405k'' \cos q \\ & + \frac{1}{600}k'' \cos 2q \end{aligned} \quad (6.173)$$

EULER remarque alors : «*que les lettres φ , η , q , ω , p , ont pour chaque observation les mêmes valeurs que celles qui sont exprimées dans la Table des observations; et qu'elles sont par conséquent connues. Mais les lettres m , n , k , x , y , z , μ et α marquent des quantités inconnues, dont les valeurs pourront être déterminées par 8 équations de cette nature, qu'on formera d'un pareil*

nombre d'observations» [185]. Or, il est clair pour EULER que la solution est plus complexe, vu les erreurs observationnelles ainsi que des erreurs de calcul. Voilà pourquoi il souligne : *«Mais comme de petites erreurs commises tant dans les observations que dans le calcul, en pourraient produire de fortes grossières dans les valeurs de ces lettres, on doit dans cette recherche, choisir avec soin les observations qui seront les plus propres pour ce dessein, afin que des erreurs inévitables dans les observations et dans le calcul, il en résulte de moins considérables dans les valeurs de ces huit lettres cherchées. Et partant, pour arriver heureusement à ce but, il faut tâcher de choisir des observations telles que si l'on combine les équations qui en résultent, la plupart des lettres inconnues s'évanouissent, en sorte qu'on n'ait plus à déterminer à la fois qu'une ou deux de ces huit lettres inconnues. Car alors, on pourra être plus sûr de la justesse des valeurs, qu'on trouvera par cette voie. Or, je remarque d'abord que dans les deux observations, dont l'intervalle de temps est égal à 59 ans, les valeurs des lettres connues sont à peu près les mêmes; et que si l'on retranche l'une de l'autre des équations qu'on en tire, toutes les lettres inconnues se détruiront mutuellement, excepté les deux n et μ . Donc si l'on cherche deux ou plusieurs équations de cette nature, on en tirera aisément et avec assez de précision les valeurs de ces deux lettres n et μ ; ensuite, comme il ne reste que six lettres à déterminer, on les déterminera plus facilement en se servant de pareilles précautions.»* [185]

Nous n'allons pas suivre dans les détails les calculs d'EULER dans le restant de son texte. De trois groupes de cinq observations chacun, avec les équations de condition développées à partir d'eux, EULER conclut à ce que $n = -11''$ et avec plus de réserve que μ vaut à peu près $\frac{1}{7}$, valeur qu'il va changer plus tard. De deux déterminations différentes pour m et x , chacune basée sur deux observations, résulte une expression pour m en fonction de k et une expression pour x en fonction de y , z et $\alpha\mu$. EULER remarque : *«que chacune de ces lettres doit être déterminée par des équations où elle obtienne le plus grand coefficient tant affirmatif que négatif.»* [185]

Or, la recherche d'EULER en vue de trouver de telles équations n'est pas tellement couronnée de succès. Il en est de même de l'introduction de transformations algébriques en vue de faciliter ses calculs. Il conclut que la tentative de résolution employée n'est pas concluante et il propose une autre approche : *«Afin qu'on puisse mieux voir de quelle nature doivent être les valeurs des lettres r , s , t , v et y , après avoir supposé $n = -11$ et $n\mu = \frac{1}{7}$, je ferai $m = 1200 + \mu$ et toutes les équations que j'ai trouvées jusqu'ici changeront.»* [185]. EULER donne ensuite les nouvelles 21 équations basées sur les observations entre 1583 et 1745. En passant $\mu = 71$ et en changeant u à $\frac{1}{28}$ tout en admettant r , s , t , v , y égaux à zéro, EULER réduit les erreurs tant positives que négatives à $13'34''$.

Or, *«Pour diminuer davantage ces erreurs, je ne vois pas de valeurs à donner aux lettres r , s , t , v et y , à moins que celles des lettres r et t , ne soient extrêmement grandes, auquel cas, il faudrait des observations beaucoup plus exactes, pour en pouvoir tirer ces valeurs par la méthode ordinaire. Mais j'ob-*

serve que si l'on ajoute encore cette équation $+540 \sin(2\omega - p)$, les erreurs non seulement seront diminuées considérablement, mais on pourra déterminer des valeurs pour les autres lettres, qui les diminueront encore davantage.» [185]

La nouvelle équation est une véritable révision de l'équation $-243'' \sin(2\omega - p)$ qu'EULER avait déduite sur la base de la théorie newtonienne et, ne pouvant trouver une erreur dans ses déductions mathématiques, il conclut que : *«c'est une preuve évidente que la théorie newtonienne n'est pas trop d'accord avec les observations; ce qui se confirme encore par les erreurs qui sont restées, puisqu'elles ne sauraient être attribuées tout à fait aux observations»* [185]. Il faut noter que chez LAPLACE aucune des deux expressions ne fait partie de l'expression de la longitude vraie de Saturne comme nous allons le constater plus tard.

Enfin EULER, par une procédure plutôt heuristique, trouve les valeurs $m = 1185''$, $n = 11''$, $k = -1800''$, $x = o$, $y = 0$, $z = o$, $\alpha u = o$ et $\mu = \frac{1}{28}$. En considérant 36 observations, il trouve des erreurs aussi larges que $8'11''$ et $q'q''$ quoique l'erreur moyenne est moindre. Après tous ces efforts numériques, EULER paraît déçu et avance la mauvaise qualité des observations pour expliquer son échec relatif. Il revient à la question dans son deuxième mémoire ayant le même sujet en 1752, alors que lui-même est désormais convaincu de l'exactitude de la théorie de la gravitation newtonienne. Il corrige partiellement sa théorie en introduisant les mouvements de la ligne des apsides et les changements séculaires des excentricités mais se garde de répéter encore une fois les calculs numériques fastidieux. La tentative d'EULER de 1748 en vue de confronter la théorie et l'observation ne convainc pas et il y a des déficiences dans sa compréhension de ce qui deviendra plus tard la méthode des moindres carrés. Nous allons voir après que Tobias MAYER a beaucoup mieux réussi avec la même approche dans sa théorie de la Lune. Si le résultat scientifique de la pièce d'EULER de 1748 reste relatif, fait implicitement reconnu par l'Académie Royale de Paris qui se décida à reposer le même sujet en 1750 et 1752, il faut souligner que la pièce d'EULER a montré le chemin pour traiter les perturbations planétaires et constitue le premier essai pour introduire la méthode de la variation des éléments orbitaux.

6.3.4 La première théorie de la Lune d'Euler

—|—

Nous avons déjà relaté le grand intérêt qu'EULER porta aux travaux de CLAIRAUT concernant le mouvement de la ligne des apsides de la Lune dans plusieurs chapitres antérieurs. CLAIRAUT, après avoir déclaré le 15 novembre 1747 à l'Académie des Sciences que la loi de la gravitation newtonienne était inexacte, opinion qui fut soutenue entièrement par EULER, il se rétracta publiquement de son affirmation le 17 mai 1749. Il déclara : *«qu'il était parvenu à concilier très exactement les observations faites du mouvement de l'apogée de*

la Lune avec la loi de l'attraction qui admet le carré de la distance inverse. Au moins, les différences que j'ai trouvées entre mes résultats et les observations sont si minimales, qu'elles peuvent être attribuées à l'omission de quelques éléments que la théorie ne peut utiliser qu'à grands frais et qui heureusement n'ont qu'une très petite importance.» [194]

Les dérivations mathématiques sur lesquelles CLAIRAUT se basa ne furent connues du monde savant qu'en 1752 par deux mémoires lus à l'Académie des Sciences en mars de l'année 1752 [193] et par son livre : *«Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux carrés des distances»* [173], auquel fut attribué le prix de l'Académie de St-Petersbourg en 1751 mais qui ne fut publié que l'année suivante.

L'importance de la découverte de CLAIRAUT fut reconnue par EULER dès qu'il en fut informé, d'abord par une lettre de A.N. Grischow [346] puis par une lettre du 19 juin 1749 de CLAIRAUT lui-même [325]. La réaction d'EULER, devant l'ignorance de la méthode employée par CLAIRAUT, fut de reconsidérer sa propre méthode afin de dériver la vraie valeur du mouvement de la ligne des apsides. Il n'y arrivait pas, et voilà pourquoi il incita l'Académie Impériale de St-Petersbourg, dont il était resté membre honoraire, à mettre à prix la question *«Si les inégalités qui sont observées dans le mouvement de la Lune sont en concordance avec la théorie newtonienne ou non»*. La suggestion d'EULER fut acceptée, et il fut nommé comme un des commissaires pour le concours de 1751 de l'Académie de St-Petersbourg avec le sujet qu'il avait lui-même proposé. CLAIRAUT fut un des postulants au concours et il en fut le lauréat. Après avoir reçu la pièce de CLAIRAUT pour le concours en question, EULER écrivit dans une lettre du 26 mars 1751 à CLAIRAUT qui résume ses résultats dans la question : *«J'ai dirigé mon analyse à la dérivation d'une équation reliant la longitude de la Lune à son anomalie vraie, qui me semble plus adéquate à l'usage de l'astronomie : En effet, on obtient à partir de l'anomalie moyenne et de l'excentricité, l'anomalie vraie à travers l'équation de KEPLER. J'obtiens ainsi le lieu de la Lune qui ne diffère que peu du lieu vrai ; je prends ensuite la longitude vraie du Soleil pour la soustraire de la longitude de la Lune déduite de la seule excentricité : la différence ne différera pas sensiblement de la distance vraie entre la Lune et le Soleil, de façon que les corrections que j'aurai à faire sont extrêmement petites ... »* [325].

Dans cette lettre, EULER donne un aperçu de sa : *«Théoria motus lunae»* [291] publiée par l'Académie de St-Petersbourg en même temps que l'essai de CLAIRAUT [173]. En effet, EULER chercha à introduire dans son texte sur la Lune les variables et coordonnées de telle façon à garantir la meilleure convergence des séries décrivant les perturbations. Cette recherche l'amènera à développer sa méthode de la variation des éléments elliptiques, méthode qui est à l'origine de la création de la mécanique céleste classique.

A. GAUTHIER, dans son *«Essai historique sur le problème des trois corps ... »* [117] de 1817 donne une exposition du but principal de l'ouvrage d'EULER : *«EULER envoya à l'Académie de Pétersbourg, dont il était membre honoraire, son jugement sur la pièce de CLAIRAUT, avec une dissertation latine très éten-*

due, qu'il avait composée quelque temps auparavant sur le même sujet. Cette Académie la fit ensuite imprimer à Berlin, sous les yeux de l'auteur, et elle parut en 1753 sous le nom de «*Theoria motus Lunae*». Le but principal que EULER paraît avoir eu dans cet ouvrage, est de résoudre la question du mouvement de l'apogée. «Le célèbre CLAIRAUT, dit-il, n'ayant pas encore exposé publiquement les raisons qui l'ont porté à rétracter sa première assertion sur l'insuffisance de l'attraction newtonienne, qu'il me soit permis, à moi qui ai toujours été d'une opinion contraire à celle qu'il énonce maintenant et qui m'y suis confirmé depuis longtemps par plusieurs méthodes différentes, de ne pas regarder la question comme décidée jusqu'à ce que je sois parvenu à la résoudre par mes propres recherches . . . Je considérerai d'abord le problème dans sa plus grande généralité, afin de déterminer le mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques ; j'introduirai ensuite dans le calcul les expressions de celles auxquelles la Lune est soumise, et je donnerai les équations de son mouvement ; je les transformerai de diverses manières, jusqu'à ce qu'elles soient mises sous la forme la plus convenable ; enfin je m'attacherai à en conclure, tant le mouvement de l'apogée que toutes les inégalités de la Lune, de manière à parvenir à leurs véritables expressions, dans le cas même où la loi de NEWTON serait en défaut.»

EULER voit dans la dérivation exacte du mouvement de la ligne des apsides le test décisif pour la validité de la loi d'attraction newtonienne. Ainsi dans l'introduction du texte que nous examinons, il écrit : «la considération de l'apogée offre la méthode la plus sûre pour décider de la vérité de la théorie newtonienne. Car une inégalité dérivée de façon théorique dans le mouvement de la Lune, éventuellement plus grande ou plus petite de quelques secondes ou même de minutes peut être attribuée à quelque petite erreur dans les observations ou à une faute d'approximation dans les calculs, puisque la théorie newtonienne n'est pas loin de la vérité. Mais il en est tout autrement dans le cas du mouvement de l'apogée : car si les forces agissant sur la Lune ne diffèrent de la théorie newtonienne que de façon imperceptible de sorte que les différences entre les mouvements calculé et observé est à peine constatable, dans le cas du mouvement de l'apogée, il peut en résulter une différence de plusieurs degrés. Comme une telle différence ne peut plus être attribuée à une erreur d'observation ou à une faute de calcul, l'investigation du mouvement de l'apogée est le critère le plus certain pour juger si, oui ou non, la théorie est conforme à la vérité. Voilà pourquoi si par un calcul exact, il peut être montré que la théorie newtonienne donne la même valeur que celle trouvée par l'observation c'est-à-dire 40° par an, on ne peut désirer aucun argument plus fort pour démontrer la vérité de cette théorie» [291].

-II-

EULER INTRODUIT alors les trois équations du mouvement en coordonnées rectangulaires et il suppose le point matériel soumis à trois forces dirigées suivant ces mêmes coordonnées. La première composante P est dirigée suivant la ligne qui joint la projection du point matériel sur l'un des plans de coordonnées et l'origine du système de coordonnées ; la seconde Q située dans le même plan et en sens contraire du mouvement ; la troisième R , perpendiculaire à ce plan, et tentant à en rapprocher le mobile. En fonction des coordonnées polaires x , φ et ψ , EULER trouve les équations :

$$d^2x - xd\varphi^2 = -\frac{1}{2}Pdt^2 \quad (6.174)$$

$$2xdx d\varphi + xd^2\varphi = -\frac{1}{2}Qdt^2 \quad (6.175)$$

$$d^2(\tan \psi) = -\frac{1}{2}Rdt^2 \quad (6.176)$$

x , φ et ψ , désignant la projection de la distance, la longitude et la latitude du point matériel. La fraction $\frac{1}{2}$ qui multiplie dt^2 provient du fait que EULER introduit le double de l'accélération terrestre comme unité, et elle disparaît dans l'élimination de l'élément du temps. EULER décompose ensuite l'équation 6.176 au moyen d'une relation trigonométrique, pour obtenir les expressions différentielles du mouvement des nœuds π et de l'inclinaison ρ de l'orbite. La méthode par laquelle il y parvient, en regardant alternativement π et ρ comme constantes et comme variables est déjà fondée sur le principe de la variation des constantes arbitraires.

Il obtient ainsi, au moyen de l'équation 6.176 et de la relation :

$$\tan \psi = \tan \rho \sin(\varphi - \pi) \quad (6.177)$$

les deux expressions :

$$d\pi = \frac{1}{2}dt^2 \frac{\sin(\varphi - \pi)}{xd\varphi} \quad \{P \sin(\varphi - \pi) + Q \cos(\varphi - \pi) - R \cot \rho\} \quad (6.178)$$

$$d(\ln \tan \rho) = d\pi \cot(\varphi - \pi) \quad (6.179)$$

La dernière relation s'obtient au moyen de l'hypothèse que la Lune demeure dans le même plan pendant l'élément dt du temps. On peut donc considérer les quantités π et ρ comme des constantes séparément. Voilà pourquoi on obtient la formule différentielle :

$$d(\tan \psi) = d\varphi \tan \rho \cos(\varphi - \pi) \quad (6.180)$$

Si maintenant, on regarde dans cette différentiation les quantités π et ρ comme variables, on tirera de 6.180

$$d(\tan \psi) = d\varphi \tan \rho \cos(\varphi - \pi) - d\pi \tan \rho \cos(\varphi - \pi) + d \tan \rho \sin(\varphi - \pi) \quad (6.181)$$

Cette valeur de $d(\tan \psi)$ comparée à la précédente donne alors la relation 6.179.

EULER détermine ensuite les valeurs des forces dans le cas particulier de l'orbite lunaire en prenant le plan de l'écliptique pour plan de projection et le centre du Soleil pour origine des coordonnées. Puis, tout en supposant valable la loi de l'attraction newtonienne, EULER introduit dans l'expression de l'attraction de la Terre sur la Lune un terme indéterminé h qu'il suppose constant, et qui diminue la valeur de cette force attractive dans le cas de l'inverse du carré des distances.

EULER désigne par les lettres, S , T , L les masses du Soleil, de la Terre et de la Lune, placées aux centres du Soleil, de la Terre et de la Lune, tout comme CLAIRAUT, lui aussi, a procédé. Il abaisse alors du centre de la Lune une perpendiculaire sur le plan de l'écliptique qui rencontre ce plan en m . EULER relie alors les différents points par les lignes MC , mC , MO , mO , puis construit la ligne $h m h'$ perpendiculaire à mC , ainsi que mO' parallèle à OC . Il prolonge ensuite Cm jusqu'en C' qu'il relie à O avec $CC'O$ étant un angle droit.

EULER introduit les désignations :

$$\begin{aligned} mCO &= \eta \\ mC &= x \\ OC &= y \\ OM &= z \\ MCm &= \psi \end{aligned} \quad (6.182)$$

et possède ainsi tous les éléments géométriques pour calculer les forces P , Q et R introduites dans les équations 6.174 à 6.176.

Il obtient ainsi :

$$P = (T + L) \cos^3 \psi \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{h^2} \right) + S \left(\frac{x}{z^3} - \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{y^2} \right) \cos \eta \right) \quad (6.183)$$

$$Q = S \left(\frac{y}{z^3} - \frac{1}{y^2} \right) \sin \eta \quad (6.184)$$

$$R = (T + L) \cos^2 \psi \sin \psi \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{h^2} \right) + S \frac{x \tan \psi}{z^3} \quad (6.185)$$

$$z = \sqrt{y^2 - 2xy \cos \eta + x^2 \sec^2 \psi} \quad (6.186)$$

EULER entreprend alors tout un ensemble de transformations préliminaires en substituant à la place de la distance z de la Lune au Soleil, sa valeur en fonction des deux autres côtés du triangle formé par les trois astres et de l'angle compris. Vu que le développement en série de z est très convergent, EULER se borne aux quatre premiers termes de ce développement. Il prend successivement pour variables indépendantes le temps, l'anomalie moyenne q du Soleil et celle de la Lune p , comme il l'avait annoncé dans sa lettre du 26 mars 1751 à CLAIRAUT. Il intègre alors une première fois l'équation 6.175 avec une constante arbitraire C , en vue d'obtenir la valeur de $d\varphi$ qu'il substitue alors dans l'équation 6.174. Ensuite il remplaça le rayon y de l'ellipse solaire par sa valeur elliptique :

$$y = \frac{b(1 - e^2)}{1 - e \cos s} \quad (6.187)$$

et suppose x égal à la valeur qu'il aurait dans le mouvement elliptique, multipliée par une variable μ , qu'il fait ensuite égale à l'unité plus une nouvelle variable ν .

$$x = \frac{a(1 - k^2)\mu}{1 - k \cos r} \quad (6.188)$$

EULER introduit enfin l'anomalie vraie de la Lune comme variable indépendante définitive et désigne par $\int R dr$ la partie de la valeur $d\varphi$ qui reste sous le signe de l'intégration et en appelant v l'angle parcouru par le Soleil et η l'élongation $\varphi - v$, il obtient, au moyen de l'équation des aires la valeur de dv en fonction des éléments de l'orbite du Soleil, et après celle de $d\eta$. Il suppose pour $d\varphi$

$$d\varphi = \frac{dr}{\mu^2} \left(C - \frac{1}{n^2} \int R dr \right) \quad (6.189)$$

avec

$$R = \frac{3}{2} \frac{(1 - k^2)^3 (1 - e \cos s)^3}{(1 - e^2)^3 (1 - k \cos r)^4} \mu^2 \sin 2\eta + \dots \quad (6.190)$$

et C étant une constante.

EULER applique la loi des aires et parvient, après une série de calculs, à transformer la première équation du mouvement en une autre dont le premier terme est la dérivée seconde de ν par rapport à r , et dont le second membre est formé d'une suite de termes de deux espèces différentes. Les premiers sont de simples fonctions de quantités non périodiques ou des cosinus de l'angle $(\varphi - \pi)$, qui expriment la distance de la Lune à son nœud ascendant, des anomalies vraies r et s de la Lune et du Soleil, de l'élongation η et de la tangente de l'inclinaison ρ . Ces facteurs sont, soit multipliés par m , qui est le rapport des masses divisées par le cube des distances moyennes, soit multipliées ou divisées par le rapport n des moyens mouvements. D'autres facteurs de multiplication sont les deux premières puissances des excentricités k et e ainsi que la variable ν , respectivement son carré. La deuxième sorte de termes sont des produits de $\int Rdr$ respectivement de son carré par certains coefficients. L'équation différentielle prend ainsi la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\nu}{dr^2} = & C \left(n^2 - 3\nu + \frac{6\nu^2}{n^2} \right) - 2C \int Rdr + \frac{1}{n^2} \left(\int Rdr \right)^2 \\ & + \frac{3m \tan^2 \rho}{4} \{1 - \cos 2(\varphi - \pi)\} (1 + k \cos r + \dots) \\ & 3k \cos(2\eta - r) - \frac{9}{4} e \cos(2\eta - s) + \dots \end{aligned} \quad (6.191)$$

EULER parvient à des expressions analogues pour $d\pi$ et $d(\ln \tan \rho)$. Toutes ces formules fondamentales étant ainsi données, EULER procède à l'intégration de celles-ci à travers des séries. Il pose :

$$\int Rdr = A \cos 2\eta + B \cos 4\eta + C\nu \cos \eta + D\nu \cos 3\nu \quad (6.192)$$

$$\nu = A' \cos 2\eta + B' \cos 4\eta + C'\nu \cos \eta + D'\nu \cos 3\eta \quad (6.193)$$

Dans cette première approximation, EULER ne veut considérer d'abord que les inégalités de la Lune qui proviennent de l'angle η et de ses multiples, en supposant nulles les excentricités et l'inclinaison de l'orbite, afin d'obtenir d'abord la partie de l'inégalité de la variation indépendante de l'excentricité. La substitution des valeurs supposées ν et $\int Rdr$ dans l'équation différentielle 6.191 lui donne de nouvelles équations pour la détermination des constantes inconnues.

Après cette première calcul, EULER passe à la recherche des inégalités de la Lune qui dépendent de la première puissance de l'excentricité k de son orbite. Il fait usage pour les obtenir, du même procédé que celui qu'il vient d'appliquer aux inégalités de la première classe. Voilà pourquoi il suppose pour $\int Rdr$ une expression composée des deux premiers termes de 6.192 et d'une suite de fonctions de k et des cos des angles r , $2\eta - r$, $2\eta + r$, etc, multipliées par de nouveaux coefficients indéterminés. Le terme ν est également développé

de façon analogue. Puis, il a recours aux mêmes opérations que celles qu'il a déjà employées pour déterminer les coefficients de chacun des termes de ces deux valeurs. EULER pratique une approche perturbative en ne considérant dans les équations identiques que les termes qui se trouvent multipliés par k , et en substituant dans les équations de condition, les valeurs des coefficients déjà connus et celle de l'élément k .

EULER continue son approche itérative et analyse au chapitre 6 les inégalités de la Lune qui dépendent du carré de son excentricité. L'auteur ajoutant alors aux valeurs indéterminées de ν et $\int Rdr$ de nouveaux termes où les cos des angles $2r$, 2η , 4η et de leurs composés se trouvent multipliés par k^2 parvient, par la méthode déjà décrite, à fixer les valeurs de leurs coefficients.

Dans le chapitre suivant, EULER cherche à perfectionner ses calculs par des opérations longues et compliquées, afin d'obtenir des valeurs plus exactes des inégalités déjà trouvées en les considérant dans leur ensemble. Il détermine ainsi avec plus de précision l'expression de $d\varphi/dr$ qu'il intègre ensuite par les méthodes qu'il a déjà employées. Il obtient ainsi pour φ un développement dont la partie non périodique contient une valeur O qu'il pense pouvoir déterminer par l'observation. EULER fait ici le joint entre les techniques observationnelles et les considérations analytiques. Après quelques calculs, il déduit de la comparaison du résultat du calcul avec l'observation qu'il n'y a nul besoin de supposer d'autre force que celle qui a lieu en raison inverse du carré des distances pour accorder les résultats de la théorie avec ceux de l'observation. Avec cette constatation, la question de la validité de la loi de l'attraction newtonienne n'est plus mise en doute par EULER dans ses travaux postérieurs. On peut donc estimer qu'à partir de 1751, EULER est devenu newtonien.

EULER continue ses investigations en considérant encore d'autres inégalités. Ainsi celles qui proviennent de la seule excentricité e de l'orbite du Soleil, négligées jusqu'alors, demandent pour $\int Rdr$ et ν une dépendance de l'anomalie vraie s du Soleil et de l'angle 2η , tandis que ces expressions sont indépendantes de r . Il parvient ensuite à l'évaluation des termes qui dépendent du produit ek des excentricités, toujours en ajoutant de nouveaux termes aux expressions $\int Rdr$ et ν et en procédant avec la méthode utilisée dans les calculs antérieurs. A la fin, il détermine les inégalités de la Lune qui proviennent du rapport des parallaxes ou des distances moyennes du Soleil et de la Lune à la Terre. Il fait entrer à cet effet de nouveaux termes dans les séries où ce rapport multiplie les cos des angles η , 3η , $\eta - r$, $\eta - s$, $3\eta - s$ et il en détermine les coefficients de la même manière. Il remarque que les inégalités qui dépendent des angles $2\eta - 3r$, $2\eta - 2r + s$ peuvent monter à plusieurs secondes, mais que leur détermination est si rebutante qu'il a préféré s'en rapporter sur ce point aux observations.

EULER s'attaque ensuite au mouvement des nœuds et à la variation de l'inclinaison. Il développe les équations différentielles régissant ces inégalités. Afin de tirer les expressions de π respectivement de $\log \tan \rho$, EULER procède encore une fois par élimination et cherche séparément les valeurs provenant des différentes variables et de leurs puissances. Il intègre ensuite par sa méthode ordinaire et obtient un nombre suffisant d'équations pour déterminer tous les

coefficients. Dans le calcul de l'inclinaison, EULER décide de négliger plusieurs inégalités dont quelques unes dépassent $10''$. Rassemblant ensuite tous les résultats, il en tire immédiatement la valeur de π et obtient celle de ρ en utilisant l'expression.

$$\tan \rho = 1 + s + \frac{1}{2}s^2 \quad (6.194)$$

où il a posé $\log \tan \rho = s$

En faisant $\rho = s + \mu$, avec s étant l'inclinaison moyenne donnée par les observations et μ une petite quantité variable, EULER obtient :

$$\tan \rho = \tan s + \frac{\omega}{\cos^2 s} \quad (6.195)$$

$$\omega = \frac{1}{2}(V - 1) \sin^2 s \quad (6.196)$$

$$V = \tan \rho \cot s$$

Rassemblant ensuite tous ces résultats partiels, en ajoutant les coefficients de chaque fonction périodique donnés pour toutes les opérations successives, il parvient aux valeurs complètes de μ et de $d\varphi/dr$ en fonction des produits des cos de η , r , s et de leurs multiples, par des coefficients numériques et par les éléments e , k et ν . Il représente par ζ la longitude de la Lune déterminée dans son mouvement elliptique selon les règles de KEPLER ; φ est alors égal à ζ plus une fonction des sin des angles η , r , s , φ , π , v et de leurs multiples. Ainsi EULER obtient une expression de la longitude vraie de la Lune :

$$\begin{aligned} \varphi = & \zeta - 0,000096f \sin 2\eta - 0,001823f \sin(2\varphi - \pi) \\ & - 0,000910f \sin(2v - 2\pi) - 0,000028f \sin(4v - 4\pi - r) \\ & + 0,00932fk \sin r + 0,01521fk \sin(2v - 2\pi - r) \\ & + 0,79079fk^2 \sin(2\varphi - 2\pi - 2r) - 0,00121fk \sin(2v - 2\pi - r) \\ & - 0,00082fk \sin(2v - 2\pi + r) \end{aligned} \quad (6.197)$$

où f est le coefficient décrivant l'inclinaison du plan de l'orbite de la Lune sur l'ecliptique.

Au chapitre 16, EULER montre qu'on peut aussi distinguer cinq classes différentes d'inégalités suivant qu'elles servent à déterminer la distance de la Lune à la Terre ou la parallaxe, le mouvement horaire de la Lune, la longitude vraie sur l'ecliptique, la position de la ligne des nœuds et l'inclinaison vraie qui détermine la latitude. Il détermine l'anomalie vraie r , en fonction de l'anomalie moyenne p et de l'excentricité k , en admettant que ces valeurs sont assez exactement connues. EULER obtient ainsi l'expression

$$r = p - 2k \left(1 - \frac{1}{8}k^2\right) \sin p + \frac{5}{4}k^2 \sin 2p - \frac{13}{12}k^3 \sin 3p + \dots \quad (6.198)$$

qui peut être facilement mise en table.

La construction plus facile de tables amène EULER encore à une autre approche. Il veut baser celles-ci sur six éléments qu'il emprunte à l'observation à savoir : l'excentricité de l'orbite lunaire, le lieu moyen de la Lune à une époque déterminée, le lieu de l'apogée de son orbite à un moment donné, le temps périodique de la Lune selon son mouvement moyen, le lieu des nœuds à une certaine époque et l'inclinaison moyenne de l'orbite de la Lune au plan de l'ecliptique. D'après EULER, c'est au moyen de ces six quantités déterminées une fois pour toutes, que la théorie doit faire connaître la position de la Lune et les éléments de son orbite pour un temps quelconque. Or, avec cette assertion, EULER présuppose la connaissance d'une théorie rigoureuse qui, nous le savons est impossible à établir. Néanmoins, EULER entreprend la correction des éléments par l'observation en partant de positions de la Lune pour lesquelles les formules théoriques sont les plus simples et il désigne comme inconnues les corrections à apporter aux éléments retenus. Calculant ensuite au moyen des éléments approchés les formules que donne la théorie de la Lune au moment de chaque observation. EULER obtient un nombre d'équations égal à celui des observations considérées et corrige ainsi les valeurs des paramètres physiques qu'il introduit ensuite dans le calcul de tables. Il donne des détails plus explicites concernant cette méthode dans une annexe à son texte que nous allons examiner maintenant en nous référant à F. TISSERAND [124] que celui-ci qualifie de plus simple et de plus élégant que le reste.

—III—

COMME EULER RESSENT lui-même que la théorie développée est compliquée et possède de nombreux inconvénients, il ajoute à la fin de son texte un «*Additamentum*» qui donne encore une nouvelle méthode de calcul.

L'idée principale sur laquelle repose la nouvelle approche est de choisir une anomalie qui soit nulle ou égale à 180° lorsque la distance de la Lune à la Terre est la plus petite ou la plus grande, de manière que dx ne dépende pas de l'élongation η et soit nulle à l'apogée et au périgée. EULER désigne donc par a la distance moyenne du Soleil à la Terre et par ω son moyen mouvement. Il obtient alors :

$$\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a^3 d\omega^2}{s} \quad (6.199)$$

ainsi que les deux premières équations du mouvement

$$2dx d\varphi + x d^2\varphi = -M d\omega^2 \quad (6.200)$$

$$d^2x - x d\varphi^2 = -\left(\frac{A}{x^2} + N\right) d\omega^2 \quad (6.201)$$

Dans 6.200 et 6.201, M et N sont les forces perturbatrices qui, dans le cas particulier que EULER vise, ont la forme particulière :

$$M = a'^2 \left(\frac{r'}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^2} \right) \sin \eta \quad (6.202)$$

$$N = a'^3 \left(\frac{\rho - r' \cos \eta}{\Delta^3} + \frac{\cos \eta}{r'^2} \right) \quad (6.203)$$

$$A = \frac{M}{M'} a'^3 \quad (6.204)$$

r' étant le rayon vecteur du Soleil, ρ la projection de la distance de la Lune à la Terre, Δ la distance de la Lune au Soleil et η la différence des longitudes de la Lune et du Soleil. a' est donné par :

$$M' = n'^2 a'^3 \quad (6.205)$$

tandis qu'on a d'ailleurs :

$$\Delta = \sqrt{\frac{\rho^2}{\cos^2 \lambda} + r'^2 - 2\rho r' \cos \eta} \quad (6.206)$$

avec λ la latitude de la Lune.

EULER suppose alors x donné par l'équation polaire d'une ellipse dont p est le demi-paramètre, q l'excentricité et v l'anomalie vraie et il intègre l'équation 6.200 en la multipliant d'abord par $2x^3 d\varphi$. Il obtient :

$$d\varphi = \frac{d\omega}{x^2} \sqrt{2P} \quad (6.207)$$

$$P = - \int Mx^3 d\varphi \quad (6.208)$$

L'équation 6.201, multipliée par $2xd\varphi$ et ajoutée à l'équation 6.200 donne, en l'intégrant et en introduisant pour $x^2 d\varphi$ la valeur trouvée :

$$dx = \pm d\omega \sqrt{2 \left(Q + \frac{A}{x} - \frac{P}{x^2} \right)} \quad (6.209)$$

$$Q = - \int (Mx d\varphi + N dx) \quad (6.210)$$

L'équation polaire a la forme :

$$x = \frac{p}{1 - q \cos v} \quad (6.211)$$

que EULER introduit dans l'expression 6.209 de dx . Pour simplifier, il pose :

$$\begin{aligned} 2P - Ap &= o \\ Qp^2 + Ap - P &= Pq^2 \end{aligned} \quad (6.212)$$

et il obtient :

$$dx = -\frac{q d\omega \sin v}{p} \sqrt{2P} \quad (6.213)$$

$$d\varphi = \frac{d\omega}{x^2} \sqrt{Ap} = \frac{d\omega(1 - q \cos v)^2}{p^2} \sqrt{Ap} \quad (6.214)$$

Le mouvement de l'apogée devient alors :

$$d\varphi - dv = \frac{d\omega}{q} \left(\frac{M}{A} \left(2 \sin v + \frac{q \sin v \cos v}{1 - q \cos v} \right) - \frac{N}{A} \cos v \right) \sqrt{Ap} \quad (6.215)$$

tandis que EULER obtient pour $d\eta$

$$d\eta = d\varphi - dv = d\omega \left(\frac{1 - q \cos v}{p^2} \sqrt{Ap} - \frac{(1 - e \cos \mu)^2}{(1 - e^2) \sqrt{1 - e^2}} \right) \quad (6.216)$$

Ce sont ces deux valeurs des différentielles premières 6.215 et 6.216 qu'EULER emploie comme formules fondamentales de sa nouvelle solution.

Il développe ensuite les expressions pour M et N en série et fait :

$$p = (1 + \xi) \quad (6.217)$$

EULER obtient avec :

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \eta \quad (6.218)$$

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r'^3} + \frac{3r}{r'^4} \cos \eta + \frac{3r^2}{4r'^5} (3 + 5 \cos^2 \eta) + \dots \quad (6.219)$$

qu'il introduit dans les expressions des forces perturbatrices, l'expression de la différentielle de ξ par rapport à ω , ainsi que celles de tous les autres éléments, développées suivant les puissances de e , de g , des sin et des cos des multiples des angles μ , v et η . Et d'une façon analogue, il établit des formules décrivant le mouvement en latitude de la Lune et donne des expressions pour $d\pi/d\omega$ et $d(l \tan \rho)/d\omega$.

EULER propose ensuite de déterminer d'abord les inégalités de la Lune qui sont indépendantes de l'inclinaison de son orbite de l'excentricité e' du Soleil et du facteur $\nu = p_0/p' \cong 1/400$

EULER simplifie donc les formules générales qu'il a trouvées en posant dans celles-ci :

$$\begin{aligned} e' &= 0 \\ \nu &= 0 \\ p &= p_0(1 + \xi) \\ \frac{n'p_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{M}} &= m \end{aligned} \tag{6.220}$$

et il parvient avec la méthode des coefficients indéterminés, qu'il a déjà maintes fois employée aux inégalités pour les différents éléments. EULER parvient par sa méthode à un premier résultat quant à l'emploi des équations pour les perturbations en donnant des expressions pour $d\xi/d\omega$, $de/d\omega$, $ed\tilde{\omega}/d\omega$, $dv/d\omega$, $d\eta/d\omega$ et $d\omega/d\omega$. Cette approche sera développée quelques années plus tard par LAGRANGE et LAPLACE et restera au centre des considérations théoriques en mécanique céleste pendant tout le XIX^e siècle.

-IV-

A. GAUTIER DONNE DANS SA DISSERTATION [117] de 1817 une appréciation du travail eulerien fourni dans sa première théorie de la Lune une appréciation qui reste pertinente encore aujourd'hui et qui dit : «*On peut observer, dans le cours de cette volumineuse dissertation d'EULER, que son goût et son extrême facilité pour le calcul, le rendent quelquefois un peu prolix, lui font négliger la rédaction de ses travaux, et qu'il aime mieux en entreprendre d'autres sur le même sujet que de revoir les précédents et de retoucher ses premiers jets ; enfin que la richesse de son imagination le porte souvent à abandonner un peu trop vite les artifices qu'il a adoptés, pour leur en substituer de nouveaux. C'est ainsi que dans l'«Additamento» à la Théorie qui avait exigé de lui des calculs immenses et une patience à l'épreuve, il porte de cet ouvrage un jugement rigoureux, et semble presque renoncer à la route qu'il s'était ouverte : «Je suis forcé, dit-il, d'avouer que la méthode précédente, quoique assez bonne en elle-même, est non seulement très laborieuse, mais qu'elle laisse incertaine plusieurs inégalités importantes. Cela vient de ce qu'elles sont tellement liées entr'elles, qu'on ne peut fixer la vraie valeur d'aucune que lorsque toutes sont connues en même temps. Comme j'ai supposé d'abord quelques inégalités données, afin d'en conclure les autres, il faut remarquer que celles-ci étant obtenues, doivent à leur tour produire sur les premières de légères modifications, qui, si elles eussent été connues d'abord, auraient changé aussi les inégalités qu'elles ont servi à déterminer. Or quelques-unes sont si délicates, qu'elles peuvent éprouver de grands changements quand on en fait subir de très petits à celles dont elles dépendent. Tel est, en particulier, le cas du mouvement de l'apogée . . . ; de*

plus, l'anomalie n'étant pas prise dans cette méthode de manière à être nulle ou égale à 180° , suivant que la distance de la Lune à la Terre est la plus petite ou la plus grande; mais la différentielle de la distance accourcie dépendant encore de l'élongation, lorsque le sin de l'anomalie s'évanouit; la Lune ne se trouve ni à l'apogée ni au périgée quand l'angle, que la direction de son mouvement fait avec le rayon vecteur, est droit ... Cette méthode étant donc sujette à de si grands inconvénients, j'en ai essayé une toute différente, etc».

«EULER passe de là à l'exposition de son nouveau procédé, ou conformément à ce qui a lieu dans la nature, il suppose que la différentielle de la distance s'évanouit dans le cas où la distance elle-même est la plus grande ou la plus petite. Il revient alors à la considération des éléments variables employée par NEWTON, et qui lui sert à simplifier ses formules; il parvient aux véritables expressions des variations des éléments, et réduit ainsi au premier ordre toutes les équations du second. Cette nouvelle méthode a l'avantage de ne pas exiger qu'on considère à part les inégalités qui dépendent de l'élongation; elle lui paraît préférable quand l'excentricité moyenne est considérable et que sa variation est petite comparativement; mais il convient que, lorsque les inégalités de l'excentricité, auxquelles il faut avoir égard, sont grandes et nombreuses, les opérations sont si longues et le calcul est si laborieux, que lors même qu'on le développerait avec le plus grand soin, cela serait d'un usage très difficile dans la pratique; il reconnaît que cette méthode laisse encore plusieurs inégalités très incertaines, savoir, celles qui sont à longues périodes et à très petits diviseurs, et il n'entreprend pas même le calcul des termes qui dépendent à la parallaxe et de l'inclinaison de l'orbite ... » GAUTIER souligne encore à la fin l'importance de l'introduction par EULER, de la méthode de la variation des constantes arbitraires.

6.3.5 La confirmation de la théorie de la Lune eulerienne par Tobias Mayer et ses tables

—|—

EULER, dans sa première théorie de la Lune, avait posé les bases pour un calcul plus exact de tables lunaires mais que lui-même n'exploita pas. Ce mérite revient à Tobias MAYER, géographe et plus tard professeur d'astronomie à Göttingen, né à Marbach près de Stuttgart en 1723 et décède assez jeune en 1762 à Göttingen. GAUTIER [117] remarque très à propos à son sujet : «Il est rare de voir ceux qui ont fait une découverte profiter de tous les avantages qu'elle présente. Après que des hommes de génie ont signalé un point de vue nouveau, ils laissent ordinairement à d'autres le soin d'appliquer le talent dont ils sont doués à cette invention; non plus pour la faire naître, mais pour en simplifier l'application et pour en tirer tout le parti possible. C'est ainsi que, par la division du travail et la transmission successive des efforts de chacun, on parvient à surmonter des difficultés qu'il eût été presque impossible de franchir

toutes à la fois ... NEWTON, dans ses sublimes recherches, avait ébauché le problème des trois corps ; EULER, CLAIRAUT et D'ALEMBERT, l'avaient résolu les premiers d'une manière générale en géomètres consommés ; mais il était réservé à un homme, à la fois géomètre et astronome, de profiter avec succès des travaux de ses prédécesseurs et de ses contemporains, de prendre l'analyse pour guide, l'observation pour régulateur, et de construire le premier des tables utiles à la navigation.»

Tobias MAYER, quoique resté dans l'ombre des grands théoriciens, fut un savant et astronome remarquable, venant de la géographie et de la cartographie où ses premiers intérêts reposaient dans les efforts qu'il faisait en vue de déterminer exactement les longitudes et les latitudes terrestres. Une technique qu'il utilisait à cette fin fut l'occultation d'étoiles fixes par la Lune, ce qui l'amena à s'intéresser de plus près au mouvement de notre satellite. Il condensait le résultat de ses recherches dans ses tables paraissant en 1753 dans le tome II des Mémoires de la Société Royale de Göttingen [258] et qui furent au moins cinq fois plus précises que celles de ses contemporains CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER [176]. MAYER ne se distingua pas par de nouvelles vues théoriques au niveau de la mécanique céleste, mais il combina d'une manière avantageuse sa technique observationnelle avec le progrès optique des instruments astronomiques.

R. GRANT dans son *«History of Physical Astronomy»* [347] caractérise l'œuvre de Tobias MAYER de la façon suivante : *«MAYER est investi d'une réputation impérissable pour la réalisation de ses tables de la Lune. D'autres astronomes ont peut-être obtenu des résultats plus brillants, mais très peu seulement ont été privilégiés d'une contribution si directe au bien être de leurs prochains. Mais, même, indépendamment de ses mérites dans cette question des tables lunaires, MAYER peut postuler à être rangé parmi les plus grands astronomes des temps anciens ou modernes. Or, comme dans le cas de certains de ses contemporains tels que Bradley ou Lacaille, ses travaux ne furent pas de nature pour être appréciés par le grand public et voilà pourquoi sa réputation est moins diffusée que celle d'autres savants dont la contribution scientifique est de loin moins substantielle que celle de MAYER.»*

Dans ce qui suit, nous nous occuperons plus particulièrement de l'influence eulerienne sur MAYER et ses travaux et nous nous concentrerons sur les tables lunaires.

Après un passage plutôt autodidacte, Tobias MAYER fut engagé par le bureau cartographique Homann à Nuremberg en 1746, afin de poursuivre l'œuvre géographique de Johann Mathias HASE dont le *«Homannischer-Hasischer Gesellschafts Atlas»* parut en 1747. Deux des dix-huit planches de cet atlas furent construites par Tobias MAYER. L'engagement de MAYER se tourna tout de suite vers l'amélioration de la construction de cartes topographiques terrestres à travers la détermination plus précise des coordonnées géographiques. MAYER opta d'abord pour la détermination des longitudes à travers des observations des éclipses lunaires. Or, il rencontra avec sa méthode plusieurs difficultés dont celle de l'ignorance de la valeur exacte de la parallaxe lunaire et celle de l'absence

d'une carte lunaire fiable. Pour cette raison, MAYER se résolut à construire sa propre carte lunaire et à combiner celle-ci, en vue de la meilleure approximation possible, avec sa méthode micrométrique. Les résultats observationnels de ces démarches apparaissent dans son essai : «*Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe / und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken*» [348] qui contenait la première carte lunaire.

La réputation de MAYER, tant comme cartographe que comme astronome, mena à une nomination comme professeur à la «*Georg August Akademie*» à Göttingen en novembre 1750. Cette «*Akademie*» devint un peu plus tard l'université de Göttingen. Dans la poursuite de ses recherches, MAYER commença à s'intéresser à la réfraction et au problème d'établir des relations quantitatives entre la réfraction terrestre et la densité des couches d'air. EULER reprit d'ailleurs cet intérêt de MAYER après l'ouverture de leur correspondance et publia différents travaux concernant cette question. Un autre intérêt de MAYER fut l'évaluation précise de la valeur du diamètre de la Lune, valeur liée à la distance entre la Lune et la Terre. Il se rendit compte que la connaissance préalable à la solution de ce problème fut la détermination de la parallaxe lunaire. MAYER utilisa deux méthodes en vue de mesurer cette grandeur, mais, qui toutes les deux donnèrent des résultats incompatibles. Il proposa comme explication possible de cette discrédance que le centre de gravité de la Terre ne coïncidait pas avec le centre géométrique. Cette question et ses problèmes connexes occupèrent une partie de la correspondance entre MAYER et EULER que nous allons exposer dans la suite de ce texte [349].

Les accointances avec EULER amena MAYER à étudier les contributions du premier à la mécanique céleste et spécialement à la théorie de la Lune. Il appliqua ainsi la méthode utilisée par EULER dans sa pièce : «*Recherches sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne*» [317] à la théorie de la Lune mais en adoptant comme variables indépendantes les anomalies moyennes du Soleil et de la Lune au lieu des anomalies vraies qu'EULER avait choisies. L'effet était une simplification du calcul de l'orbite lunaire puisque le lieu vrai du Soleil ne devait pas être connu pour le calcul du lieu vrai de la Lune. Mais MAYER vit bientôt que des résultats plus fiables pouvaient être obtenus en utilisant la méthode que E. HALLEY avait proposée en vue de la prédiction des éclipses solaires ou lunaires. Cette méthode est basée sur le cycle de Saros et MAYER croyait y voir une raison pour adopter une approche empirique dans le calcul des anomalies solaires et lunaires. Il estimait qu'une série d'observations des lieux de la Lune sur une période de 18 années, le temps nécessaire pour une rotation complète de la ligne des nœuds lunaires sur l'écliptique, était suffisante pour prédire la position longitudinale de la Lune à n'importe quelle époque future. Tout en étant d'accord en principe avec lui, EULER remarqua que la méthode utilisant les anomalies moyennes posait des problèmes pour le calcul de la vraie distance entre la Lune et le Soleil.

MAYER entrevit encore un autre problème par l'introduction de la forme sphéroïdale de la Terre dans les calculs. Cette prise en compte engendra un grand nombre d'inégalités nouvelles, dont MAYER en dénombra seize comme

étant importantes, et dont une que NEWTON avait associée à la variation de l'excentricité de l'orbite lunaire et qui, d'après MAYER, avait une influence notable sur le mouvement de la ligne des apsides lunaires. MAYER avait ainsi identifié la même inégalité que celle que CLAIRAUT avait discutée dans son mémoire, publié en 1749 : «*De l'orbite de la Lune dans le système de NEWTON*» [172] et qui était à la base de la discussion sur l'exactitude de la loi de la gravitation newtonienne. Tout comme CLAIRAUT dans son travail de 1752, MAYER trouva une valeur deux fois plus large que celle prédite par la théorie newtonienne, mais à l'instar de CLAIRAUT et d'EULER, il ne mit pas en doute la validité de la loi newtonienne mais pencha pour une explication par des erreurs d'observation. Nous sommes ici en présence de deux points de vue opposés, celui de MAYER étant la réponse d'un astronome pratiquant l'observation, tandis que EULER et CLAIRAUT cherchaient une solution uniquement théorique mais plus fondamentale au problème de la validité de la loi gravitationnelle.

Les réticences d'EULER contre cette loi venaient, au moins partiellement, du fait qu'il croyait à une origine magnétique de cette force. Or, MAYER avait des réserves quant à cette interprétation, et mettait en doute que le nombre de particules magnétiques d'un corps céleste était égal à la masse de celui-ci. En outre, dans le cas d'une absence de telles particules magnétiques, l'attraction entre deux corps pouvait devenir zéro. EULER réfutait cette objection en déclarant que l'affirmation newtonienne de la proportionnalité de la force attractive au produit des deux masses concernées était un pur postulat et n'avait pas de justification empirique. MAYER, lui aussi, n'accepta jamais la gravité comme une qualité essentielle de la matière et opta plutôt pour une explication mettant en cause la compression variable de l'éther. Cette question, comme nous allons le voir, était un des sujets de la correspondance EULER-MAYER.

MAYER continua à s'occuper de l'orbite de la Lune et se mit à déterminer l'influence de la forme sphéroïdale de la Terre sur le mouvement de la ligne des apsides lunaires. A cette fin, il compara des observations récentes avec des plus anciennes et il trouva que le mouvement moyen en longitude de la Lune accélérât de $7''$ à $9''$ par siècle, faits découverts aussi par HALLEY et confirmés par NEWTON. En même temps, MAYER découvrit une erreur de $1,25^\circ$ dans l'estimation de PTOLÉMÉE pour le temps de l'équinoxe et qui rendait erronée toute l'argumentation d'EULER qui avait expliqué l'accélération séculaire du Soleil ou la décélération du mouvement moyen de la Terre par la résistance due à l'éther. La situation pour confirmer l'existence de l'éther devenait de plus en plus précaire.

MAYER, lui, abandonna cette hypothèse et rechercha une explication de la décélération du mouvement de la Terre dans le changement de l'excentricité de l'orbite de celle-ci due à une attraction combinée de Jupiter et de Vénus. Or, une preuve décisive pour l'existence de ce phénomène manquait toujours. Des explications ad hoc furent discutées par EULER et MAYER avant que ce dernier crût pouvoir donner une réponse décisive à la question par l'introduction d'une force gravitationnelle variable du Soleil qu'il avait trouvée à travers certaines inégalités dans sa théorie de la Lune.

Au milieu du XVIII^{ème} siècle, l'intérêt majeur des savants était porté vers la détermination de l'orbite lunaire, comme nous venons de le voir tout au long de ce texte. CLAIRAUT exprima sa théorie dans un système de coordonnées polaires et utilisa l'anomalie moyenne de la Lune comme variable indépendante. Ce choix lui causa, comme nous avons pu le constater dans un chapitre antérieur, des investigations laborieuses en vue de prouver la convergence des séries exprimant les forces perturbatrices. La difficulté moyenne résidait dans les petits dénominateurs de certains termes de ces séries dont l'intégration donnait de très grandes valeurs. Les tables que CLAIRAUT construisit, basées sur sa théorie de la Lune, donnaient des résultats plutôt insatisfaisants. Les valeurs observationnelles, dues à J. CASSINI, J.-D. MARALDI et N. DE LA CAILLE, variaient d'environ 6' pour les longitudes et de +2' à -3' pour les latitudes. La théorie de la Lune de J. D'ALEMBERT, discutée antérieurement, possédait un degré de fiabilité semblable.

MAYER construisit ses tables : «*Novae tabulae notuum solis et lunae*» [258] en s'inspirant de la première théorie de la Lune d'EULER [291] discutée dans le chapitre précédent. Contrairement à CLAIRAUT, EULER introduisit un système de coordonnées rectangulaires et il déduisit de manière purement analytique les variations dans les coordonnées polaires et les perturbations dans les nœuds. Comme nous l'avons vu, un dernier sursaut des doutes d'EULER concernant la validité de la loi de la gravitation newtonienne consistait dans l'introduction d'un second terme dans cette loi, qu'il identifiait comme négligeable dans ses calculs. EULER simplifia l'intégration des équations différentielles du mouvement en considérant les six éléments orbitaux comme variables et en écrivant donc six équations différentielles du premier ordre, une méthode qui fut perfectionnée plus tard par LAGRANGE qui en fit un outil pour examiner la stabilité du système solaire. Pourtant, EULER ne parvenait pas à tenir compte de l'accélération séculaire de la Lune, ni à introduire la non-sphéricité de la Terre et les perturbations de l'orbite de la Lune par les autres planètes. L'erreur des calculs établis suivant cette théorie sont d'environ 5'.

Les tables de MAYER apparurent parallèlement à la première théorie de la Lune d'EULER. Malheureusement, il ne donna aucune indication sur la méthode qu'il avait employée et comment il avait intégré les équations différentielles du mouvement. Néanmoins, il clama pour ses tables une exactitude en dessous de 2', donc de loin supérieure à celles de CLAIRAUT et de D'ALEMBERT. MAYER avait procédé dans l'établissement de ses tables à une combinaison des méthodes théoriques et observationnelles.

La seule personne qui pouvait apprécier à sa juste valeur l'exploit de MAYER fut, bien entendu, EULER lui-même. Et celui-ci ne tarda pas à vanter le travail de MAYER : «*la pièce la plus admirable de l'astronomie théorique*». Il en informa P. de MAUPERTUIS, président de l'Académie de Berlin et lui proposa l'adhésion de MAYER à cette société savante. Ce dernier aurait volontiers accepté, mais l'absence de MAUPERTUIS de Berlin ne hâta pas la chose. Après des tractations, la nomination de MAYER à Berlin avait été réglée mais son souverain ne lui permettait pas de partir. Après une augmentation sensible de son salaire et

l'offre de la direction de l'observatoire de Göttingen, MAYER décida de rester dans cette ville.

MAYER savait que ses tables lunaires remplissaient les conditions que l'Amirauté britannique avait fixées en vue de la détermination de la longitude d'un bateau en mer. Il soumit un manuscrit au «*Board of Longitude*» du Parlement britannique en 1755, décrivant dans les détails les principes sur lesquels le calcul de ses tables lunaires était fondé ainsi qu'un modèle en bois du cercle répétiteur qu'il avait décrit dans son manuscrit et qui devint l'ancêtre du sextant nautique.

C'est en 1765, donc trois années après sa mort, le 20 février 1762, que la veuve de MAYER reçut du Parlement britannique, la somme de trois mille Livres, tandis qu'une somme de mille Livres fut attribuée à EULER. Les travaux de MAYER servirent de base à une amélioration continue de la méthode astronomique pour la détermination de la longitude en mer.

-II-

COMME MAYER, dans les explications qui accompagnent ses tables de 1753, n'est pas entré dans les détails de la théorie utilisée, nous nous bornons ici à suivre [1]. MAYER dit dans sa préface : «*Ce n'est pas pour démontrer l'exactitude et la vérité de mes tables lunaires, que j'expose ici la méthode que j'ai employée à la recherche des inégalités du mouvement de la Lune par la théorie ; car celle-ci a l'inconvénient de ne pouvoir donner certaines inégalités qu'en poussant le calcul beaucoup plus loin que je n'ai eu la patience de le faire ; mais c'est pour faire voir du moins, qu'on ne peut tirer de la théorie aucun argument contre la bonté de mes tables. Cela suit évidemment de ce que les inégalités que l'on trouve dans ces tables corrigées et assujetties à un grand nombre d'observations, ne diffèrent presque jamais de plus d'une $\frac{1}{2}$ minute de celles qui sont tirées de la seule théorie ; ce qui montre suffisamment, d'un côté que les erreurs viennent plutôt du calcul analytique que des tables, et de l'autre, que la loi de l'attraction newtonienne s'accorde avec les observations, même dans les plus petits détails*».

MAYER se base donc sur la première théorie de la Lune d'EULER de 1753 et il convient lui-même que ses équations fondamentales du mouvement sont, à très peu de choses près, les mêmes que celles d'EULER. Il introduisit le même système de référence que celui-ci et exprime les forces d'une manière semblable. La variable indépendante q est le moyen mouvement de la Lune tandis que les trois composantes rectangulaires des forces agissant sur elle sont appelées X , Y , Z . En plus, x désigne l'inverse du rapport de la distance raccourcie au $\frac{1}{2}$ grand axe et φ la longitude. En partant des équations initiales du mouvement et après quelques substitutions, MAYER écrit les équations :

$$0 = \frac{d^2 v^- v d\varphi^2}{dq^2} + X \quad (6.221)$$

$$0 = \frac{2dv d\varphi + v d^2 \varphi}{dq^2} + Y \quad (6.222)$$

$$0 = \frac{d^2(v \tan l)}{dq^2} + Z \tan l \quad (6.223)$$

En multipliant la seconde équation par vdq , on obtient :

$$\frac{v^2 d\varphi}{dq} = e - \int Y v dq \quad (6.224)$$

où e est une constante. En faisant :

$$v = \frac{1}{x} \quad ; \quad \int \frac{Y dq}{x} = P \quad ; \quad ex^2 dq = dp \quad (6.225)$$

on obtient de 6.224 en regardant dp comme constant :

$$\frac{d\varphi}{dp} = 1 - \frac{P}{e} \quad (6.226)$$

L'équation 6.221 devient alors, après plusieurs transformations :

$$0 = \frac{d^2 x}{dp^2} + x - \frac{X}{e^2 x^2} - \frac{2Px}{e} + \frac{P^2 x}{e^2} \quad (6.227)$$

L'équation 6.223 renferme la différentielle seconde de la tangente de la latitude l de la Lune, divisée par x ; MAYER remarque qu'au lieu de la décomposer, ainsi que le fit EULER, en deux autres équations donnant le lieu du nœud et la variation de l'inclinaison, il est bien plus simple d'utiliser directement l'équation 6.223 puisqu'en suivant l'approche eulerienne, non seulement le travail est doublé, mais les tables auxquelles celle-ci conduit sont moins conformes à l'usage astronomique. Il transforme donc l'équation 6.223 de manière à lui donner la forme la plus commode, et à y faire entrer $\tan l$ précisément de la même manière que x entre dans l'équation 6.221, ce qui ramène la résolution de cette équation au même procédé qu'il doit employer pour celle de l'autre.

MAYER introduit, tout comme EULER, des séries indéterminées avec la différence cependant qu'il ne sépare pas comme celui-ci les inégalités en différentes classes considérées à part. Il intègre d'abord les formules 6.226 et 6.227 qui donnent $d^2 x$ et dP . L'expression dP/dp est alors développée en fonction des sinus des multiples de p . Il justifie sa supposition en remarquant que dans l'équation en x qui est différentielle du second ordre et dont les termes principaux sont linéaires, l'intégrale doit être exprimée par une suite de cosinus des multiples de p ; et comme P et son carré entrent dans cette équation, il faut que la valeur de P soit réductible aussi à une suite de cosinus des multiples de p et par conséquent, que sa différentielle, prise par rapport à p , s'exprime par

une série de sinus des mêmes angles, qui devra satisfaire en plus à la seconde équation. MAYER remarque que les suppositions qu'il a faites s'accordent bien avec la nature du problème, puisque les équations différentielles qui l'expriment suffiront pour déterminer toutes les quantités arbitraires, et qu'il n'a pas besoin d'autres termes que ceux de la forme $A \cos \alpha p$, ou $a \sin \alpha p$.

MAYER substitue donc les séries suivantes :

$$1 - x = A \cos \alpha p + B \cos \beta p + C \cos \gamma p + \dots \quad (6.228)$$

$$\frac{dP}{dp} = a \sin \alpha p + b \sin \beta p + c \sin \gamma p + \dots \quad (6.229)$$

Après avoir adopté pour x et pour le coefficient différentiel de P ces valeurs indéterminées, il lui reste à développer les termes des équations différentielles qui proviennent des forces perturbatrices. Ces termes sont exprimés par des fonctions des puissances de P et des rayons vecteurs x et y de la Lune et du Soleil, des sinus et cosinus, des multiples de l'élongation ω , enfin du cosinus de la latitude l et il s'agit de les réduire à des fonctions périodiques de la seule variable p .

«Ce serait, une chose longue, fastidieuse et difficile, à moins d'exposer tous les calculs, que de montrer comment je suis parvenu à la détermination cherchée. Je ne vois pas cependant que cette méthode ait rien de nouveau, si ce n'est sa longueur, et elle ne diffère point du procédé ordinaire pour fixer les valeurs des quantités indéterminées, connu de tous ceux qui se sont le moins du monde occupés de l'analyse moderne. Il me suffira donc de poser les valeurs des quantités $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$, telles que je les ai obtenues après beaucoup de soins et d'attentions, en répétant souvent trois ou quatre fois les mêmes calculs» [349]. Voilà à peu près tout ce que MAYER dit de ce travail long et fastidieux auquel il s'est soumis quoiqu'il soit en principe simple de reconstituer sa démarche calculatrice. Pour que les valeurs supposées aux variables x et P soient les véritables intégrales des équations différentielles, il faut qu'elles satisfassent à ces équations, ou qu'elles les rendent identiques après qu'on y eut fait, de part et d'autre, toutes les substitutions ; il faut donc que les coefficients des sinus et cosinus de chaque multiple différent de p qui y entre, se détruisent séparément. Or, il se trouve des sinus ou cosinus, de multiples connus qui ont pour coefficients des nombres ou des fonctions des éléments qui ne se réduisent point à zéro. Force est de conclure de là que pour que les équations soient satisfaites, il faut profiter de l'arbitraire laissé aux multiples β et γ pour égaliser les termes qui les contiennent à chacun des sinus ou cosinus des multiples connus, et déterminer ensuite leurs coefficients en égalant à zéro la somme de ceux qui multiplient chaque fonction périodique. Autant, il se trouve de multiples de p déjà connus dans les équations identiques, autant il doit s'en trouver aussi dans les valeurs définitives de x et de P , et autant il doit y avoir d'équations de condition pour déterminer leurs coefficients.

MAYER, à l'issue de ses longs calculs, obtient pour x une valeur composée de quarante-quatre cosinus de multiples différents de p , et pour le coefficient

différentiel de P , une série de sinus de quarante-trois de ces mêmes angles. On remarque que les termes de $\sin np$ et $\sin 2np$ sont absents de cette série, vu que leurs coefficients trouvés par MAYER sont nuls. Il les remplace par les $\sin 3ap$, termes absents dans l'expression de x . En substituant pour les multiples et les coefficients, leurs valeurs trouvées par l'intégration des équations du mouvement, MAYER trouve φ et q en fonction des p et de leurs fonctions trigonométriques. Après élimination de l'angle auxiliaire p , il trouve enfin la longitude moyenne, des sinus de ses multiples, et de ceux des distances angulaires de la Lune au Soleil et à son nœud.

Les inégalités en latitude de la Lune étaient plus facilement déterminables pour MAYER tout employant un procédé analogue à celui utilisé pour le calcul des longitudes. Ainsi, il suppose pour $\tan l$ une suite de termes en fonction des sinus de divers multiples indéterminés de p ; il substitue cette expression dans l'équation 6.223 et il met pour n , e , x , y , ω , π et P leurs valeurs numériques. Il détermine alors les coefficients inconnus des fonctions trigonométriques et de leurs multiples. Finalement, il obtient une série composée de 34 termes.

MAYER corrige toutes les formules qu'il a obtenues ainsi par la comparaison avec les résultats observationnels en négligeant les termes donnant des valeurs moins de $2''$.

MAYER a montré pour un usage simultané de la théorie et de l'observation que la première est éminemment utile pour découvrir la forme des inégalités de la Lune, mais que les coefficients exacts ne peuvent être fixés que par la seconde.

-III-

LA CORRESPONDANCE entre MAYER et EULER a sans doute influencé profondément le premier et le second avait la satisfaction de voir dans les travaux de MAYER la confirmation de son approche théorique. L'intérêt des trente et un lettres qui furent échangées entre les deux hommes est qu'il s'y trouve, à travers les exposés de la théorie de l'orbite de la Lune, une acceptation de la philosophie naturelle de NEWTON au XVIII^e siècle. En effet, la théorie de la Lune fut acceptée par tous les savants intéressés comme l'expérience cruciale pour la validité de l'interprétation du monde réel suivant les axiomes géométriques de la mécanique newtonienne. En même temps, ce problème généra un développement important de l'analyse mathématique dont les pères furent CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER lui-même. Leurs travaux sont à la base de la mécanique céleste moderne. En exposant et en commentant quelques lettres de cette correspondance, nous allons nous limiter à quelques aspects du problème de l'orbite de la Lune.

La première lettre de cette correspondance menée en allemand date du 4 juillet 1751, donc avant la publication des tables lunaires de MAYER. MAYER dit dans cette lettre : « *Vos essais sur l'analyse et la mécanique, Monsieur,*

m'ont permis l'étude du mouvement de la Lune suivant la théorie newtonienne, une chose que j'essayais sans succès plusieurs fois avant. J'ai donc utilisé une méthode approximative qui concorde largement avec celle que vous avez utilisée dans votre investigation du mouvement de Saturne et de Jupiter, sauf que j'ai retenu les anomalies moyenne de la Lune et du Soleil au lieu des anomalies excentriques. Dans ce sens, le calcul de l'orbite de la Lune devient plus simple, car les arguments ne doivent être déterminés que de façon grossière à travers les mouvements moyens, de façon que je n'utilise par une fois la position actuelle du Soleil pour le calcul du lieu de la Lune» [349]. MAYER émet alors ses réserves quant aux conclusions de CLAIRAUT sur la validité de la loi newtonienne : «Il peut y avoir tellement d'autres circonstances qui rendent douteuses les calculs et les approximations de façon que l'erreur peut être cherchée des deux côtés.» [349]. Et il conclut en émettant des doutes sur la décision de principe si le calcul de l'orbite de la Lune, en concordance avec les observations, est suffisant pour prouver la vérité ou la fausseté de la loi de l'attraction universelle.

Après ces réserves de principe, MAYER cherche une autre approche, empirique celle-là, afin de prédire plus exactement la position de la Lune. Tout comme HALLEY l'avait déjà fait, il voit dans le cycle de 223 lunaisons une période pour le retour de la Lune à la même place : «J'ai essayé par les moyens de mes équations représentant le lieu moyen de la Lune et j'ai obtenu le résultat suivant : Si à un temps T , le lieu vrai de la Lune L dans son orbite est connu par l'observation et en même temps par les tables et soient :

- p l'anomalie moyenne de la Lune
- s l'anomalie moyenne du Soleil
- ω l'anomalie moyenne entre le Soleil et la Lune

Alors le lieu vrai de la Lune dans son orbite pour le temps $T + 18^a 11^7 7h 43' 30''$ ou pour $T + 223$ lunaisons peut être exprimé par une formule contenant des fonctions trigonométriques de ces variables.

«J'ai introduit ces 10 équations dans beaucoup de tables et j'ai comparé les résultats du calcul avec les observations. L'exactitude était de $10''$ à $20''$. Par conséquent, si l'on avait des séries continues d'observations des positions de la Lune pendant 18 années, on serait à même de déterminer d'une façon très exacte les lieux de la Lune pour les temps futurs.» [349].

A cette lettre beaucoup trop longue de MAYER, EULER répondit le 27 juillet 1751 et enchaîna sur les réflexions sur la Lune de MAYER : «J'ai noté avec un plaisir certain les progrès que vous avez fait dans la théorie lunaire. Après considération de toutes les difficultés, vous avez choisi le meilleur chemin en déterminant la différence entre la position actuelle de la Lune et celle qu'elle occupait avant 223 lunaisons. Et vous avez constaté que l'erreur persistante ne dépasse pas $20''$, votre résultat est certainement le meilleur qui puisse être obtenu. Et puisque l'on peut connaître pour les 18 années passées, de combien le lieu vrai de la Lune diffère des tables, il est possible de déterminer avec ces mêmes tables la position de la Lune dans le ciel, il y a 18 années, 11 jours, 7 heures $43' 30''$ et calculer correctement son lieu actuel». [349].

EULER revient alors à son approche, qui consiste à calculer les longitudes moyennes et les anomalies moyennes du Soleil et de la Lune et souligne qu'avec ces variables les équations deviennent plus simples. Puis EULER découvre ses propres projets : *« Mon intention est de m'occuper sérieusement du mouvement de la ligne des apsides et d'examiner comment les observations s'accordent avec les résultats théoriques de la théorie newtonienne. Car non seulement moi-même, mais d'autres aussi travaillant sur ce problème ont trouvé jadis qu'en accord avec la théorie, ce mouvement devrait être la moitié de la valeur observée. Mais à mon grand plaisir, j'ai trouvé que cette partie de la théorie newtonienne est en accord avec les observations »* [349]. EULER confirme ici les résultats qu'il va publier dans sa Théorie de la Lune de 1753.

MAYER répondit à EULER le 15 novembre 1751. Il lui fait part que ses nouvelles fonctions académiques lui laissent moins de temps pour poursuivre ses études sur la théorie lunaire. Puis il exprime son admiration devant le résultat qu'EULER a obtenu concernant le mouvement de la ligne des apsides. Et il constate : *« combien difficile pourrait être la résolution du problème le plus trivial si, au lieu de la loi simple, la gravitation obéirait à une loi plus compliquée. »* [349]. Il avoue que ses propres calculations ne lui ont pas encore donné satisfaction et d'après lui, : *« que le mouvement de la ligne des apsides ne dépend pas seulement de l'action du Soleil mais également de l'excentricité de l'orbite lunaire »* [349]. Il doute de ses propres résultats, ceci surtout que sa théorie ne lui permet pas des termes dépendant des angles $\omega - p$, $2\omega - p$, $2\omega - 2p$, $3\omega - 2p$, $3\omega - 3p$, etc avec ω la distance Lune-Soleil et p l'anomalie moyenne de la Lune.

Le jour de Noël 1751, EULER écrit à MAYER. Après une excursion sur la cause de la force gravitationnelle, EULER revient à la théorie de la Lune et il remarque que : *« La détermination théorique du mouvement de l'apogée lunaire est une des parties les plus difficiles de cette théorie puisqu'elle dépend de toutes les inégalités du mouvement. Celles-ci devront être préalablement connues avant de pouvoir déterminer le mouvement de l'apogée. En particulier, la valeur vraie dépend d'une inégalité reliée à l'angle $(\omega - p)$ suivant votre notation. J'ai envoyé mon traité sur la Lune à St-Pétersbourg où il sera imprimé ensemble avec celui de CLAIRAUT »* [349]. EULER revient ensuite encore à la théorie newtonienne de l'attraction pour un corps sphéroïde et il pense que *« la force centripète devrait décroître à peu près proportionnelle à l'inverse du carré de la distance et la formule doit être de la forme $A/z^2 + B/z^4$ quand la Lune se trouve à l'équateur. Mais si elle a en plus une déclinaison, celle-ci devra entrer, elle aussi, dans cette formule »* [349]. EULER est certain que les inégalités lunaires, qui ne peuvent encore être déterminées, ont leur origine dans la forme sphéroïdale des deux corps. Il croit que le terme de B/z^4 n'affecterait les inégalités que légèrement, sans en engendrer de nouvelles à l'exception d'une seule qui dépendrait de la déclinaison de la Lune.

La réponse de MAYER à EULER fut écrite le 6 janvier 1752. Après des considérations sur la réfraction, un sujet qui intéressait très fort les deux hommes, MAYER revient à l'attraction gravitationnelle et à une explication rationnelle

de cette force. MAYER propose de considérer les réflexions newtoniennes en la matière comme de pures hypothèses mais reste ouvert aux considérations euliennes cherchant une explication dans l'élasticité de l'éther. MAYER explique ensuite qu'il a déterminé la parallaxe de la Lune à sa distance moyenne égale à $31'10''$ et la parallaxe horizontale, ou plutôt le semi-diamètre de l'équateur terrien observé à partir du centre de la Lune, égal à $51'10''$ et cela avec une marge d'erreur de moins de $10''$. Pour les vérifications à partir de la théorie de ses résultats observationnels, MAYER avait posé la force attractive de la Terre sur la Lune égale à :

$$\frac{1 - \frac{3n}{5}}{z^2} + \frac{3n}{5z^4} \quad (6.230)$$

«C'est ce dernier terme qui produit quelques inégalités dans le mouvement de la Lune. Je pense que, si l'on prend en considération en même temps la déclinaison de la Lune, alors, non seulement une inégalité mais plusieurs doivent apparaître qui dépendent simultanément des angles ω et p , et certaines peuvent encore être plus marquées, au cas où celle liée à la déclinaison est encore appréciable. Et en plus, je suppose qu'il y a encore d'autres inégalités dépendant de l'angle» :

$$A\omega \left(\frac{A-1}{o} \right) p + Bs \quad (6.231)$$

«En effet, un tel angle serait toujours constant ou très faiblement variable, une inégalité infiniment longue ou une équation de très grande période dans le mouvement de la Lune pourrait être décrit» [349]. MAYER voit ici une possibilité de décrire les «arcs de cercle» qui joueront un grand rôle un peu plus tard chez LAGRANGE et LAPLACE. Je donne alors deux séries pour le calcul pour la position orbitale de la longitude moyenne et une autre pour la distance de la Lune au Soleil.

Dans une lettre du 7 janvier 1753, MAYER revient à ses recherches sur la théorie de la Lune et il avoue qu'il n'a pas encore réussi à résoudre le problème du mouvement de l'apogée, mais que par contre, il a mis au point sa formule pour l'équation de la longitude. Il a besoin de 13 inégalités qu'il a arrangées en tables et qui lui permettent d'avoir des résultats avec une exactitude de moins de $2''$. Il introduit : s l'anomalie moyenne du Soleil, p l'anomalie moyenne de la Lune ; ω la distance angulaire de la Lune moyenne du Soleil vrai et δ la distance moyenne entre la Lune et le lieu du nœud ascendant Ω .

Il obtient une série de treize équations contenant des termes trigonométriques qui représentent pour lui la solution du problème.

EULER félicite MAYER dans une lettre du 24 avril 1753 pour sa construction des tables de la Lune et pense qu'il ne sera plus guère possible de dépasser l'exactitude atteinte par MAYER. EULER rappelle alors à MAYER que celui-ci n'a toujours pas estimé le mouvement de l'apogée de la Lune et remarque que, si ce mouvement est trouvé sensiblement plus grand que 0° , alors, puisque la

différence provient de certaines inégalités lunaires, il est plus simple, peut-être, de penser que la différence est due à celles non encore calculées.

À partir de la fin du printemps 1753, la correspondance entre EULER et MAYER prend une autre allure. Le sujet principal, les tables de l'orbite lunaire, ne va plus générer d'informations nouvelles et se limite à quelques remarques d'arrière-garde. D'autres intérêts plus pratiques ceux-là, et ayant trait à l'Académie de St-Petersbourg ou à l'Observatoire de Göttingen, respectivement aux carrières des deux hommes prennent le devant sans pourtant occulter complètement la théorie de la Lune.

Ainsi le 7 mai 1753, MAYER informe EULER que ses tables de la Lune seront publiées au Volume II des «*Commentaires*» de la Société Royale Scientifique [258]. MAYER ajoute à cette information ses efforts en vue du contrôle de l'exactitude de ses résultats par la prise en compte de nouvelles observations.

Dans une lettre à EULER du 23 mai 1753, MAYER exprima encore une fois toute sa gratitude envers celui-ci pour tout ce qu'il a appris à travers ses mémoires, surtout celui sur les mouvements de Saturne et de Jupiter. Sans ces connaissances, il n'aurait jamais pu progresser si loin. Le 15 juillet 1753, MAYER fait part à EULER qu'il a enfin reçu la «*Theoria Motus Lunae*» et qu'il est en train de lire ce texte. MAYER se résigne à ne pas pouvoir faire des comparaisons entre les formules de la théorie eulerienne et la sienne, vu que tous les deux utilisent des angles différents pour la détermination du lieu de la Lune en longitude. Mais aussi dans la comparaison des résultats de calcul pour la latitude, MAYER éprouve des difficultés, qui sont peut-être dues aux erreurs de calcul. En tout cas, il plaide en faveur d'une amélioration des formules donnant la latitude de la Lune et il y voit des avantages pour la détermination des longitudes terrestres à partir d'occultations d'étoiles ou d'éclipses solaires.

EULER, dans sa lettre du 26 février 1754, résume encore une fois son estime pour les travaux de MAYER quand il écrit : «*Vos tables lunaires ne sont rien d'autre que la plus grande réussite dans l'astronomie théorique et je n'aurais jamais pu imaginer que par ces moyens les tables astronomiques pourraient être portées à un tel degré de perfection. Comme j'étais moi-même si peu heureux dans cette tâche, j'estime d'autant plus haut votre travail, et ceci parce que j'étais le premier à mettre sur pied de telles tables qui étaient grevées avant tout par l'excentricité variable et le mouvement de l'apogée, chose difficile à harmoniser avec la théorie seule. Et maintenant, vous avez tout fait ce qui du point de vue pratique peut être désiré et je ne vois que des problèmes encore dans la théorie abstraite ...* » [349]

Et MAYER écrit à EULER le 6 mars 1754 qu'il a encore amélioré ses tables, qui ont atteint maintenant une exactitude de 30". Il est parvenu à cette affirmation en utilisant uniquement la méthode de l'occultation de certaines étoiles fixes. MAYER, dans la même lettre revient encore à l'expression de la latitude de la Lune et ceci en donnant une autre solution que celle qu'EULER avait trouvée dans sa théorie de la Lune.

6.3.6 La deuxième théorie de la Lune d'Euler

—I—

NOUS AVONS VU au chapitre précédent que MAYER et EULER se rendaient compte dans leur correspondance [349] d'une déficience grave dans les théories de la Lune d'alors : elles n'arrivaient à expliquer ni la cause ni la loi de l'équation séculaire de la Lune, et l'on doutait même si celle-ci était explicable par la loi newtonienne de la gravitation. KEPLER avait déjà relevé dès l'année 1625 que certaines planètes avaient des mouvements non uniformes, mais ce fut HALLEY qui s'aperçut le premier de l'accélération de celui de la Lune en comparant des observations d'éclipses antiques avec celles des modernes. Pourtant il ne prit point égard de ce phénomène dans la construction de ses tables. MAYER examina à plusieurs reprises, dans ses lettres à EULER, ce point important de la théorie lunaire. Il essayait, lui aussi, d'accorder les observations des Babyloniens et des Arabes avec celles de modernes et il ajouta aux longitudes moyennes de la Lune une quantité proportionnelle au carré du nombre des siècles écoulés depuis une certaine époque, ceci d'après la supposition que l'accroissement de la vitesse de ce mouvement était uniforme. Ainsi MAYER porta à 7'' dans la première édition de ses tables, et à 9'' dans la dernière, ce facteur de proportionnalité.

L'accélération de la Lune, ainsi que l'altération des moyens mouvements des planètes, furent liées à la résistance de l'éther. L'Académie des Sciences de Paris s'intéressa à la question et proposa le problème du mouvement d'un corps céleste dans un milieu résistant comme sujet de prix en 1760. D'ALEMBERT, lui aussi, discuta le même problème dans le deuxième tome de ses *«Recherches sur différents points importants du Système du Monde»* [235]. Il s'attacha à la discussion des différents termes de l'équation de l'orbite de la Lune afin d'y identifier quelque inégalité qui pourrait expliquer l'accélération séculaire par le biais de l'attraction newtonienne. Mais en vain ; toutes ses recherches, quelques fois ingénieuses, ne permettaient pas une explication pertinente dans le cadre de la théorie de la gravitation. D'ALEMBERT revint donc à des considérations tirées de la présence d'un milieu résistant, mais rendit responsable aussi, au moins une partie de l'accélération séculaire, la forme non sphérique des deux corps en question. A cette fin, il introduisit un terme constant sous le signe intégral et un arc de cercle dans l'équation du mouvement.

Le sujet était donc en vogue et l'Académie des Sciences de Paris proposa la question pour son prix de 1768, qui fut prolongé à l'année 1770. Elle demanda *«de perfectionner les méthodes sur lesquelles est fondée la théorie de la Lune, de fixer par ce moyen celles des équations de ce satellite qui sont encore incertaines, et d'examiner en particulier si l'on peut rendre raison, par cette théorie, de l'équation séculaire du mouvement de la Lune»*. [117]

EULER envoya un mémoire, mais comme il n'y traita pas particulièrement le problème de l'équation séculaire et se contenta de conclure que le phénomène

comme tel ne s'expliquait guère à travers les inégalités qu'il avait obtenues, l'Académie, tout en lui décernant un prix, décida de remettre le même sujet au concours pour l'année 1772. Le prix pour cette année fut partagé entre la pièce de LAGRANGE : son «*Essai sur le problème des trois corps*» [350] qui sera discuté de façon détaillée dans le chapitre suivant, et un mémoire d'EULER : «*Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune*» [352] qui forma la base de sa volumineuse deuxième théorie de la Lune qu'il publia en 1772 avec le concours de son fils J.-A. EULER et deux autres académiciens de St-Petersbourg, W.-L. KRAFFT et J.-A. LEXELL. Les coauteurs étaient surtout responsables des calculs numériques.

L'œuvre elle-même est composée d'un avant-propos et de deux «*Livres*». Le premier contient l'exposition théorique de l'orbite de la Lune avec les équations différentielles du mouvement. Le second s'occupe des développements numériques des solutions des équations différentielles. Il se termine par une comparaison des tables dressées suivant la théorie eulerienne avec les tables de CLAIRAUT.

-II-

LE GROS OUVRAGE : «*Theoria Motuum Lunae, nova methodo pertractata . . .* » [301] parut à St-Petersbourg en 1772 par les soins de l'Académie impériale.

Dans un avant-propos assez long, EULER explique les difficultés qu'il a rencontrés lors de ses travaux sur la théorie de la Lune pendant quarante ans. Une intégration directe des trois équations différentielles du deuxième ordre décrivant le mouvement de la Lune n'est pas possible et il faut se contenter de méthodes d'approximation qui, elles aussi, s'avèrent difficiles. EULER avoue aussi que sa première théorie de la Lune de 1752 ne le satisfait plus, puisqu'elle ne tient pas compte de certaines inégalités perceptibles de l'orbite de notre satellite. Il propose donc d'introduire une toute nouvelle méthode avec un système de coordonnées rectangulaires tournant avec la vitesse angulaire moyenne de la Lune dans le plan de l'écliptique. L'axe des x monte dans la direction de la longitude moyenne de la Lune et l'axe des y se trouve également dans le plan de l'écliptique. En désignant par a la distance moyenne de la Terre à la Lune, les coordonnées du lieu vrai de la Lune deviennent $a(1+x)$, ay , az . Les valeurs x , y , z seront toujours petites et leurs développements en séries seront vite convergents. Les grandeurs inconnues peuvent être déterminées à partir, soit de constantes physiques comme l'excentricité K , l'inclinaison de l'orbite de la Lune sur l'écliptique i , l'excentricité de l'orbite de la Terre autour du Soleil κ , le rapport entre la parallaxe solaire à la parallaxe de la Lune a ; soit à partir des angles donnant les mouvements moyens proportionnels au temps comme : l'élongation moyenne de la Lune par rapport au Soleil p , l'anomalie moyenne de la Lune q , la latitude moyenne r et l'anomalie moyenne du Soleil t .

EULER applique alors, comme il l'a déjà fait dans sa première théorie de la Lune, une séparation des inégalités en plusieurs classes qui peuvent être traitées de façon indépendante et où des itérations sont possibles. Ainsi, EULER distingue la première classe des inégalités dépendant uniquement de p qu'il nomme «*variation*» ; la deuxième classe, dépendant de K , est subdivisée en «*ordres*» suivant leur dépendance de K , K^2 , K^3 que EULER appelle «*excentris*». Une troisième classe, les «*inégalités solaires*», dépend de κ , la quatrième classe, formant les inégalités «*parallactiques*», ayant pour chaque membre le facteur a . La cinquième classe, que EULER appelle «*réduction*» et qui a trait surtout à la latitude dépend de i . Il y a encore des classes mixtes de différents ordres dépendant en partie de la longitude et en partie de la latitude. EULER obtient en principe des équations de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x = & Q + kP + K^2Q + K^3R + aS + aKT + \kappa U + \kappa KV \\ & + \kappa K^2W + a\kappa w + i^2X + i^2KY + i^2\kappa Z \end{aligned} \quad (6.232)$$

$$\begin{aligned} y = & O + KP + K^2Q + K^3R + aS + aK\tau + \kappa U + \kappa KV \\ & + \kappa K^2W + a\kappa w + i^2X + i^2KY + i^2\kappa Z \end{aligned} \quad (6.233)$$

$$z = ip + iKq + iK^2r + i\kappa S + i^3t + ia\mu \quad (6.234)$$

L'avantage de cette formulation est que le calcul peut être fait séparément pour chaque ordre et que, vu la petitesse de Q et O , les cubes de ces expressions sont négligeables et leur développement en série devient alors simple. Les expressions du premier ordre seront limitées à 6 décimales tandis que celles de l'ordre K auront une exactitude de 5 décimales, celles de l'ordre K^2 seront calculées à 4 décimales près. EULER pense qu'avec ces hypothèses, il arrivera à calculer le lieu de la Lune avec une exactitude de moins d'une seconde. Pour d'autres ordres, il est moins sûr, spécialement ceux liés aux lettres W et w , ainsi que ceux proportionnels à i^2K^2 qu'il néglige dans le résultat final vu qu'ils ne génèrent que des inégalités très petites qu'il est plus facile de déterminer à l'aide des résultats observationnels. Mais avant de pouvoir appliquer les formules dérivées de la théorie, il faut déterminer les valeurs des constantes K et i à partir des observations astronomiques, tout comme il faut connaître les lieux moyens de l'apogée et des nœuds de l'orbite lunaire. Or, puisque EULER croyait qu'il n'était pas possible d'atteindre une exactitude pour les observations supérieure à $1'$, les éléments calculés d'après les observations sont soumis à des erreurs et les résultats de la théorie lunaire peuvent être différents sans que pour autant cette théorie elle-même soit erronée. EULER joint à son œuvre des tables de la Lune qui concordent en général dans les limites d'une minute avec celles de MAYER et de CLAIRAUT. Mais les tables euleriennes sont plus facilement maniables que celles de ses prédécesseurs.

-III-

COMME EULER l'a déjà précisé dans son avant-propos, il introduit un système de coordonnées rectangulaires, tournant avec un mouvement uniforme autour du point T , représentant le centre de la Terre, dans le plan de l'écliptique. L'anomalie moyenne ζ' du Soleil étant la variable indépendante et l'unité de la distance, le demi-grand axe a' de l'orbite du Soleil, l'angle l décrivant le mouvement du système mobile, étant égal à la longitude moyenne de la Lune, EULER transforme les coordonnées mobiles par :

$$\begin{aligned} X &= a(1+x) \\ Y &= ay \\ Z &= az \end{aligned} \quad (6.235)$$

où les nouvelles coordonnées x, y, z restent constamment très petites vu que X, Y, Z diffèrent assez peu de a, o, o .

Après quelques calculs algébriques, EULER parvient aux trois équations suivantes :

$$\frac{d^2x}{d\zeta'^2} - 2(m+1)\frac{dy}{d\zeta'} - 3\lambda x = -\sum M \cos \Omega \quad (6.236)$$

$$\frac{d^2y}{d\zeta'^2} + 2(m+1)\frac{dx}{d\zeta'} = -\sum M' \sin \Omega \quad (6.237)$$

$$\frac{d^2z}{d\zeta'^2} + (\lambda+1)z = -\sum M'' \sin \Omega \quad (6.238)$$

ou :

$$\frac{d\Omega}{d\zeta'} = \text{const} = c \quad ; \quad \lambda = (m+1)^2 + \frac{1}{2} \quad (6.239)$$

où m est déterminé à l'aide de l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\zeta'} &= m+1 \\ m &= 12,3689 \end{aligned} \quad (6.240)$$

Cette dernière valeur est déterminée à l'aide d'observations.

EULER considère d'abord les équations 6.236 et 6.237 et cherche les valeurs de x et y sous la forme :

$$x = \sum N \cos \Omega \quad ; \quad y = \sum N' \sin \Omega \quad (6.241)$$

En substituant ces expressions dans les équations 6.236, 6.237 et 6.238 et en égalant à zéro les coefficients de $\cos \Omega$ et de $\sin \Omega$, EULER trouve les solutions particulières de ces équations et ne tient pas compte de leurs solutions homogènes. Finalement, EULER détermine à l'aide de sa méthode que le périégée de la Lune est animé d'un mouvement direct égal à :

$$nt \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2} \frac{n'^2}{n^2}} \right) \quad (6.242)$$

et le nœud d'un mouvement rétrograde égal à :

$$nt \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{n'^2}{n^2}} \right) \quad (6.243)$$

EULER suppose maintenant que les quantités x , y , z peuvent se développer en séries convergentes de la forme 6.232, 6.233 et 6.234 et il applique ainsi son idée de partager les inégalités en divers ordres et de mettre ainsi plus de clarté dans la détermination des variables. Il s'occupe séparément, comme il l'a déjà fait dans sa première théorie, des diverses espèces de termes contenus dans les équations. Pour les coordonnées x et y , EULER forme les 26 équations différentielles en considérant les coefficients des quantités o , e , e^2 , e^3 ; e' , $e'e$, $e'e^2$; a , ae , ae' ; i^2 , i^2e , i^2e^2 . Pour la coordonnée z il en forme cinq en considérant les coefficients des quantités i , ie , ie^2 , ie' , i^2 . Il y a donc en total trente et une équations différentielles du second ordre à résoudre. Le LIVRE II de l'ouvrage d'EULER contient l'application de la théorie développée au calcul astronomique. Après avoir rassemblé toutes les inégalités qu'il a déterminées, EULER compare ses formules avec celles des tables de CLAIRAUT, dont les arguments sont, comme les siens, les anomalies et les elongations moyennes. Il examine les résultats de chacun dans tous les cas particuliers des positions relatives de la Lune, du Soleil et de la Terre et il rectifie, le cas échéant, ses éléments et réduit ensuite tous les coefficients en nombres absolus. Finalement, EULER construit des tables et le calcul de chacune des coordonnées x et y exige vingt et une tables particulières, le calcul de z n'en demandant que seize.

EULER ne dissimule pas qu'il n'a pas tout à fait achevé les calculs de quelques ordres d'inégalités à cause de leur longueur presque insurmontable. En vue de pouvoir tenir compte des formes non sphériques de la Lune et de la Terre, EULER maintint dans l'expression de la force gravitationnelle un petit terme inversement proportionnel à la quatrième puissance de la distance sans que celui-ci rajoute une plus grande exactitude à ses résultats. En effet, ceux-ci ont été reconnus comme étant fort inférieurs en exactitude à ceux de MAYER et même à ceux de CLAIRAUT. Et l'accélération séculaire de la Lune n'avait pas trouvé d'explication dans la deuxième théorie de la Lune d'EULER.

Chapitre 7

La théorie des perturbations après Euler et le passage à la mécanique céleste classique avec Lagrange et Laplace

—|—

NOTRE PRÉSENTATION des achèvements d'EULER dans la méthode des perturbations était certes sélective et se concentra principalement sur des exemples liés à la théorie de la Lune et aux interactions de Jupiter et de Saturne, ceci en partant de son mémoire fondamental intitulé : «*Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*» [304]. En effet, c'est dans cette pièce qu'EULER considéra la longitude du nœud ascendant et l'inclinaison de l'orbite comme variables. Il continua à développer ses idées sur les perturbations et montra que l'excentricité variable de la Lune trouvée par HORROCKS, pouvait être remplacée par une excentricité constante, liée à une avance uniforme de l'apogée. Cela revenait à introduire une Lune virtuelle obéissant strictement aux lois keplériennes, la différence entre les lieux de la Lune réelle et celle virtuelle constituant alors la perturbation. EULER utilisa cette idée dans son traité «*Theoria motus lunae*» [291]. Il constata bientôt l'interaction forte entre les différentes sortes d'inégalités résultant dans des valeurs complètement incertaines pour certaines d'entre elles si d'autres étaient modifiées de façon presque imperceptible. EULER en tira la conclusion qu'il fallait arriver à faire concorder le

plus possible les deux lieux lunaires, afin d'arriver à des tables plus conformes, qui pourraient à leur tour être une base plus fiable pour la construction d'une théorie des perturbations.

Cette idée incita EULER à déterminer pour chaque instant la section conique suivant laquelle la Lune se meut, et suivant laquelle elle continuerait sa course en accord avec les règles keplériennes si la force perturbatrice du Soleil disparaissait soudainement. Ceci est l'idée essentielle de la théorie des perturbations. Nous avons vu qu'EULER donne dans sa première théorie de la Lune un ensemble de six équations différentielles du premier ordre, qu'il intègre par approximations successives, et qui expriment les perturbations de l'orbite de la Lune. C'est dans deux autres mémoires : «*De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato*» [351] publié en 1758, mais surtout dans le «*Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur*» [353], qui obtint le prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1756, que EULER mit au point sa théorie des perturbations.

Dans le texte de 1756, EULER souligne d'abord qu'il est désormais fermement convaincu de la loi newtonienne, ceci à cause de la réussite dans la détermination du mouvement de l'aphélie des planètes, du succès dans le calcul des perturbations réciproques de Jupiter et de Saturne et de la dérivation géniale du mouvement de l'apogée lunaire par CLAIRAUT. EULER place donc la validité de la loi de la gravitation comme absolue et pense que toutes les réflexions futures en mécanique céleste devront en tenir compte. Mais il se rend compte aussi que la solution du problème mathématique, décrivant le mouvement de trois ou de plusieurs corps, assujettis à cette loi de la gravitation newtonienne, semble dépasser la capacité de l'esprit humain. Mais, en prenant en compte le fait que les perturbations mutuelles entre les planètes sont extrêmement petites, il est légitime de séparer les effets causés par les différentes planètes sur une autre et d'utiliser des approximations.

EULER commence à dériver sa théorie en utilisant les équations du mouvement qu'il avait déjà utilisées dans son mémoire de 1747 [304], les appliquant maintenant à chaque planète. Il transforme l'équation différentielle pour l'élément de temps dt par l'introduction de l'équation polaire, représentant une ellipse à paramètres variables et il arrive à une série d'équations différentielles du premier ordre pour les éléments de l'orbite, mais qui contiennent encore les forces perturbatrices. EULER évalue ensuite ces forces et néglige en même temps, dans le cas de la planète perturbatrice, les termes contenant des puissances de l'excentricité de l'orbite. Il doit également développer en série le cube inverse de la distance des deux planètes. EULER, après des calculs algébriques assez longs, atteint comme résultat un système d'équations différentielles du premier ordre dont les côtés droits sont composés, soit de termes connus, soit d'intégrales contenant de tels termes. EULER compte un certain moment utiliser les équations différentielles trouvées sans les intégrer, afin de déterminer les lieux des planètes dans le cas où les éléments orbitaux sont connus pour un temps donné et pour en déduire les incréments pour un laps de temps assez court. Mais il se ravise et observe que l'erreur initiale introduite dans le

premier pas de calcul va se multiplier avec les pas de calcul suivants et qu'il est impossible d'estimer ces erreurs sans passer préalablement par une intégration des équations en question. Mais avant de procéder à cette équation, EULER doit intégrer des expressions de la forme $d\omega \sin \eta$, $d\omega \cos \eta$, ainsi que des termes où l'argument $\eta \pm \nu$ apparaît avec ses multiples. Il parvient à des résultats basés sur l'hypothèse que les puissances de l'excentricité e peuvent être négligées. EULER, avec cette hypothèse préalable, bute, comme CLAIRAUT avant lui, au résultat que la valeur de l'avance de l'aphélie, s'il l'applique à l'orbite de la Lune, donne seulement la moitié de celle existant réellement. Or, puisque dans le cas des planètes, les constantes sont modifiées profondément, le résultat trouvé est parfaitement applicable dans ce cas. Dans la suite de son texte, EULER, tout en mettant à profit les résultats observationnels des anciens astronomes, vient à la conclusion, en calculant les perturbations de la Terre par les corps célestes environnants, que seules les perturbations de Jupiter, Vénus et la Lune ont besoin d'être considérées pour la détermination du lieu vrai vis à vis du Soleil.

CLAIRAUT, à côté de son mémoire sur les perturbations de l'orbite apparente du Soleil, présenté à l'Académie le 9 juillet 1757 [198], et dans lequel il traite l'influence des planètes principales et enchaîne sur ses premières recherches sur le même sujet, faites déjà dix années plus tôt, publie encore une importante pièce dans le domaine de l'astronomie : son investigation sur les perturbations de la comète de HALLEY. En 1757, LALANDE, poursuivant une suggestion de HALLEY, que le prochain retour de la comète serait fortement perturbé par l'action de Jupiter, proposa à CLAIRAUT d'appliquer sa solution pour le problème des trois corps, qui avait fait ses preuves dans le calcul de l'orbite de la Lune, au calcul de ces perturbations. CLAIRAUT entreprit cette tâche immense et il vit bientôt qu'il fallait inclure dans ses calculs comme nous l'avons vu déjà l'action de Saturne et qu'en plus il n'était pas possible d'utiliser les expressions intégrales de sa solution. Bien au contraire, il était nécessaire de procéder à une solution numérique des équations du mouvement afin de calculer les distances et les vitesses de la comète à travers l'espace. Les détails de la démarche de CLAIRAUT ont été présentés dans un chapitre antérieur. Les calculs durèrent plus d'une année et furent faits par une équipe dont LALANDE et Madame LAPAUTE. CLAIRAUT fit un rapport préliminaire à l'Académie le 14 novembre 1758. Dans son rapport final publié en 1760 [199], il exposa dans les détails le succès brillant et mémorable de son travail prestigieux qui avait réussi à prédire à un mois près le passage de la comète.

D'ALEMBERT, comme nous l'avons vu dans un chapitre précédent, manifesta les mêmes intérêts scientifiques que CLAIRAUT et acquit pratiquement les mêmes résultats que celui-ci, et dans la théorie lunaire, et dans celle des comètes. Mais D'ALEMBERT fut aussi, d'abord le tuteur, puis l'ami de J.-L. LAGRANGE et c'est à travers celui-ci, que passaient ses idées, non seulement en astronomie mais aussi en mécanique, à la génération du début du XIX^e siècle. Les textes de D'ALEMBERT se distinguent de ceux de CLAIRAUT par une plus grande compétence mathématique mais sont plus difficiles à lire que ceux de

CLAIRAUT ou d'EULER.

Les relations amicales entre D'ALEMBERT et LAGRANGE n'ont pas mené à une dépendance de l'œuvre de ce dernier à celle de son aîné, mais on constate une filiation avec celle d'EULER et surtout avec sa méthode de la variation des éléments orbitaux, que LAGRANGE va perfectionner comme nous allons le voir. EULER, sans doute dû aussi à son handicap physique le rendant presque aveugle, se ravise quant à son approche de la théorie des perturbations. Dans un mémoire : «*Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans le mouvement des corps célestes causés par leur action mutuelle*» [354], EULER plaide pour une approche numérique intégrale. En effet, dit-il, puisque les méthodes pour le calcul des perturbations sont approximatives et mènent à un abandon d'une infinité de petites inégalités, et puisque la convergence des séries trigonométriques servant à exprimer ces inégalités est loin d'être garantie de façon que l'on ne sait pas si des quantités plus importantes apparaissent dans certains termes qui, généralement sont négligés, il faut abandonner complètement cette méthode pour retourner à l'intégration directe et numérique des équations différentielles. Il reste évidemment la question du choix du pas temporel ainsi que celle du contrôle de l'exactitude de cette détermination des éphémérides par une comparaison entre valeurs observées et valeurs calculées. Néanmoins, EULER est persuadé que cette méthode, utilisant à la fois l'observation et le calcul, aura un succès certain, pourvu aussi que l'on convertisse le développement en série de la fonction des distances à un calcul numérique. Or, probablement dû à des méthodes d'intégration numérique trop peu précises, le résultat de cette tentative eulérienne a avorté et les valeurs obtenues pour le cas de l'orbite lunaire furent de loin moins précises que celles des tables de MAYER et même de celles de CLAIRAUT.

Tout le domaine du calcul des perturbations planétaires fut développé, comme nous l'avons vu, par les trois grands de la mécanique céleste : CLAIRAUT, D'ALEMBERT et EULER, secondés, il est vrai par quelques académiciens de moindre importance. À la fin du XVIII^e siècle, après la mort de D'ALEMBERT en 1783 et celle d'EULER en la même année, CLAIRAUT étant mort plus jeune en 1765, une nouvelle génération s'imposa avec LAGRANGE et LAPLACE. Le bilan des acquis obtenus par la première génération, tout en étant respectable, fit découvrir aussi des points faibles dont l'explication constituera une grande partie des efforts scientifiques de LAGRANGE, LAPLACE et quelques autres. Ainsi, il fallait :

- arriver à une application systématique de la théorie des perturbations à un ensemble de quatre, cinq ou six corps célestes ;
- trouver de nouvelles méthodes pour développer la fonction perturbatrice et mettre au point les formules pour l'incorporer dans les expressions des forces perturbatrices ;
- parvenir à une solution valable du problème des «*arcs de cercle*» là où ceux-ci apparaissent comme partie de la solution d'un système d'équations différentielles ;
- développer d'une manière plus systématique la méthode de la variation

des éléments orbitaux en vue d'appliquer ces résultats dans la recherche des variations séculaires de ces mêmes éléments ;

- trouver les inégalités périodiques à courte période ;
- se faire une idée de la stabilité de notre système planétaire.

Les problèmes évoqués sont tous liés aux deux grands géomètres LAGRANGE et LAPLACE. Leurs travaux créent le corps de doctrine de la mécanique céleste qui va se compléter au XIX^e siècle par des méthodes plus générales encore et plus sophistiquées pour aboutir aux : «*Nouvelles méthodes de la Mécanique Céleste*» [355] de Henri POINCARÉ au début du XX^e siècle. Ce chapitre final tentera de suivre l'évolution des questions soulevées avant, et montrera l'incidence toujours moindre de la question de la validité de la loi de la gravitation pour trouver une réponse définitive avec le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126] de LAPLACE.



TRÈS TÔT J.-L. LAGRANGE s'intéressa aux questions de mécanique céleste, ceci particulièrement en relation avec les sujets que proposait alors l'Académie de Paris. Ainsi, celle-ci annonçait pour l'année 1764, la question du concours : «*Si l'on peut expliquer par quelque raison physique pourquoi la Lune nous présente toujours à peu près la même face ; et comment on peut déterminer par les observations et par la théorie si l'axe de cette Planète est sujet à quelque mouvement propre semblable à celui qu'on connaît dans l'axe de la Terre, et qui produit la précession et la nutation*». En 1763, LAGRANGE envoie sa pièce : «*Recherches sur la libration de la Lune dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposée par l'Académie Royale des Sciences pour le prix de l'année 1764*» [341]. Il y donne une explication satisfaisante de l'égalité entre les mouvements moyens de translation et de rotation, mais il n'est pas si heureux pour l'égalité entre le mouvement des nœuds de l'équation lunaire et celui des nœuds de l'orbite de la Lune sur l'écliptique. Dans tout le mémoire, LAGRANGE utilise d'une façon intense le principe des vitesses virtuelles qui présente une liaison intime et nécessaire avec ses techniques du calcul des variations qui constitueront en 1788 la base de sa «*Mécanique analytique*» [356].

Suite à une autre mise au concours par l'Académie Royale des Sciences, LAGRANGE écrit la pièce : «*Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter* ... » [357] qui sera commentée dans la suite. Ensuite il participa au concours de 1772 avec sa pièce : «*Essai sur le problème des trois corps*» [358]. Dans cet essai, il s'agit toujours de la théorie de la Lune. En 1770, la moitié du prix avait été attribuée à une pièce rédigée en commun par EULER et son fils Jean Albert. La même question fut encore posée pour l'année 1772 et le prix fut partagé entre EULER et LAGRANGE pour son essai en question que nous allons exposer et commenter dans ce qui suit. L'éditeur des «*Œuvres complètes*» de

LAGRANGE écrit dans une note sur ce mémoire : «*Le chapitre premier mérite d'être compté parmi les travaux les plus importants de LAGRANGE. Les équations différentielles du problème des trois corps, lorsqu'on ne considère, ce qui est permis, que des mouvements relatifs, constituent un système du douzième ordre, et la solution complète exige en conséquence, douze intégrations ; les seules intégrales connues étaient celles des forces vives et les trois que fournit le principe des aires : il en restait huit à découvrir. En réduisant à sept le nombre des intégrations nécessaires pour l'achèvement de la solution, LAGRANGE a fait faire à la question un pas considérable ... qui ne fut dépassé qu'en 1873 par C.G. JACOBY*» [358].

LAGRANGE dans l'«*Avertissement*» précédant son texte, annonce tout de suite son programme : «*Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le problème des trois corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque corps, d'autres éléments que les distances entre les trois corps, c'est-à-dire le triangle formé par ces corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps ; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des corps par rapport à un plan fixe quelconque ...* » [358]

Il est singulier que, dans le même temps et pour la même occasion, EULER et LAGRANGE aient tous les deux voulu substituer aux coordonnées polaires les rectilignes comme variables principales dans les équations différentielles du problème des trois corps.

Le mémoire en question peut être divisé en deux parties ; la première contient des recherches sur le problème pris dans toute sa généralité, et se trouve partagée en deux chapitres ; la deuxième traite en particulier de la théorie de la Lune, et comprend aussi deux chapitres qui donnent d'un côté les formules générales et de l'autre côté un essai sur leur application.

LAGRANGE désigne par A , B , C les masses des trois corps qui s'attirent mutuellement en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances. Il nomma de plus x , y , z les coordonnées rectangulaires de l'orbite du corps B autour du corps A et x' , y' , z' les coordonnées rectangulaires de l'orbite du corps C autour du même corps A . Ces coordonnées sont supposées toujours parallèles à trois lignes fixes et perpendiculaires entre elles. Finalement LAGRANGE désigne par r , r' et r'' les distances entre les corps A et B , A et C , B et C et les exprime par les coordonnées rectangulaires. En prenant l'élément du temps dt constant, LAGRANGE obtient les six équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3} \right) x + C \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} \right) x' = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3} \right) y + C \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} \right) y' = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{A+B}{r^3} + \frac{C}{r''^3} \right) z + C \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} \right) z' = 0 \quad (7.3)$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3} \right) x' + B \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} \right) x = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3} \right) y' + B \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} \right) y = 0 \quad (7.5)$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} + \left(\frac{A+C}{r'^3} + \frac{B}{r''^3} \right) z' + B \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r''^3} \right) z = 0 \quad (7.6)$$

LAGRANGE parvient alors avec une grande élégance aux quatre intégrales premières du problème et il réduit ensuite les six premières équations primitives à trois autres équations symétriques entre les différentielles secondes des carrés des distances prises par rapport au temps, et des fonctions des masses et des distances précédées partiellement du double signe de l'intégration. Ces équations sont :

$$\frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r} - C(p'q' - p''q'' + Q) = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{d^2(r'^2)}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r'} - B(pq + p''q'' + Q') = 0 \quad (7.8)$$

$$\frac{d^2(r''^2)}{2dt^2} - \frac{A+B+C}{r''} - A(-pq - p'q' + Q'') = 0 \quad (7.9)$$

A l'aide des équations 7.7, 7.8 et 7.9, il est possible de déterminer les trois rayons r , r' et r'' en fonction de t et il est aussi possible de donner la position relative des corps entre eux à chaque instant. Ces équations quoique moins simples que les primitives 7.1 à 7.6, ont l'avantage de ne contenir aucun radical et LAGRANGE les appliquera par la suite à la théorie de la Lune. Dans ces équations, les différents termes ont les significations suivantes :

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}(r'^2 + r''^2 - r^2) \\ p' &= \frac{1}{2}(r^2 + r''^2 - r'^2) \\ p'' &= \frac{1}{2}(r^2 + r'^2 - r''^2) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned}
q &= \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r''^3} \\
q' &= \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r'^3} \\
q'' &= \frac{1}{r'^3} - \frac{1}{r^3}
\end{aligned} \tag{7.11}$$

$$\begin{aligned}
dQ &= q' dp' - q'' dp'' - q dp \\
dQ' &= q dp + q'' dp'' + q' dp \\
dQ'' &= -q dp - q' dp' + q'' dp
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$d\rho = x' dx + y' dy + z' dz - x dx' - y dy' - z dz' \tag{7.13}$$

Si avec les équations 7.7 à 7.13 l'on connaît le triangle que les trois corps forment à chaque instant, il reste à voir comment on pourra déterminer l'orbite même de chaque corps, c'est-à-dire les six variables x, y, z, x', y', z' en fonction de t .

Après des considérations algébriques plutôt longues, LAGRANGE parvient à une relation :

$$\begin{aligned}
&16(pp' + pp'' + p'p'')(\nu\nu' + \nu\nu'' + \nu'\nu'') \\
&- 4(\Sigma\nu + \Sigma'\nu' + \Sigma''\nu'') + \left(\frac{dp dp' + dp dp'' + dp' dp'' + d\rho^2}{dt^2} \right)^2 = 0
\end{aligned} \tag{7.14}$$

où $\nu, \nu', \nu'', \Sigma, \Sigma'$ et Σ'' sont des expressions dépendant de la configuration géométrique. L'équation 7.14 ainsi que les équations 7.7 à 7.9 doivent être remplies en même temps. Or, comme 7.14 contient les mêmes variables que les trois dernières, et qu'elle est d'un ordre moins élevé d'une unité que 7.7, 7.8 et 7.9, on pourra la regarder comme une intégrale particulière de ces mêmes équations parce qu'elle ne renferme aucune nouvelle constante.

LAGRANGE parvient ainsi à trouver onze équations du premier ordre pour la détermination des six variables x, y, z, x', y', z' et de leurs différentielles et il est donc impossible de déterminer ces variables par des opérations algébriques seules. LAGRANGE viendra à bout de ce problème au moyen d'une intégration. Il introduit d'abord un plan de projection déterminé pour les orbites de B et C autour de A de façon que les équations deviennent les plus simples en faisant une transformation linéaire de la forme :

$$X^2 + Y^2 + \left(\frac{Z}{h} \right)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \sin \varphi \\ X &= \sqrt{r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (7.16)$$

où φ est l'angle décrit par le corps B autour de A dans le plan de projection. Z/hr sera le sinus de la latitude.

LAGRANGE trouve finalement les expressions suivantes pour les positions respectives des corps B et C . Pour le corps B le rayon vecteur de l'orbite est r , la longitude est :

$$\int \frac{T dt}{h \left[r^2 - \left(\frac{Z}{h}\right)^2 \right]} \quad (7.17)$$

et la latitude s'écrit :

$$\frac{Z}{hr} \quad (7.18)$$

Pour le corps C , l'on retrouve les mêmes expressions qui sont munies d'un tiret. En résolvant l'équation 7.7 on trouve la valeur de r , tandis que T désigne la relation :

$$T = \frac{\Pi}{C} + \frac{\Psi''}{B} + \frac{\Psi'}{A} \quad (7.19)$$

avec :

$$\Pi = r^2 u^2 - \left(\frac{r dr}{dt} \right)^2 \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} \Psi'' &= p'' \nu'' - \left(\frac{dp''}{2 dt} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2 dt} \right)^2 \\ \Psi' &= p' \nu' - \left(\frac{dp'}{2 dt} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{2 dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (7.21)$$

Une expression analogue à 7.19 s'établit en utilisant les valeurs correspondantes au corps C . Toutes les quantités entrant dans les formules 7.19 à 7.21 sont des fonctions de la configuration des trois corps et de leurs masses à l'instant t . Z est trouvé à partir des équations 7.15 et 7.16.

Dans le second chapitre, LAGRANGE examine quelques exemples particuliers qui constituent des cas limites et ne se retrouvent pas tels quels dans le système du monde. Or ces cas sont intégrables ou presque intégrables. LAGRANGE

estime cependant : «*qu'ils méritent l'attention des Géomètres, parce qu'il peut en résulter des lumières pour la solution générale du Problème des trois Corps*» [358]. LAGRANGE prouve d'abord que le problème des trois corps, pour lequel les distances entre les trois corps sont constantes ou gardent entre elles un rapport constant, est intégrable de façon exacte. LAGRANGE distingue deux cas ; le premier étant lorsque les distances sont toutes égales entre elles, de sorte que les trois corps forment toujours un triangle équilatéral, le deuxième cas étant celui lorsqu'une des distances est égale à la somme ou à la différence des deux autres, de sorte que les trois corps se trouvent toujours rangés en ligne droite. LAGRANGE conclut à la fin du deuxième chapitre : «*Or si l'on suppose que les distances r , r' et r'' soient variables mais de manière que leurs valeurs ne s'écartent que très peu de celles qu'elles devraient avoir pour que l'un des cas précédent eût lieu, il est clair que le Problème sera résoluble à très peu près, et par les méthodes connues d'approximation ; mais nous n'entrerons pas ici dans ce détail, qui nous écarterait trop de notre objet principal.*» [358]

Dans le troisième chapitre, LAGRANGE passe au cas où il suppose que le corps C est beaucoup plus éloigné des corps A et B que ceux-ci ne le sont entre eux. Les formules qu'il a déduites au premier chapitre se simplifient du fait que les distances r' et r'' étant fort grandes par rapport à r . LAGRANGE introduit alors une quantité i qu'il suppose constante et très petite et il écrit :

$$\begin{aligned} r' &= \frac{R}{i} \\ r'' &= \frac{R'}{i} \end{aligned} \quad (7.22)$$

R et R' sont des quantités finies et comparables à r . En même temps, il vient :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\sigma}{i} \quad (7.23)$$

et il devient possible de déterminer R' en fonction de r , de R et du cosinus de l'angle compris ζ et d'éliminer ensuite R' des équations, celles-ci ne contenant plus que les différentielles secondes de r^2 , R^2 et Rz par rapport à t ; z étant égal à $r \cos \zeta$.

LAGRANGE obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} r'^2 &= \frac{R^2}{i^2} \\ r''^2 &= \frac{R^2}{i^2} - \frac{2Rz}{i} + r^2 \end{aligned} \quad (7.24)$$

qu'il introduit dans toutes les formules du premier chapitre. Il remplace les équations 7.7 à 7.9 par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2(r^2)}{2dt^2} - \frac{A+B}{r} - D \left[\frac{3z^2 - r^2}{R^3} + \int \left(-\frac{d(r^2)}{R^3} + \frac{3z(d(Rz) - \sigma dt)}{R^4} \right) \right] \\
& - iD \left[\frac{15z^3 - 9r^2z}{2R^4} + \int \left(-\frac{3zd(r^2)}{R^4} + \frac{(15z^2 - 3r^2)(d(Rz) - \sigma dt)}{2R^5} \right) \right] \\
& - i^2D \left[\frac{35z^4 - 30z^2r^2 + 3r^4}{2R^5} + \int \left(-\frac{(15z^2 - 3r^2)d(r^2)}{2R^5} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{(35z^3 - 15zr^2)(d(Rz) - \sigma dt)}{2R^6} \right) \right] - \dots = C \quad (7.25)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2(R^2)}{2dt^2} - \frac{D}{R} + iB \left[\frac{Rz}{r^3} + \int \frac{d(Rz) + \sigma dt}{r^3} \right] - \frac{i^3(A+B)}{R} + \dots = C \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2(Rz)}{dt^2} + \frac{Dz}{R^2} + (A+B) \left[\frac{Rz}{r^3} + \int \frac{d(Rz) + \sigma dt}{r^3} \right] \\
& - i \left[\frac{B}{r} + \frac{D(3z^2 - r^2)}{2R^3} + D \int \left(-\frac{d(r^2)}{R^3} + \frac{3z(d(Rz) - \sigma dt)}{R^4} \right) \right] \\
& - i^2D \left[\frac{5z^3 - 3zr^2}{R^4} + \int \left(-\frac{3zd(r^2)}{R^4} + \frac{(15z^2 - 3r^2)(d(Rz) - \sigma dt)}{2R^5} \right) \right] \\
& - \dots = C \quad (7.27)
\end{aligned}$$

Dans ces formules :

$$C = \frac{D}{i^3} \quad (7.28)$$

Les équations 7.25 à 7.27 fournissent les éléments à introduire dans les formules donnant finalement les valeurs des latitudes Ψ et Ψ' des deux corps B et C et celles des différentielles de leurs longitudes φ et φ' en ne poussant la précision que jusqu'aux quantités de l'ordre i .

Au chapitre IV, LAGRANGE applique les résultats trouvés au chapitre précédent à la théorie de la Lune. Il suppose que A soit la Terre, B la Lune, C le Soleil et i le rapport des parallaxes. Les variations de r et R étant fort petites, l'on peut faire :

$$\begin{aligned}
r^2 &= 1 + x \\
R^2 &= 1 + X
\end{aligned} \quad (7.29)$$

x et X sont alors des quantités peu considérables par rapport à l'unité et ne contiennent aucun terme constant. LAGRANGE, mettant à la place de Rz le

terme y , obtient après quelques calculs algébriques, quatre équations dont les premiers termes sont : $\frac{d\sigma}{dt}$, $\frac{d^2x}{2dt^2}$, $\frac{d^2X}{2dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ et qui sont donnés en fonction des variables x , X , y respectivement de leurs puissances et de leurs produits : ceux-ci sont multipliés par i et par le carré du rapport α des moyens mouvements. Il néglige d'abord ces derniers termes et ceux qui renferment x et X dans l'équation en y . Après une double différentiation, afin d'y faire disparaître le terme intégral, LAGRANGE obtient :

$$\frac{d^4y}{dt^4} + (2 + \alpha^2) \frac{d^2y}{dt^2} + (1 - 3\alpha^2)y = 0 \quad (7.30)$$

Cette équation différentielle du quatrième ordre est intégrable par les méthodes connues. En effet, LAGRANGE fait :

$$y = f \cos pt \quad (7.31)$$

et trouve, en substituant 7.31 en 7.30, une double valeur pour p . En désignant la deuxième par q , il obtient :

$$y = f \cos pt + g \cos qt \quad (7.32)$$

f , g étant des constantes indéterminées qui doivent être telles, que lorsque $t = 0$, on ait $y = R \cdot r = 1$ ce qui donne $f + g = 1$. LAGRANGE obtient alors l'expression de la latitude avec :

$$\sin \Psi = \sin l \sin \left(\frac{p+q}{2} t \right) \quad (7.33)$$

où l'angle l est arbitraire et représente l'inclinaison maximale de l'orbite de la Lune qui est d'environ $5^\circ 8'$. LAGRANGE substitue ensuite la valeur approchée de y , solution de l'équation différentielle 7.30 dans l'équation pour x :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (1 + 4\alpha^2)x - \alpha^2 \left[9y^2 - 3 \left(\int y dt \right)^2 \right] = \text{cte} \quad (7.34)$$

en y négligeant d'abord les termes où x et y sont mêlés et en rejetant tous les termes constants. Il voit par là quelle doit être la forme de l'intégrale et la substitution, en égalant à zéro les coefficients de chaque cosinus, il détermine les coefficients de tous les termes. Enfin l'équation différentielle en X se réduit à la forme

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha^2 X = 0 \quad (7.35)$$

et donne la valeur de X par une intégration très simple.

Connaissant par là, la forme des premiers termes des valeurs de y , x et X , LAGRANGE substitue dans les termes négligés des équations proposées, pour avoir par itération, la forme de ceux qu'il faudra introduire dans les nouvelles

valeurs des variables, et dont il déterminera à leur tour les coefficients par substitution. À la fin de son mémoire, LAGRANGE exécute cette opération pour x et y afin de donner un exemple de sa méthode. Il ne veut pas présenter une théorie complète de la Lune ou seulement déduire les inégalités de son mouvement. A. GAUTIER dans son «*Essai historique sur le problème des trois corps ...*» [117] donne une appréciation de l'essai de LAGRANGE qui reste valable aujourd'hui encore. «*Il fallait en effet de l'habileté et du génie pour présenter, sous une forme toute nouvelle, les équations d'un problème déjà si souvent traité; c'était pour ainsi dire un tour de force, que celui de donner un système de formules générales, sans y faire entrer aucun angle comme variable, et aucune fonction périodique. On doit admirer aussi l'élégance et la richesse des idées qui règnent dans l'Essai sur le problème des trois corps; outre le vif intérêt qu'il doit inspirer sous le rapport analytique, on doit regarder comme fort utiles des recherches qui tendaient à frayer des routes nouvelles, à indiquer des méthodes différentes de celles qui étaient connues, et où, surmontant la plus grande difficulté, celle de l'invention, l'auteur ne laissait qu'une tâche bien plus aisée, celle de juger et comparer ses procédés avec les autres, pour en discerner les avantages et les inconvénients. Le succès ne semble pas cependant avoir couronné cette fois les efforts de LAGRANGE; le choix des distances comme seules variables ne paraît pas heureux, puisqu'il complique les équations plutôt que de les simplifier, qu'il oblige à multiplier les notations, et à rendre quelquefois par là, la marche des opérations difficile à suivre; d'ailleurs, comme il ne dispense pas de revenir, dans la résolution définitive, à l'emploi des sinus et cosinus, on ne voit pas quelle utilité il y a à les faire disparaître d'abord, et il faut bien que l'auteur ait trouvé des désavantages à cette méthode, puisqu'il l'a lui-même promptement abandonnée.*» [117]

Si donc l'essai de LAGRANGE peut susciter des questions méthodologiques, il a marqué un pas dans le développement de la mécanique céleste. LAPLACE en tient compte longuement dans son «*Traité de Mécanique Céleste*» [126]. De plus les solutions des cas spéciaux du problème des trois corps ont eu un effet certain sur l'imagination des astronomes mais aussi sur celle du grand public. Ainsi, LAPLACE a pu écrire dans son «*Exposition du système du Monde*» [359] : «*Quelques partisans des causes finales ont imaginé que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pendant les nuits. Dans ce cas, la nature n'aurait point atteint le but qu'elle se serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la fois de la lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir, il eût suffi de mettre à l'origine la Lune en opposition avec le Soleil, dans le plan même de l'écliptique à une distance de la Terre égale à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil, et de donner à la Lune et à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs distances à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition avec le Soleil, eût décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la Terre; ces deux astres se seraient succédés l'un à l'autre sur l'horizon, et, comme à cette distance la Lune n'eut point été éclipsée, sa lumière aurait remplacé constamment celle du Soleil.*» [359]

-III-

L'APPLICATION des équations du mouvement des corps, trouvées pour le problème des trois corps ; à un nombre plus grand de points matériels dans l'espace est en principe possible, mais pose de sérieux problèmes, aussi pour des solutions analytiques approchées, et ce n'est que LAGRANGE, avec son mémoire concernant les «*Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter*» [357], qui aborde sérieusement la question pour la première fois en 1765. Il y avait bien quelques tentatives de résoudre le problème avant l'essai de LAGRANGE par EULER et par CLAIRAUT, mais qui se limitaient à la seule approche numérique de la question.

Ainsi, comme nous l'avons déjà relaté, EULER en 1762, dans son essai : «*Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans le mouvement des corps célestes causés par leur action mutuelle*» [354], argumente que toutes les méthodes de calcul des perturbations sont approximatives et négligent ainsi une infinité de petites inégalités. Comme en outre les séries trigonométriques exprimant de telles inégalités ne sont pas bien convergentes, il est incertain que des termes, qu'on se propose de négliger, peuvent éventuellement donner des quantités considérables pour les différentes variables. Voilà pourquoi EULER plaide en faveur des seules solutions numériques et pour l'abandon des solutions analytiques. Les variations des coordonnées de la position d'un corps céleste : x , y , z sont à calculer à partir de leurs dérivées pour des petits intervalles en tenant compte de toutes les forces auxquelles le corps est soumis.

Le résultat consistera en des tables d'éphémérides donnant les positions successives de ce corps dans le temps. Après un certain temps, ces éphémérides devront être réajustées moyennant des résultats d'observations. EULER exprime ici clairement l'idée de la variation des éléments orbitaux qui trouvera son application avec LAGRANGE et LAPLACE plus tard et il souligne que l'avantage principal de la méthode qu'il propose, consiste dans le fait qu'elle s'applique aussi bien au problème des n -corps, qu'à celui des trois corps. Dans une communication à l'Académie des Sciences de Berlin en 1763 [360], EULER montre comment des positions et des vitesses très exactes de la Lune peuvent être obtenues pour des jours consécutifs par l'application de la méthode des différences finies. LAPLACE utilisera plus tard cette méthode dans son travail sur les orbites des comètes sans qu'il soit certain qu'il eut connaissance du mémoire d'EULER. Mais il fallut attendre le XIX^e siècle pour trouver une application des idées euleriennes aux orbites planétaires.

CLAIRAUT, comme nous l'avons vu dans un chapitre antérieur, a entrepris une initiative similaire avec ses investigations sur les perturbations de la comète de HALLEY. En 1757, LALANDE, suivant une suggestion de ce dernier, prédisant une forte perturbation de la comète par Jupiter lors de son prochain retour, proposa à CLAIRAUT d'appliquer sa solution du problème des trois corps au

calcul de ces effets perturbateurs, Dans son *«Mémoire sur la comète de 1682»* [361], avant même qu'il eut terminé son projet de recherche, CLAIRAUT décrit son itinéraire jusqu'à l'application de sa théorie du problème des trois corps à la question de l'orbite de la comète de HALLEY. *«La solution que je donnais, il y a dix ou douze ans du problème connu sous le nom de problème des trois corps, est la base du travail que je viens de faire, ainsi que de mes recherches précédentes sur la Lune et sur plusieurs planètes ; mais cette nouvelle application était bien plus difficile que toutes les autres ... »* [361] Et CLAIRAUT de poursuivre un peu plus loin : *«Or, la solution générale dont je viens de parler, en connaît une (i.e. une méthode sûre) qui ne demande que de la constance dans son exécution pour les déterminer ... »* [361] CLAIRAUT se propose d'utiliser sa solution générale sans pour autant passer par une intégration, ou une situation fort différente en comparaison avec la détermination de l'orbite de la Lune : *«Si on connaît à peu près les positions respectives de la Comète et de la planète perturbatrice, pendant une suite de points pris à de petites distances les unes des autres, on est en état par la quadrature de quelques courbes mécaniques, de rectifier la position de ces mêmes points, et de mesurer toute la perturbation.»* [361]

Or, pendant ses investigations, CLAIRAUT doit reconnaître qu'il est en face d'un problème, non pas de trois corps, mais qu'il doit en réalité considérer quatre corps : Le Soleil, la Comète ainsi que les planètes Jupiter et Saturne : *«Après avoir calculé tous les changements que Jupiter pouvaient causer, une nouvelle difficulté tout aussi considérable s'est montrée. Il a fallu faire les mêmes opérations pour Saturne. Sa masse qui est le tiers de celle de Jupiter peut produire, toutes choses égales d'ailleurs, le tiers des effets de la première : et c'en est assez pour mériter un examen particulier.»* [361] Mais CLAIRAUT se rend compte aussi qu'il n'a pas besoin d'étendre son modèle encore davantage : *«Quant aux autres corps célestes de notre système, comme leurs masses ne font pas la centième partie de celles des deux planètes supérieures, et que leurs orbites sont très petites en comparaison des premières, on a bientôt vu l'effet du dérangement qui en peut résulter, et il est presque insensible.»* [361] Néanmoins, les calculs, que nous avons décrits dans les détails dans un chapitre antérieur, restaient pénibles et demandèrent l'aide de J. de LALANDE et de Madame LAPAUTE. Si le premier est couvert de louanges par CLAIRAUT, l'aspect macho de la société savante du milieu du XVIII^e siècle voulait sans doute que cette dernière ne fut même pas citée dans le mémoire de 1759. CLAIRAUT résume les résultats qu'il a trouvés à la fin de son mémoire, sans omettre de voir dans ses calculs une preuve pour la validité de la théorie newtonienne de la gravitation : *«On voit ainsi que la théorie donne à un mois près la différence si remarquable qui est entre les deux révolutions connues de notre Comète ; or si l'on fait attention à la longueur de ces périodes, à la complication des deux causes qui ont produit l'inégalité et à la nature du problème qui les mesure, on trouvera peut-être cette nouvelle vérification du système newtonien, aussi frappante qu'aucune de celles qu'on ait données jusqu'à présent.»* [361] Finalement CLAIRAUT reste très prudent quant aux dates du retour de la Comète en 1759 : *«On sent avec quels ménagements je présente une telle annonce, puisque tant*

de petites quantités, négligées nécessairement par les méthodes d'approximation, pourraient bien en altérer le terme d'un mois, comme dans le calcul des périodes précédentes ; puisque d'ailleurs tant de causes inconnues, ainsi que je l'ai dit au commencement de ce Mémoire, peuvent avoir agi sur notre Comète ... » [361]

Les calculs de CLAIRAUT avaient prédit le passage de la comète au périhélie pour la mi-avril 1759 avec une erreur d'environ un mois. En fait, elle fut découverte dans la soirée du 21 janvier 1759 et perdue dans les rayons du Soleil le 4 février pour être redécouverte le premier avril suivant. Le passage au périhélie fut calculé pour le 10 mars 1759, ce qui confirmait bien l'exactitude des hypothèses et des calculs de CLAIRAUT.

Après avoir écrit un premier mémoire sur la méthode des perturbations intitulé : «*Solution de différents problèmes de calcul intégral*» [362] paru dans les «*Miscellanea Taurinensia*» Tome III (1762 à 1765), qui sera discuté ultérieurement dans le cadre des progrès de la théorie des inégalités de Jupiter et Saturne, LAGRANGE s'attaqua le premier au problème des n -corps en appliquant exclusivement des méthodes analytiques aux calculs des perturbations des satellites de Jupiter. Le long mémoire a pour titre : «*Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle*» [357] et gagna le prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1766.

LAGRANGE établit les équations du mouvement des quatre satellites alors connus en introduisant : r comme rayon vecteur de l'orbite d'un satellite quelconque projetée sur le plan de l'orbite de Jupiter ; p la tangente de la latitude du satellite par rapport à ce même plan ; F la force que Jupiter exerce sur le satellite à la distance unitaire. LAGRANGE trouve alors la force par laquelle le satellite est poussé vers Jupiter égale à

$$\frac{F}{r^2(1+p^2)} \quad (7.36)$$

et il la décompose en deux autres, l'une parallèle au rayon vecteur et égale à

$$\frac{F}{r^2(1+p^2)^{3/2}} \quad (7.37)$$

l'autre perpendiculaire au plan de l'orbite de Jupiter et égale à

$$\frac{Fp}{r^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

LAGRANGE réduit ensuite les forces perturbatrices du satellite à trois forces uniques. La première, il l'appelle R et elle est parallèle au rayon r ; la seconde est appelée Q et elle est perpendiculaire au rayon vecteur et parallèle au plan de l'orbite de Jupiter, la troisième, nommée P est perpendiculaire à ce même plan. Après une séquence de substitutions qui tiennent compte que les inégalités des mouvements des satellites de Jupiter sont très petites, aussi bien que les inclinaisons de leurs orbites par rapport à l'orbite de Jupiter, LAGRANGE introduit

un coefficient n très petit et des quantités variables x, y, z qui permettent de transformer le rayon vecteur r , l'angle φ décrit par le rayon vecteur r durant le temps t écoulé depuis le commencement du mouvement et la tangente de la latitude du satellite p :

$$\begin{aligned} r &= a(1 + nx) \\ \varphi &= \mu t + ny \\ p &= nz \end{aligned} \quad (7.38)$$

a et μ sont des valeurs moyennes tandis que x, y, z représentent les termes perturbateurs.

En déterminant les quantités X, Y, Z résultant de l'action mutuelle des satellites et en négligeant les termes affectés de $n^2, n^3 \dots$, on peut établir les équations suivantes en vue de déterminer les perturbations des satellites de la planète :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x}{dt^2} + (3\mu^2 - 2f)x + fX + 2\mu fY - n(6\mu^2 - 3f)x^2 \\ &\quad - \frac{3}{2}nfx^2 + 6n\mu fxy - nf^2y^2 \end{aligned} \quad (7.39)$$

$$0 = \frac{dy}{dt} + 2\mu x - fY - 3n\mu x^2 + 2nfxy \quad (7.40)$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \mu^2 z + fZ - 4n\mu^2 zx + 2n\frac{dzdx}{dt^2} + 2n\mu fzy \quad (7.41)$$

μ étant la valeur moyenne de $d\varphi/dt$ et $f = F/a^3$.

Afin de résoudre ce système d'équations établi pour chacun des quatre satellites, il est d'abord nécessaire de faire des substitutions appropriées pour X, Y et Z . À la détermination de R, Q et P , dont dépendent ces quantités, LAGRANGE consacre une analyse à la fois élégante et systématique. Il s'agit pour lui surtout lui de développer les expressions des distances entre les satellites entre eux et de celles de ceux-ci à Jupiter. LAGRANGE convertit l'inverse du cube de la distance entre corps perturbés et corps perturbateurs v^{-3} par factorisation dans des expressions de la forme $(M + Ni)$ et $(M - Ni)$ avec $i = \sqrt{-1}$. Des perturbations dues au Soleil et à la forme non sphérique de Jupiter ensemble avec les interactions des autres satellites sont prises en compte. LAGRANGE dérive alors pour chacun des quatre satellites les valeurs R, Q, P et obtient ensuite les expressions pour X, Y, Z , sous forme de séries trigonométriques avec des arguments $\varphi_2 - \varphi_1 = (\mu_2 - \mu_1)t$, $\varphi_3 - \varphi_1 = (\mu_3 - \mu_1)t$, etc. et de leurs multiples, où les μ_i sont des valeurs moyennes des déplacements des satellites autour de Jupiter. Après avoir remplacé les X, Y, Z dans les équations 7.39 à 7.41, il faut intégrer ces dernières. LAGRANGE se rallie à la méthode de CLAIRAUT des perturbations absolues qui mène à un cycle d'itérations pour les valeurs x, y, z de chaque satellite.

Il néglige d'abord, pour l'intégration des équations 7.39 à 7.42, tous les termes multipliés par n , et convertit les équations 7.39 et 7.41 à la forme suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + M^2u + T = 0 \quad (7.42)$$

où T est une fonction trigonométrique et $u = 1/r$.

L'intégrale de cette équation, comme l'a déjà su la première génération des pratiquants de la mécanique céleste, est :

$$u = G \sin Mt + H \cos Mt + \frac{\cos Mt \int T \sin MT dt - \sin Mt \int T \cos Mt dt}{M} \quad (7.43)$$

ou, si T est exprimé par une série trigonométrique :

$$T = A + B \cos pt + b \sin pt + C \cos qt + c \sin qt \quad (7.44)$$

on aura :

$$\begin{aligned} u = & -\frac{A}{M^2} + \left(H + \frac{A}{M^2} - \frac{B}{p^2 - M^2} - \frac{C}{q^2 - M^2} - \dots \right) \cos Mt \\ & + \left(G - \frac{pb}{M(p^2 - M^2)} - \frac{qc}{M(q^2 - M^2)} - \dots \right) \sin Mt \\ & + \frac{B}{p^2 - M^2} \cos pt + \frac{b}{p^2 - M^2} \sin pt \\ & + \frac{C}{q^2 - M^2} \cos qt + \frac{c}{q^2 - M^2} \sin qt + \dots \end{aligned} \quad (7.45)$$

H et G étant les valeurs de u et de $du/(Mdt)$ lorsque $t = 0$. Il y a une difficulté au cas où p serait égal à M car alors le diviseur $p^2 - M^2$ sera nul. Dans ce cas les termes

$$-\frac{B}{p^2 - M^2} \cos Mt + \frac{B}{p^2 - M^2} \cos pt \quad (7.46)$$

aussi bien que les termes :

$$-\frac{pb}{M(p^2 - M^2)} \sin Mt + \frac{b}{p^2 - M^2} \sin pt \quad (7.47)$$

deviendraient $+\infty$, $-\infty$. En vue de résoudre cette difficulté, LAGRANGE propose, contrairement à CLAIRAUT qui s'était contenté de poser $p \neq M$, de supposer que p ne soit pas tout à fait égal à M , mais qu'il en diffère d'une quantité infiniment petite. Dans ce cas, l'expression 7.46 s'approche de $-\frac{Bt}{2p} \sin Mt$ et 7.47 de $\frac{bt}{2p} \cos Mt$.

LAGRANGE introduit donc des termes séculaires dans la solution de l'équation 7.42. Il montre que la méthode des perturbations mène nécessairement à de tels termes, mais découvre que des termes multipliés par n dans les équations 7.39 et 7.40 et donc par n^2 dans les valeurs pour le rayon vecteur et la longitude moyenne donnent des termes du premier ordre après intégration. Ces expressions sont donc finies.

Ainsi dans l'équation 7.39, il y a un terme qui peut être écrit

$$nA_1x_2 \cos(\mu_2 - \mu_1)t \quad (7.48)$$

avec $A_1 = \text{cte}$. Une première approximation pour x_2 est donnée par :

$$x_2 = ne_2 \cos(M_2t + \omega_2) \quad (7.49)$$

où $M_2t + \omega_2$ est l'anomalie moyenne ; ω_2 sera déterminé par le moyen d'une époque quelconque donnée de l'anomalie moyenne. Les quantités e_2 et ω_2 dépendent entièrement des observations. LAGRANGE montre maintenant que, en utilisant une procédure d'itération dans laquelle il substitue les valeurs x_1, y_1, z_1 , obtenues lors de la première intégration dans les équations différentielles et tenant compte des facteurs $n, M = \mu(1 - \frac{1}{2}n\beta)$ avec $\beta = \text{cte}$, finalement, il obtient au lieu de 7.49, la forme :

$$\frac{1}{2}nA_1e_2 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_2\mu_2 \right)t + \omega_2 \right] \quad (7.50)$$

Après une double intégration l'équation différentielle, 7.50 devient :

$$\frac{\frac{1}{2}nA_1e_2 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_2\mu_2 \right)t - \omega_2 \right]}{(\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_2\mu_2)^2 - (\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_1\mu_1)^2} \cong \frac{A_1e_2 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_2\mu_2 \right)t - \omega_2 \right]}{2\mu_1(\beta_1\mu_1 - \beta_2\mu_2)} \quad (7.51)$$

Le terme 7.51 ne contient plus n et, pour cette raison, est du premier ordre en x_1 qui influence à la fois la variation du premier ordre du rayon vecteur et de l'équation du centre. Une variation similaire peut être déduite pour z_1 influençant la latitude du satellite.

LAGRANGE trouve un terme complètement similaire en x_2 qui peut être substitué pour x_2 dans l'équation différentielle pour x_1 . Il en résulte un résultat de la forme :

$$\frac{ne_1A_1A_2}{4\mu_2(\beta_2\mu_2 - \beta_1\mu_1)} \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{1}{2}n\beta_1\mu_1 \right)t + \omega_1 \right] \quad (7.52)$$

Dans le cas présent $p = M_1$ parce que $M_1 = \mu_1(1 - \frac{1}{2}n\beta_1)$ et il en résultera un terme séculaire proportionnel à t en x_1 . En répétant plusieurs fois les substitutions réciproques, LAGRANGE obtient une série de termes proportionnels à t , respectivement des puissances de t .

Comme résultat final, des calculs du premier ordre pour x_1 , LAGRANGE obtient l'expression :

$$\begin{aligned}
x_1 = & e'_1 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho' \right) t + \omega'_1 \right] + e''_1 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho'' \right) t + \omega''_1 \right] \\
& + e'''_1 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho''' \right) t + \omega'''_1 \right] \\
& + e^{IV}_1 \cos \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho^{IV} \right) t + \omega^{IV}_1 \right]
\end{aligned} \tag{7.53}$$

D'une façon similaire, y_1 devient :

$$\begin{aligned}
y_1 = & -2e'_1 \sin \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho' \right) t + \omega'_1 \right] - 2e''_1 \sin \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho'' \right) t + \omega''_1 \right] \\
& - 2e'''_1 \sin \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho''' \right) t + \omega'''_1 \right] \\
& - 2e^{IV}_1 \sin \left[\left(\mu_1 - \frac{n}{2} \rho^{IV} \right) t + \omega^{IV}_1 \right]
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Chaque suffixe se rapporte à un des quatre satellites qui peuvent être regardés comme l'origine du terme dans lequel ce suffixe apparaît. LAGRANGE conclut : «*Pour peu qu'on examine ces valeurs x et y , on verra aisément qu'elles renferment, pour ainsi dire, quatre équations du centre prises dans des ellipses mobiles dont les excentricités seraient ne' , ne'' , ne''' , ne^{IV} , et les anomalies moyennes*»

$$\begin{array}{cc}
\left(\mu - \frac{n}{2} \rho' \right) t + \omega'_1 & \left(\mu - \frac{n}{2} \rho'' \right) t + \omega''_1 \\
\left(\mu - \frac{n}{2} \rho''' \right) t + \omega'''_1 & \left(\mu - \frac{n}{2} \rho^{IV} \right) t + \omega^{IV}_1
\end{array} \tag{7.55}$$

«*d'où l'on voit que les mouvements de ces anomalies seront au mouvement moyen du satellite comme $1 - \frac{n}{2} \frac{\rho'}{\mu}$, $1 - \frac{n}{2} \frac{\rho''}{\mu}$, $1 - \frac{n}{2} \frac{\rho'''}{\mu}$, $1 - \frac{n}{2} \frac{\rho^{IV}}{\mu}$ à 1; par conséquent les apsides avanceront de*»

$$\frac{n}{2} \frac{\rho'}{\mu} \cdot 360^\circ; \quad \frac{n}{2} \frac{\rho''}{\mu} \cdot 360^\circ; \quad \frac{n}{2} \frac{\rho'''}{\mu} \cdot 360^\circ; \quad \frac{n}{2} \frac{\rho^{IV}}{\mu} \cdot 360^\circ; \tag{7.56}$$

«*à chaque révolution du satellite. On pourrait ... réduire ces quatre équations en une seule, dans laquelle l'excentricité serait variable et le mouvement des apsides non uniforme; mais je crois qu'il est plus commode de les laisser sous leur forme naturelle.*» [357]

Il reste à remarquer que les valeurs $\rho^{(i)}$ sont les racines d'une équation du quatrième ordre que LAGRANGE développe dans ses calculs.

L'équation différentielle correspondant à la coordonnée Z montre que la variation du premier ordre de la tangente de la latitude de chacun des quatre satellites peut être déterminée en imaginant quatre plans passant par le centre de Jupiter, dont le premier se meut sur celui de l'orbite de cette planète, en

gardant toujours avec lui la même inclinaison ; le second se meut de la même manière sur le premier ; le troisième sur le second, et enfin le quatrième, qui sera celui de l'orbite du satellite, se meut pareillement sur le troisième. Dans les relations qu'on peut tirer de ce modèle, les variations séculaires des inclinaisons et des nœuds des quatre satellites sont implicitement comprises.

LAGRANGE révèle à la fin de son mémoire une relation curieuse subsistant entre les mouvements moyens des trois premiers satellites, qui est d'ailleurs confirmée par les tables de WARGENTIN éditées en 1741. Au moment de leurs éclipses, et si μ désigne la longitude moyenne d'un satellite, alors :

$$\mu_1 - 3\mu_2 + 2\mu_3 \cong 180^\circ \quad (7.57)$$

Un peu plus tard, LAPLACE et DELAMBRE démontrèrent que l'inégalité 7.57 est rigoureuse et de la découverte de LAGRANGE résulta toute une théorie des inégalités mutuelles bloquées dans des systèmes stables. LAPLACE a voué une bonne partie de ses travaux de mécanique céleste à cette question [126].

En conclusion aux longs développements de LAGRANGE [357], nous constatons qu'il a réussi à donner les équations différentielles du mouvement des satellites, en ayant égard à leur action naturelle, à l'attraction du Soleil et à l'aplatissement de Jupiter. Il les intègre d'abord en négligeant les excentricités et les inclinaisons des orbites, et il parvient aux inégalités dépendantes des longitudes moyennes et d'où résultent, dans le retour des éclipses des trois premiers satellites, les inégalités dont la période est de 437 jours, résultat déjà découvert par observation de WARGENTIN.

LAGRANGE considère ensuite les inégalités dépendantes des excentricités et des périjoves. Il forme les équations différentielles linéaires et les intègre, et il déduit pour chaque satellite les quatre équations du centre. En appliquant la même analyse aux nœuds et aux inclinaisons, il obtient pour chaque satellite quatre inégalités principales de la latitude. Puisque LAGRANGE avait supposé que l'équateur et le plan de l'orbite coïncidaient, sa théorie ne tenait pas compte de certains termes importants en grandeur absolue [124].

En même temps que LAGRANGE, d'autres astronomes s'occupaient de la théorie des satellites de Jupiter, mais ce fut surtout LAPLACE qui ajouta beaucoup à l'admirable travail de LAGRANGE. Il démontra rigoureusement le théorème que la relation 7.57 reste toujours valable, et il établit ensuite les formules de la libration, et détermina cette libration sur les inégalités à longues périodes. C'est aussi à LAPLACE que l'on doit les inégalités provenant de la réaction mutuelle des inégalités séculaires et de celles dont la période est de 437 jours. Il a donné également les expressions exactes des inégalités des latitudes et celles du mouvement de l'équateur de Jupiter, et montré enfin que les formules de LAGRANGE, pour les inégalités séculaires des nœuds et des périjoves, doivent être complétées par des termes du second ordre qui sont loin d'être négligeables.

Nous avons déjà écrit que notre présentation du développement de la mécanique céleste après EULER restera forcément sélective et sera limitée à la présentation d'un petit nombre de mémoires. Nous laisserons donc de côté les

développements ultérieurs de la théorie des n -corps tout en soulignant que les idées de LAGRANGE sur les satellites de Jupiter, qu'il avait restreintes aux quatre corps découverts déjà par GALILEI, pourraient théoriquement s'appliquer à l'ensemble du système de Jupiter dont on connaît actuellement 16 satellites. En effet, la théorie est assez simple et ne paraît que compliquée par les notations multiples impossibles à éviter. Nous revenons à la question en exposant le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126] de LAPLACE.

-IV-

LE DÉVELOPPEMENT en série trigonométrique d'une puissance des distances mutuelles v des corps dans l'espace fut, dès 1747, une des questions majeures de la mécanique céleste. Nous avons vu que ce fut EULER, qui à partir de cette date avait mis au point une méthode dans son mémoire des inégalités de Jupiter et de Saturne [317] sans laquelle les travaux de LAGRANGE et de LAPLACE n'auraient pas été possibles.

L'introduction des séries trigonométriques fut une des conséquences du nouveau concept de fonction, introduit avec les travaux des BERNOULLI et de EULER lui-même. C'est ce dernier qui introduit la relation :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (7.58)$$

ainsi que les relations entre les fonctions trigonométriques et exponentielles :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \end{aligned} \quad (7.59)$$

et ouvrit ainsi un nouveau champ de recherches : celui des transformations et relations entre fonctions algébriques et transcendantes dans lequel l'idée des séries trigonométriques a pu naître en tant que moyen pour faire une approximation d'une fonction quelconque définie soit par les mathématiques soit par des mesures physiques. FOURIER, au début du XIX^e siècle systématisa l'approche mathématique et l'analyse harmonique est dorénavant reliée à son nom [363].

EULER fut amené à se poser cette question en considérant un problème de perturbations, celui des trois corps, Jupiter, Saturne et le Soleil, ce qu'il fit dans sa pièce de 1748 [317].

En désignant par r et r' les rayons vecteurs des deux planètes et θ l'angle entre eux-ci, il se voit devant l'expression

$$v^{-3} = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.60)$$

qu'il devra intégrer sans disposer d'une formule exacte pour ce calcul. EULER écrivit d'abord 7.60 dans une autre forme :

$$v^{-3} = r'^{-3}(1 + \alpha^2)^{-\frac{3}{2}}(1 - g \cos \theta)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.61)$$

avec $g = 2\alpha/(1 + \alpha^2)$. Son problème se résume alors à développer une approximation rationnelle pour l'expression

$$(1 - g \cos \theta)^{-\frac{3}{2}} \quad (7.62)$$

ou plus généralement pour :

$$(1 - g \cos \theta)^{-s} \quad (7.63)$$

EULER commente la situation en [317] en écrivant :

«Pour profiter de ces équations (i.e. les équations du mouvement des deux planètes), la plus grande difficulté se rencontre dans la formule irrationnelle $(1 - g \cos \omega)^{-\frac{3}{2}}$, laquelle ne se peut résoudre dans une suite convergente vu que la valeur g est environ égale à $\frac{4}{5}$. Cette circonstance m'a fait croire d'abord, qu'il faudrait absolument garder dans le calcul cette formule irrationnelle, ce qui rendrait la solution presque impraticable, vu qu'on serait obligé de trouver les valeurs intégrales par la mesure des aires des lignes courbes, ce qui donnerait une approximation fort pénible et pas trop sûre.» [317]

Nous avons déjà étudié dans un chapitre précédent le développement en série de TAYLOR de l'expression 7.63. EULER obtenait dans le cas du problème de Jupiter et de Saturne une suite :

$$1 + 1.2606 \cos \theta + 1.324 \cos^2 \theta + 1.298 \cos^3 \theta + 1.228 \cos^4 \theta + \dots \quad (7.64)$$

dont la convergence est très lente et qui en outre, est inappropriée à cause des puissances de $\cos \theta$ non intégrables directement. EULER reconduit donc d'abord les expressions des puissances en les transformant en des suites contenant des fonctions trigonométriques des multiples de l'angle θ et il parvient finalement à une expression :

$$(1 - g \cos \theta)^{-s} = A + B \cos \theta + C \cos 2\theta + \dots \quad (7.65)$$

où $A, B, C \dots$ sont des polynômes de puissances de g dont les coefficients dépendent de s .

EULER convient que la série 7.65 n'est pas plus convergente que la série initiale mais il remarque qu'elle est plus facilement intégrable et devient plus convergente après intégration. EULER écrit : «Ce sera donc à l'aide de cette réduction, que je pourrai espérer un aussi heureux succès dans la recherche présente, que dans celle de la Lune» [317]. En effet, dans le cas de la perturbation de la Lune par le Soleil, g est très petit, environ 0.0052, et le développement en série de TAYLOR suffit amplement avec trois ou quatre termes en vue d'atteindre une exactitude suffisante dans les calculs. Or, les difficultés du calcul

des coefficients $A, B, C, D \dots$ reste entier, mais EULER obtient un succès certain en découvrant une formule de récursion entre les premiers et les coefficients suivants. EULER développe à cette fin deux méthodes dont la seconde ressemble à une application des formules que FOURIER introduisit plus tard, tout en les discréditant. Dans la première partie de son mémoire [317], EULER n'arrive pas à utiliser plus que six coefficients, en admettant, il est vrai, que les deux planètes suivent une orbite circulaire.

Dans la suite de son texte, EULER, tout comme nous l'avons déjà vu, tient compte des excentricités respectives des orbites, d'abord en admettant que Saturne suit une orbite excentrique tandis que Jupiter suit un cercle, pour faire ensuite l'hypothèse inverse. Finalement EULER parvient à des expressions contenant

$$(1 - g \cos \theta)^{-\frac{5}{2}} \quad (7.66)$$

qu'il développe en une série de la forme :

$$P + Q \cos \theta + R \cos 2\theta + S \cos 3\theta + \dots \quad (7.67)$$

avec les mêmes méthodes déjà utilisées pour l'expression $(1 - g \cos \theta)^{-3/2}$. Les coefficients C, D, E , etc. sont dérivables des coefficients A et B de la série 7.65 comme le premier D'ALEMBERT l'a démontré en 1754 [235].

LAGRANGE, lui, traitait le problème du développement de l'expression 7.63 dans son mémoire de 1766 centré autour du problème de Jupiter et de Saturne [362]. Il introduit d'abord les rayons vecteurs des deux planètes :

$$r = a(1 + jy) \quad ; \quad r' = a'(1 + jy') \quad (7.68)$$

où a et a' désignent la distance solaire moyenne et y, y' de nouvelles variables avec j une constante très petite. L'expression de la distance entre les deux planètes devient alors :

$$v = (a^2 - 2aa' \cos \theta + a'^2 + 2j(a^2y + a'^2y') - 2jaa'(y + y') \cos \theta)^{\frac{1}{2}} \quad (7.69)$$

et LAGRANGE développe v^{-3} en série de TAYLOR dont il isole la forme irrationnelle :

$$a'^{-2q} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \theta)^{-q} \quad (7.70)$$

et développe la partie entre parenthèses en série après l'avoir factorisée :

$$\begin{aligned} & (1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-q} \\ & = [1 - \alpha(\cos \theta + i \sin \theta)]^{-q} [1 - \alpha(\cos \theta - i \sin \theta)]^{-q} \end{aligned} \quad (7.71)$$

Les séries ainsi obtenues peuvent être séparées en des parties réelles et imaginaires et donnent finalement :

$$(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-q} = P^2 + Q^2 \quad (7.72)$$

où P et Q sont des suites en $\cos n\theta$, respectivement en $\sin n\theta$. Après quelques transformations trigonométriques, LAGRANGE arrive à une expression de la forme :

$$(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-q} = \frac{1}{2}b_q^{(0)} + b_q^{(1)} \cos \theta + b_q^{(2)} \cos 2\theta + \dots \quad (7.73)$$

Dans cette expression, les coefficients $b_q^{(i)}$ dépendent des puissances de α et de coefficients binomiaux de q . L'expression 7.73 pour laquelle nous avons adopté la notation laplacienne, légèrement différente de celle de LAGRANGE, converge plus rapidement que les séries utilisées par EULER, puisque α est beaucoup plus petit que g . LAGRANGE, tout comme EULER, développe des formules de récurrence pour les $b_q^{(i)}$.

Dans un mémoire publié dans les Mémoires de Berlin de 1781, «*Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*» [364], LAGRANGE utilise une méthode nouvelle basée sur la théorie des formes exponentielles complexes : «*Cependant, pour ne rien laisser à désirer dans la Théorie que nous avons entreprise de donner, voici une méthode fort simple et très sûre pour déterminer les valeurs dont il s'agit avec tel degré d'exactitude qu'on voudra.*» [364]

LAGRANGE considère la quantité

$$V = r^2 - 2rr' \cos u + r'^2 \quad (7.74)$$

comme le produit de ces deux-ci :

$$(r - r'e^{u\sqrt{-1}})(r - r'e^{-u\sqrt{-1}}) \quad (7.75)$$

et enlève ensuite chacun de ces binômes à la puissance $-s$. Après quelques calculs algébriques, il trouve pour $1/V^s$ une série de la forme :

$$A + B \cos u + C \cos 2u + \dots \quad (7.76)$$

où A , B , C sont des expressions dépendant de r/r' et de s . Finalement, cette approche permet de calculer les coefficients $b_q^{(i)}$.

LAPLACE s'investit dans le problème à plusieurs reprises. Ainsi dans le mémoire : «*Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde*» [365] publié en 1776, il s'attaque au développement en série de l'inverse du cube de la distance entre la planète perturbée et cette perturbante. LAPLACE exprime la fonction dans la forme :

$$\frac{1}{\nu^3} = \frac{1}{[r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{\left[1 - \frac{2rr' \cos(\varphi' - \varphi)}{r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2}\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.77)$$

où r et r' sont les rayons vecteurs des planètes rapportés sur un plan de référence, ϕ et ϕ' étant les distances moyennes des planètes à leur nœud et s et s' sont les tangentes des latitudes respectives. En introduisant l'abréviation de g pour l'expression :

$$g = \frac{2rr'}{r^2 + r'^2 + (r's' - rs)^2} \quad (7.78)$$

le problème se réduit à la détermination de la série trigonométrique :

$$\begin{aligned} & (1 + i^2)^{-q} (1 - g \cos(\varphi' - \varphi))^{-q} \\ &= b_q^{(0)} + b_q^{(1)} \cos(\varphi' - \varphi) + b_q^{(2)} \cos 2(\varphi' - \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (7.79)$$

i étant le symbole pour le rapport des distances solaires moyennes. À première vue, LAPLACE suit le chemin tracé déjà par EULER, mais il y a une différence fondamentale dans le fait que g n'est plus une constante mais une variable dépendante des excentricités orbitales :

$$g = h + \alpha h' \quad (7.80)$$

ou :

$$h = \frac{2aa'}{a^2 + a'^2} \quad (7.81)$$

et α est une constante de faible valeur. h' est une fonction dépendante de la position orbitale de la planète.

Les coefficients $b_q^{(i)}$ seront maintenant des fonctions de g et chacun de ces coefficients peut être représenté par une série suivant les puissances de α :

$$b = (b) + \alpha h' \left(\frac{\partial b}{\partial g} \right) + \frac{\alpha^2 h'^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 b}{\partial g^2} \right) + \dots \quad (7.82)$$

où les (b) , $\left(\frac{\partial b}{\partial g} \right)$, $\left(\frac{\partial^2 b}{\partial g^2} \right)$... sont les valeurs obtenues en substituant h pour g . En exécutant les calculs algébriques qui s'ensuivent de 7.80 à 7.82, LAPLACE obtient des relations entre les coefficients b et ses dérivées, pour aboutir finalement à des expressions pour les premières dérivées des termes $b_q^{(0)}$ et $b_q^{(1)}$.

Si LAPLACE avait déjà introduit dans un de ses premiers mémoires : «*Recherches sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*» [366], le développement en série de la fonction des distances mutuelles dans une forme simple encore, menant à des séries de multiples du cosinus de l'angle θ , il revient à la question dans son grand mémoire sur la «*Théorie de Jupiter et de Saturne*» [367] que nous allons commenter de façon plus détaillée encore dans un chapitre ultérieur. Dans [367], LAPLACE, en empruntant les développements de LAGRANGE, utilise les symboles à double indice, introduits déjà plus haut, et écrit :

$$(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-s} = \frac{1}{2}b_s^{(0)} + b_s^{(1)} \cos \theta + b_s^{(2)} \cos 2\theta + \dots \quad (7.83)$$

avec $b_s^{(0)}, b_s^{(1)} \dots$ étant des fonctions de s et de α . LAPLACE trouve aussi les formules de récurrence pour les $b_s^{(i)}$ et les différences successives à partir de $b_s^{(0)}$ et $b_s^{(1)}$. Ces deux coefficients sont déterminés par LAPLACE d'après la théorie lagrangienne.

LAPLACE, finalement, fait le point de la question dans son «*Traité de Mécanique Céleste*» [126]. Dans le LIVRE II de ce traité, LAPLACE reprend au paragraphe 49 presque textuellement les développements du mémoire [367] sans pourtant donner une extension à sa théorie. Il revient à celle-ci dans le LIVRE XV et y introduit des expressions intégrales à partir de l'équation aux différences établies au paragraphe 49 de la forme

$$(i - s)\alpha b_s^{(i)} = (i - 1)(1 + \alpha^2)b_s^{(i-1)} - (i + s - 2)\alpha b_s^{(i-2)} \quad (7.84)$$

En intégrant cette équation au moyen d'intégrales définies, il obtient la relation

$$b_s^{(i)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \theta)^{-\frac{s}{2}} \cos i\theta \, d\theta \quad (7.85)$$

qui correspond à la formule déterminant les coefficients d'une série harmonique. LAPLACE, dans [126], calcule la valeur 7.85.

Le développement en série de la fonction de la distance occupera non seulement la première génération des géomètres avec CLAIRAUT, D'ALEMBERT, EULER, LAGRANGE et LAPLACE, mais restera un sujet majeur jusqu'à nos jours avec le calcul des orbites des satellites artificiels. Il serait hors du contexte de la présente exposition de suivre les différentes méthodes mises en œuvre dans les détails. Ceux-ci sont exposés dans la littérature récente, en [368] par exemple. Pourtant, il importe de faire voir les relations existant entre les expressions pour les $b_n^{(i)}$ et les séries hypergéométriques, un des grands points d'intérêt de l'analyse mathématique pendant tout le XIX^e siècle.

En introduisant :

$$(\gamma, i) = \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + i - 1) \quad (\gamma, 0) = 1 \quad (7.86)$$

et :

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1}x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\beta(\beta + 1)}{\gamma(\gamma + 1) \cdot 1 \cdot 2}x^2 \quad (7.87)$$

qui est l'expression de la série hypergéométrique, EULER déduit le premier l'expression :

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \frac{\alpha^i}{(1 + \alpha^2)^{\frac{n}{2} + i}} F\left(\frac{n}{4} + \frac{i}{2}, \frac{n}{4} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2}; i + 1; \frac{4\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}\right) \quad (7.88)$$

et calcula les premiers termes en développant d'abord en puissances de $\cos H$, puis en transformant [317]

$$\cos^i H = \cos iH \cos(i - 2)lt \quad (7.89)$$

Mais D'ALEMBERT aussi avait déjà connaissance de la forme générale des séries 7.88 [235].

J.-L. LAGRANGE trouva dans [357], la formule :

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right)}{(1, i)} \alpha^i F\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} + i, i + 1, \alpha^2\right) \quad (7.90)$$

sans pour autant mentionner explicitement une relation avec la série hypergéométrique, introduite par EULER en 1769 [290]. C.-F. GAUSS, dans son mémoire sur les séries hypergéométriques trouva encore, à côté de plusieurs autres expressions, la série suivante :

$$\frac{1}{2}b_n^{(i)} = \frac{\left(\frac{n}{2}, i\right) \alpha^i}{(1, i)(1 + \alpha)^{n+2i}} F\left(\frac{n}{2} + i, i + \frac{1}{2}, 2i + 1, \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}\right) \quad (7.91)$$

Toutes ces séries sont convergentes si $0 < \alpha < 1$.

L'expression des termes $b_n^{(i)}$ au moyen de la fonction hypergéométrique crée des relations avec les intégrales elliptiques, un autre grand sujet de l'analyse au XIX^e siècle. En introduisant les intégrales elliptiques :

$$F_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \psi}} \quad E_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \psi} d\psi \quad (7.92)$$

on obtient

$$b_1^{(0)} = \frac{4}{\pi} F_1 \quad b_1^{(1)} = \frac{4}{\pi} \frac{F_1 - E_1}{\alpha} \quad (7.93)$$

On se rendra compte que les expressions analytiques, tout en donnant une large compréhension de l'approche théorique, nécessitent un complément de réflexions numériques, ceci afin de parvenir à une détermination pratique de l'expression de la distance, facilement maniable. Comme il a été déjà dit, ce problème continue à occuper les astronomes calculateurs.

-V-

LE PROBLÈME des «*arcs de cercle*» apparaît quand l'intégration des équations d'un mouvement planétaire donne des expressions contenant le temps t à l'extérieur des expressions trigonométriques, ce qui implique qu'un tel terme va s'accroître infiniment en fonction du temps. Une telle solution, utilisable pendant un certain laps de temps limité, s'avère impropre pour le calcul des mouvements des planètes en général.

C'est encore une fois EULER qui reconnut le problème le premier dans son mémoire de 1748 sur Jupiter et Saturne [317]. Dans la cinquième section de ce texte, ayant pour objet : «*La Recherche des inégalités du mouvement de Saturne provenant de l'excentricité de l'orbite de Jupiter*», EULER se retrouve face à un terme :

$$T''eE \sin(\theta - E) \quad (7.94)$$

comme nous l'avons vu dans un chapitre antérieur analysant le mémoire en question. Il parvient à transformer ce terme et à éliminer du rayon vecteur de Saturne et de sa longitude l'arc de cercle en question. Nonobstant, il garde les termes en question dans ses formules. Apparemment parce qu'il croit avoir trouvé ici la raison de l'échec des astronomes en vue de déterminer la période exacte de Saturne et d'en construire des tables exactes. EULER n'est pas trop gêné par les «*arcs de cercle*» en question, mais se concentre davantage sur la détermination du coefficient T'' . Il pense que celui-ci ne peut être connu que par l'observation. A cette fin, il introduit la méthode des «*équations de condition*», méthode qui débauchera plus tard à la méthode des moindres carrés.

LAGRANGE était confronté au problème des «*arcs de cercle*» dans son mémoire sur les inégalités des satellites de Jupiter [357] que nous avons présenté dans un chapitre antérieur. Il est certain qu'à la rédaction de son mémoire, LAGRANGE ne connaissait pas encore le travail d'EULER sur les deux planètes géantes. LAGRANGE, en introduisant des expressions contenant de petites quantités perturbatrices par rapport au mouvement moyen de la planète, obtient un système d'équations différentielles pour ces quantités donné plus haut : 7.39 à 7.41. Les solutions de ces équations mènent à des expressions contenant des «*arcs de cercle*». Ainsi le rayon vecteur contient un terme :

$$-\frac{i\varepsilon K K' t \sin(Mt + \omega)}{8h'(\beta'h' - \beta h)M} \quad (7.95)$$

L'intégration de ce terme donne une expression proportionnelle au carré du temps en longitude. Et le processus continue en tenant compte de plus de termes. La même situation apparaît pour le cas de la latitude : ici aussi apparaissent des «*arcs de cercle*» dans le cas de la résolution usuelle par approximations successives. Et LAGRANGE de se demander si de telles solutions ne

peuvent pas être transformées en expressions finies. Dans le cas contraire, les départs des orbites de la circularité, et les différences entre mouvements moyens et mouvements vrais, deviendront de plus en plus marquants, rendant impossibles les prévisions. LAGRANGE n'y croit pas et développe une méthode afin d'éliminer ces «*arcs de cercle*». Après des développements algébriques très longs, LAGRANGE arriva à réduire ces expressions en deux équations du centre, deux excentricités, deux aphélies et deux anomalies moyennes qui, en les additionnant, donnent les équations observables du centre, de l'excentricité, de l'aphélie et de l'anomalie moyenne. D'après LAGRANGE, les deux termes peuvent être réduits en un seul dans lequel l'excentricité est variable et le mouvement des apsides est non uniforme. Mais il remarque dans [357] «*qu'il est plus commode de les laisser sous leur forme naturelle*».

Un développement complètement analogue en ce qui concerne l'inclinaison de l'orbite et le mouvement des nœuds mène à un résultat similaire à celui trouvé pour les longitudes. En effet, LAGRANGE trouve deux inclinaisons, la première d'un plan, mesurée par rapport au plan de référence, la seconde qui est celle du plan orbital par rapport au premier. Celui-ci est en rotation uniforme par rapport au plan de référence tout en gardant une inclinaison constante par rapport au premier. Le deuxième plan a un mouvement de rotation similaire. Telle est la solution, proposée par LAGRANGE, du problème mathématique des «*arcs de cercle*». Il a montré qu'en ne tenant compte que des approximations linéaires de l'excentricité et de l'inclinaison, les «*arcs de cercle*» n'entrent pas dans le mouvement autour du Soleil d'une planète perturbée par l'action d'une seconde planète. Mais l'action de celle-ci peut être exprimée par une double excentricité et une double inclinaison. Ce nombre augmente proportionnellement au nombre des planètes à considérer. Néanmoins, dans le cas où l'équation algébrique en $m = hv$, où h est la vitesse moyenne longitudinale, donne des solutions égales, alors apparaissent de nouveau des termes proportionnels au temps. LAGRANGE arrive à réduire aussi ce cas en une forme définie et il est personnellement convaincu d'avoir fait un progrès notable. Ainsi, il écrit à D'ALEMBERT le 6 septembre 1765 [369] : «*J'ai envoyé à M. DE FOUCHY, il y a environ un mois une pièce pour le prix de l'année prochaine ... Quoiqu'elle n'ait guère d'autre mérite que de m'avoir coûté beaucoup de travail, je souhaiterais que vous voulussiez bien jeter un coup d'oeil sur les pages 2 et 3 du chapitre IV. Ce que j'y dis touchant l'équation du centre et la latitude des satellites me paraît entièrement nouveau et d'une très grande importance dans la théorie des planètes, et je suis maintenant prêt à en faire application à Saturne et Jupiter*». LAGRANGE se réfère à la méthode exposée dans son mémoire. [357]

LAPLACE, lui, attaquait le même problème d'une nouvelle façon. Déjà dans son premier mémoire de mécanique céleste : «*Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*» [366] écrit en 1773, il s'attaque au problème des «*arcs de cercle*» causant les inégalités séculaires des planètes. Il reprend plus spécialement cette question à la fin de sa pièce : «*Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes*» [370] écrit en 1774 où il dit : «*Je*

ferai usage d'une nouvelle méthode d'approximation à laquelle les recherches précédentes m'ont conduit, et qui est générale et surtout fort simple, quel que soit le nombre des variables ; c'est principalement sous ce dernier rapport qu'elle peut avoir quelque avantage sur les méthodes déjà connues, qui mènent à des calculs impraticables, lorsque le nombre des variables est indéfini ; elle consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées, et à faire disparaître par ce moyen les arcs de cercle, lorsque cela est possible. Cette manière de faire ainsi varier les constantes arbitraires est, si je ne me trompe, absolument nouvelle et d'une grande fécondité dans l'Analyse ... » [370]

LAPLACE reprend, avec plus d'ampleur encore, le même sujet dans son texte : « *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du Monde* » [365]. Nous allons expliciter sa méthode à travers des exemples qu'il présente dans sa pièce également écrite en 1774.

Il introduit ce mémoire par l'explication de sa méthode : « *C'est principalement dans l'application de l'Analyse au système du monde que l'on a besoin de méthodes simples et convergentes, pour intégrer par approximation les équations différentielles ; celles du mouvement des corps célestes se présentent, en effet, sous une forme si compliquée qu'elles ne laissent aucun espoir de réussir jamais à les intégrer rigoureusement ; mais, comme les valeurs des variables sont à peu près connues, on imagine substituer à leur place les quantités connues dont elles diffèrent toujours fort peu, plus une très petite quantité ; et, en négligeant le carré et les puissances supérieures de cette nouvelle indéterminée, on réduit le problème à l'intégration d'autant d'équations différentielles linéaires qu'il y avait de variables ...* » [365]. LAPLACE poursuit en se référant à la méthode de LAGRANGE pour l'élimination des « arcs de cercle » : « *M. de LAGRANGE est le premier qui ait senti et résolu cette difficulté par une analyse sublime dans son excellente pièce sur les inégalités des satellites de Jupiter, et dans le Tome III des « Mémoires de Turin », MM. D'ALEMBERT et DE CONDORCET ont depuis donné des méthodes fort ingénieuses pour le même objet ; celle que je propose ici est, si je ne me trompe, absolument nouvelle et d'ailleurs très utile, lorsque les variables sont fonctions de quantités périodiques et d'autres quantités croissant très lentement, ce qui est le cas de toutes les questions relatives à l'Astronomie physique. Elle consiste à faire varier les constantes arbitraires dans les intégrales approchées, et à trouver ensuite par l'intégration leurs valeurs pour un temps quelconque. Cette méthode conduit à des équations fort simples et très faciles à intégrer, quel que soit le nombre des variables, et c'est là un de ses principaux avantages ...* » [365]

LAPLACE traite alors plusieurs exemples d'équations non linéaires du deuxième ordre, contenant des termes trigonométriques et expose à la suite un cas plus général sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y - l + \alpha y^2 = 0 \quad (7.96)$$

qu'il se propose d'intégrer jusqu'aux quantités de l'ordre α^2 inclusivement. Il fait :

$$y = z + \alpha z' + \alpha^2 z'' \quad (7.97)$$

En substituant 7.97 dans l'équation différentielle 7.96 et en comparant séparément les termes dépendant de α , il obtient les trois équations suivantes :

$$0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + z - l \quad (7.98)$$

$$0 = \frac{d^2 z'}{dt^2} + z' + z^2 \quad (7.99)$$

$$0 = \frac{d^2 z''}{dt^2} + z'' + 2zz' \quad (7.100)$$

et trouve, en les intégrant :

$$z = l + p \sin t + q \cos t \quad (7.101)$$

$$\begin{aligned} z' = & -\frac{1}{2}(2l^2 + p^2 + q^2) - lqt \sin t + lpt \cos t \\ & + \frac{q^2 - p^2}{6} \cos 2t + \frac{pq}{3} \sin 2t \end{aligned} \quad (7.102)$$

$$\begin{aligned} z'' = & l(2l^2 + p^2 + q^2) \\ & + \sin t \left[\frac{1}{12}qt(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) - \frac{1}{2}pl^2t^2 \right] \\ & - \cos t \left[\frac{1}{12}pt(18l^2 + 5p^2 + 5q^2) + \frac{1}{2}ql^2t^2 \right] \\ & + \sin 2t \left(\frac{2pql}{3} - l\frac{p^2 - q^2}{3}t \right) + \cos 2t \left(l\frac{p^2 - q^2}{3} + \frac{2pql}{3}t \right) \\ & + p\frac{3q^2 - p^2}{48} \sin 3t + q\frac{q^2 - 3p^2}{48} \cos 3t \end{aligned} \quad (7.103)$$

LAPLACE introduit alors 7.101 à 7.103 dans 7.97 et obtient une expression, avec p et q comme étant des constantes arbitraires, de y et $\frac{dy}{dt}$. Il remplace après dans l'équation 7.96 t par $(T + t)$ et obtient alors, en intégrant, une expression pour y , contenant deux nouvelles constantes arbitraires ${}^1p$ et ${}^1q$. Il est possible d'exprimer ${}^1p$ et ${}^1q$ en fonction de p , q , α , T et t par deux équations algébriques. LAPLACE développe alors en série ${}^1p$ et ${}^1q$ sous la forme :

$${}^1p = p + T\frac{dp}{dT} + \frac{T^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2p}{dT^2} + \dots \quad (7.104)$$

$${}^1q = q + T\frac{dq}{dT} + \frac{T^2}{1 \cdot 2}\frac{d^2q}{dT^2} + \dots \quad (7.105)$$

et substitue ces valeurs dans les équations 7.101 à 7.103. Après quelques transformations algébriques, on trouve les expressions suivantes pour p et q qui varient en fonction du temps :

$$p = e \cos \left\{ x \left[1 - \frac{\alpha(18l^2 + 5e^2)}{12l} \right] + \theta \right\} \quad (7.106)$$

$$q = e \sin \left\{ x \left[1 - \frac{\alpha(18l^2 + 5e^2)}{12l} \right] + \theta \right\} \quad (7.107)$$

e et θ étant des constantes arbitraires dépendant de p et q .

Finalement LAPLACE trouve la solution de l'équation différentielle 7.96 sous la forme :

$$\begin{aligned} y = & l - \alpha \left(\frac{1}{2} - \alpha l \right) (2l^2 + e^2) + e \sin \left[T \left(1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + \theta \right] \\ & - \frac{\alpha e^2}{6} (1 - 2\alpha l) \cos \left[2T \left(1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + 2\theta \right] \\ & - \frac{\alpha^2 e^3}{48} \sin \left[3T \left(1 + \alpha l - \frac{3}{2} \alpha^2 l^2 - \frac{5}{12} \alpha^2 e^2 \right) + 3\theta \right] \end{aligned} \quad (7.108)$$

c'est, aux quantités près de l'ordre α^3 , l'expression de y après le temps quelconque T .

Dans la suite du texte, LAPLACE considère des cas plus compliqués tels qu'ils sont rencontrés en astronomie et où les constantes p et q sont des éléments orbitaux qui sont interdépendants dans le cas de présence de plusieurs planètes. Nous rencontrons ici encore une fois les intérêts communs des deux savants LAPLACE et LAGRANGE. En effet, ce fut ce dernier qui montrait comment réduire cette interdépendance à un système d'équations linéaires dans son mémoire : «*Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes*» [371]. Il est difficilement retraceable comment LAGRANGE influença LAPLACE, par ce mémoire connu par lui, quoique ce dernier semblât surtout se soucier des «*arcs de cercle*» apparaissant dans différents types d'équations différentielles non linéaires. En effet, il arriva à la conclusion que ceux-ci peuvent être interprétés comme un changement lent des constantes d'intégration. L'application à l'astronomie de cette idée était évidente. Si à court terme, les lois de KEPLER décrivent d'une façon satisfaisante l'orbite d'une planète gravitant autour du Soleil, il faut faire varier les éléments orbitaux, faire tourner les axes de l'ellipse et changer l'excentricité de celle-ci dans le cas de précisions à plus long terme. C'est cela l'idée de la méthode des perturbations et LAPLACE, par sa méthode d'obtenir des solutions approximatives des équations différentielles sous-jacentes, était certain d'avoir mis à disposition l'outil adéquat. Or LAGRANGE était loin d'être satisfait de l'approche formaliste laplacienne, et il cherchait à délimiter le champ d'application de cette dernière. En effet, il se méfiait des paradoxes de la méthode infinitésimale, qui ne furent résolus qu'au XIX^e siècle.

-VI-

SI LE PROBLÈME des «*arcs de cercle*» était, avant tout, une question mathématique, la présence des inégalités séculaires dans les mouvements des planètes se rapportait directement à la question fondamentale que se posaient EULER, LAGRANGE et LAPLACE : la stabilité du système solaire en tant que système à n -corps.

EULER fut le premier à se poser la question quant à la nature de ses inégalités dans son mémoire sur les irrégularités du mouvement de Jupiter et de Saturne de 1748 [317]. Et le problème resta à l'ordre du jour jusqu'à la fin du XVIII^e siècle et généra une grande partie des travaux de LAPLACE et LAGRANGE sur la théorie des perturbations. Les approches des trois savants étaient différentes et furent de plus accompagnées d'autres résultats obtenus par divers géomètres contemporains. Vu l'ampleur de la théorie, nous allons nous limiter à certains écrits exemplaires qui montrent au mieux les résultats des recherches qui formeront les bases de la mécanique céleste classique.

LAPLACE, dans son premier mémoire traitant de mécanique céleste, et écrit en 1771 dans sa 24^e année, intitulé : «*Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*» [366], expose l'état de la question : «*En considérant les masses des planètes comme étant extrêmement petites par rapport à celle du Soleil, leur action serait insensible dans l'intervalle d'un petit nombre de révolutions, et chacune d'elles décrirait à chaque révolution une orbite elliptique autour du Soleil. Après un temps considérable, l'action réciproque des planètes pourrait devenir sensible ; mais comme après ce temps, elles décriraient encore à très peu près une ellipse à chaque révolution, cette action ne pourrait se manifester que par les changements qu'elle occasionnerait à la longue dans les éléments des orbites, c'est-à-dire dans la position des nœuds et de la ligne des apsides, dans l'excentricité, l'inclinaison et surtout les moyens mouvements. Ces inégalités sont, par conséquent, les plus considérables de toutes, et celles dont il importe le plus de fixer la valeur par la théorie.*» [366]

Il continue par une présentation historique et compare son approche à celles d'EULER et de LAGRANGE : «*Parmi ces inégalités, la plus essentielle à considérer est celle des moyens mouvements ; elle ne paraît pas, cependant, avoir été déterminée avec toute la précision qu'exige son importance. M. EULER dans sa seconde pièce sur les irrégularités de Jupiter et de Saturne, la trouve égale pour l'une ou l'autre de ces planètes. Suivant M. de LAGRANGE, au contraire, dans le troisième volume des Mémoires de Turin [362], elle est fort différente pour ces deux corps. Ayant recherché la raison d'une disparité aussi frappante entre les résultats de ces deux illustres géomètres, il m'a paru qu'ils n'avaient point fait entrer en considération plusieurs termes aussi sensibles que ceux auxquels ils ont eu égard. M. de LAGRANGE semble à la vérité avoir porté plus loin la*

précision que M. EULER : j'ai lieu à croire, cependant, que la formule n'est pas encore exacte. Celle à laquelle je parviens est fort différente.» [366]. Ici LAPLACE interrompt son exposition par une note où il dit que, après avoir lu son mémoire à l'Académie, il a constaté que la valeur de cette inégalité est identiquement nulle. Ensuite il poursuit : «Ce peu d'accord m'avait fait soupçonner que je pouvais m'être trompé ; mais, ayant recommencé plusieurs fois mes calculs, je suis parvenu aux mêmes résultats ; je m'y suis conformé d'ailleurs, en examinant avec attention la solution de M. de LAGRANGE ; car cet illustre géomètre néglige dans les équations différentielles les sinus et les cosinus de très petits angles, à cause de l'extrême petitesse de leurs coefficients ; mais ces coefficients deviennent fort grands par l'intégration, et produisent, dans les moyens mouvements, une équation séculaire comparable à celle à laquelle il parvient» [366]. La méthode de LAPLACE est différente et orientée vers des résultats directs : «... quoique les formules auxquelles je parviens renferment des termes proportionnels au temps et au carré du temps, je ne prétends pas, cependant, que ces termes se rencontrent dans l'expression rigoureuse du mouvement des planètes ; il peut arriver, en effet, qu'ils soient produits par le développement des sinus et cosinus de très petits angles, en séries ; mon objet ici n'est point d'entrer dans cette discussion, très intéressante du côté de l'Analyse, mais qui devient inutile pour tout le temps durant lequel l'Astronomie a été cultivée» [366].

En introduisant r comme rayon vecteur de la planète p , φ sa longitude, s la tangente de sa latitude, et en supposant que p n'est pas seulement attiré par le Soleil S mais aussi par la planète p' dont la position est donnée par les coordonnées r' , φ' , s' avec v désignant la distance entre p et p' ; LAPLACE établit les équations du mouvement :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r^2} \left\{ c - \int p' r dt \sin(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\nu^3} \right] \right\} \quad (7.109)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{r^3} \left\{ c - \int p' r dt \sin(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\nu^3} \right] \right\}^2 \\ & + \frac{s+p}{r^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{p'r}{\nu^3} \\ & + p' \cos(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\nu^3} \right] \end{aligned} \quad (7.110)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{2dsdr}{r dt^2} + \frac{s}{r^4} \left\{ c - \int p' r dt \sin(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\nu^3} \right] \right\}^2 \\ & + \frac{p'}{r} \left\{ s' - s \cos(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{\nu^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.111)$$

Des équations différentielles analogues ont été déduites par LAGRANGE dans [362].

À partir des expressions 7.109 à 7.111, LAPLACE se concentre à son seul but, qui est la détermination des variations séculaires de l'équation du centre, de la ligne des apsides et du mouvement moyen des planètes. Il considère les masses de celles-ci comme étant infiniment petites par rapport à celle du Soleil et il écrit :

$$p = \delta m \qquad p' = \delta m' \qquad (7.112)$$

où δ désigne une différence infiniment petite. Ces nouvelles désignations serviront à linéariser les équations du mouvement. En admettant alors que les orbites des planètes sont fort peu inclinées les unes par rapport aux autres, et qu'elles ont fort peu d'excentricité, s étant infiniment petit et s^2 devenant négligeable, LAPLACE admet qu'aussi bien l'inclinaison que l'excentricité sont de l'ordre d'une quantité petite α et il se propose de pousser sa précision jusqu'aux quantités de l'ordre $\alpha^2 \delta m'$ inclusivement.

Si les quantités contenant le facteur $\delta m'$ sont négligées, les équations 7.109 et 7.110 deviennent :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \qquad (7.113)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{c^2}{r^3} + \frac{s + \delta m}{r^2} = 0 \qquad (7.114)$$

Les intégrales de ces équations deviennent :

$$\varphi = nt + A' - 2\alpha e \sin(nt + \varepsilon) + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 \sin 2(nt + \varepsilon) + \dots \qquad (7.115)$$

$$r = a \left[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} + \alpha e \cos(nt + \varepsilon) - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cos 2(nt + \varepsilon) + \dots \right] \qquad (7.116)$$

Ces équations sont celles d'une ellipse dont a est le demi-grand axe et $\alpha e a$, l'excentricité ; A' exprime la distance moyenne de la planète à une ligne fixe lorsque $t = 0$ et ε la quantité dont elle est plus avancée que son aphélie à cet instant. Ces valeurs de r et φ sont exactes lorsque $\delta m' = 0$; mais, lorsqu'il n'est pas nul, il faut différencier les équations 7.113 et 7.114 par rapport à γ , et leur ajouter les termes affectés de $\delta m'$ dans les équations 7.109 et 7.110. LAPLACE obtient ainsi :

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = -\frac{2c}{r^3}\delta r - \frac{\delta m'}{r^2} \int r dt \sin(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3} \right] \quad (7.117)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{3c^2}{r^4}\delta r - \frac{2(s+m)}{r^3}\delta r \\ &+ \frac{2c\delta m'}{r^3} \int r dt \sin(\varphi - \varphi') \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r}{v} \right] \\ &+ \frac{\delta m'r}{v^3} + \delta m' \cos(\varphi' - \varphi) \left[\frac{1}{r'^2(1+s'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r'}{v^3} \right] \end{aligned} \quad (7.118)$$

Dans ces équations, les termes contenant explicitement $\delta m'$, sont à remplacer par des expressions dépendant des coefficients indéterminés A, B, C, D et contenant des termes qui contribuent aux variations séculaires jusqu'au degré d'approximation dont LAPLACE veut tenir compte, c'est-à-dire, des termes proportionnels à t et aux fonctions trigonométriques de $(nt + \varepsilon)$. Ainsi les trois derniers termes de 7.118 sont remplacés par :

$$a \frac{\delta m'}{a^3} A + \alpha^2 a \frac{\delta m'}{a^3} B n t + \alpha a \frac{\delta m'}{a^3} C \cos(nt + \varepsilon) + \alpha a \frac{\delta m'}{a^3} D \sin(nt + \varepsilon) \quad (7.119)$$

et le dernier terme de 7.117 est posé égal à :

$$-\alpha^2 \frac{\delta m'}{a^3} \frac{a^2}{2c} B n t \quad (7.120)$$

Par la suite, LAPLACE fait les substitutions suivantes :

$$\frac{(S + \delta m)}{a^3} = n^2 \quad : 3^e \text{ loi de Kepler} \quad (7.121)$$

$$\frac{c}{a^2} = n \quad (7.122)$$

expression exacte jusqu'à l'ordre de α^2 . Et :

$$\frac{\delta m^2}{a^3} = \mu^2 \delta \mu' \quad (7.123)$$

qui est la raison de la masse de la planète perturbatrice à celle du Soleil, parce que :

$$\begin{aligned} a^3 n^2 &= S \\ \delta \mu' &= \frac{\delta m'}{S} \end{aligned} \quad (7.124)$$

Par le remplacement de ces termes dans les équations 7.117 et 7.118, celles-ci deviennent :

$$\frac{d\delta\varphi}{dt} = -\frac{2c}{r^3}\delta r - \frac{\alpha^2\delta\mu'}{2}Bn^2t \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{d^2\delta r}{dt^2} + \frac{3c^2}{r^4}\delta r - \frac{2(S+\delta m)}{r^3}\delta r + a\delta\mu'n^2A + \alpha a\delta\mu'n^2C \cos(nt + \varepsilon) \\ & + \alpha a\delta\mu'n^2D \sin(nt + \varepsilon) + \alpha^2aB\delta\mu'n^3t \end{aligned} \quad (7.126)$$

LAPLACE pose alors les solutions dans la forme :

$$\delta\varphi = \delta\mu'gnt + \alpha^2\delta\mu'h n^2t^2 \quad (7.127)$$

$$\delta r = a\delta\mu' \left[l + \alpha pnt \cos(nt + \varepsilon) + \alpha qnt \sin(nt + \varepsilon) + \alpha^2 knt \right] \quad (7.128)$$

En substituant ces valeurs de $\delta\varphi$ et δr dans les équations 7.125 et 7.126 et en comparant les termes homologues, LAPLACE parvient aux expressions

$$\varphi = nt + A' + 2A\delta\mu'nt + \alpha^2\delta\mu'\frac{3}{4}(B - eD)n^2t^2 + \dots \quad (7.129)$$

$$\begin{aligned} r = & a \left\{ 1 + \alpha \left(e + \frac{1}{2}\delta\mu'Dnt \right) \right. \\ & \left. \cos \left[nt \left(1 + 3A\delta\mu' + \frac{C}{2e}\delta\mu' \right) + \varepsilon \right] t \right\} \end{aligned} \quad (7.130)$$

En nommant i le nombre des révolutions de la planète p depuis une époque donnée, l'accroissement de l'équation du centre sera :

$$\alpha D\delta\mu' \cdot i \cdot 360^\circ \quad (7.131)$$

Le mouvement de l'apogée, suivant l'ordre des signes sera :

$$-\delta\mu' \cdot i \cdot 360^\circ \left(3A + \frac{C}{2e} \right) \quad (7.132)$$

Enfin l'accélération du mouvement moyen sera

$$\frac{3}{2}\alpha^2\delta\mu'\frac{355}{113}(B - eD)i^2 \cdot 360^\circ \quad (7.133)$$

Le pas final de ces calculs consiste dans la détermination des expressions A , B , C , D avec toute l'exactitude possible. En introduisant le développement de la distance entre les deux planètes ainsi que leurs exposants respectifs, comme nous l'avons exposé dans un chapitre antérieur, LAPLACE trouve l'accroissement de l'équation du centre :

$$\alpha e' \delta \mu' \sin Vi \cdot 360^\circ \cdot \left[b_1 + \frac{3}{2}z \left(b' + \frac{b'_z}{2} - 3b + \frac{bz}{2} \right) - \frac{3}{8}z^2(9b'_1 - b'_3) + \frac{3}{2}z^3(3b' - \frac{1}{2}b'_z) \right] \quad (7.134)$$

En désignant cette quantité par X, on trouve le mouvement de l'apogée suivant l'ordre des signes :

$$-\delta \mu' i \cdot 360^\circ \left[\frac{3}{2}(b - b') + \frac{z}{2}(3b'_1 - b_1) - \frac{3}{4}z^2(b' + \frac{1}{2}b'_2) \right] - \frac{X}{2\alpha e \tan V} \quad (7.135)$$

L'accélération du mouvement moyen devient :

$$\begin{aligned} & -\frac{3195}{452} \alpha e \alpha e' \delta \mu' z \sin Vi^2 \cdot 360^\circ \\ & \cdot \left\{ 3 \left[b - b' + \frac{1}{2}(b'_2 - b_z) \right] + \frac{z}{4} \left[7(b'_1 - b'_3) - 5(b'_1 - b'_3) \right] \right. \\ & \left. - z^2 \left[3(b' - \frac{b'_z}{2} - \frac{5}{4}(5b'' - 2b''_2 - \frac{1}{2}b''_4)) \right] - \frac{5}{4}z^3(b'_1 - b'_3) \right\} - \frac{3}{2} \frac{355}{113} \alpha e i X \end{aligned} \quad (7.136)$$

où $b, b_1, b_2, b_3 \dots b', b'_1 \dots b'', b''_1 \dots$ sont les coefficients détaillés suivant les formules déduites dans un chapitre antérieur.

En appliquant ces formules à Jupiter et Saturne, LAPLACE arrive aux mêmes formules que celles obtenues par LAGRANGE à l'exception de l'expression pour l'accélération du mouvement moyen. L'application numérique aux deux planètes montre à LAPLACE que l'accélération du mouvement moyen considérée jusqu'à l'ordre $\alpha^2 \delta \mu'$ devient identiquement égale à zéro. Il conclut que la retardation séculaire de Saturne donnée par l'observation ainsi que l'accélération de Jupiter doivent être dues à d'autres causes que la gravitation mutuelle. Il suggère comme cause un effet des comètes.

Dans un mémoire écrit en 1774 : «*Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites des planètes*» [371], LAGRANGE expose une nouvelle théorie de ces mouvements et, pour un nombre quelconque de planètes, il réduit le problème de la détermination de ces variations à celui d'un système d'équations différentielles du premier ordre, le nombre de ces équations étant égal au nombre des inconnues.

Comme dans son mémoire sur les trois corps, LAGRANGE introduit un système rectangulaire de coordonnées x, y, z qui déterminent à chaque instant la position du corps par rapport à un plan fixe quelconque. Puis il suppose que toutes les forces qui agissent sur le corps sont décomposées suivant les directions des lignes x, y, z et sont réduites à ces trois X, Y, Z . Les équations suivantes deviennent alors le point de départ pour la détermination des mouvements

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -X \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -Y \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -Z \quad (7.137)$$

Après quelques développements intermédiaires, LAGRANGE obtient trois quantités

$$P = \int (Yz - Zy) dt = \frac{ydz - zdy}{dt} \quad (7.138)$$

$$Q = \int (Xz - Zx) dt = \frac{xdz - zdx}{dt} \quad (7.139)$$

$$R = \int (Xy - Yx) dt = \frac{xdy - ydx}{dt} \quad (7.140)$$

De 7.138 à 7.140, il suit que

$$Px - Qy + Rz = 0 \quad (7.141)$$

Dans le cas où P , Q , R sont des constantes ou ont au moins des rapports constants entre eux, l'équation 7.141 représente un plan passant par l'origine des coordonnées. L'intersection de ce plan avec le plan (x, y) qui donne la ligne des nœuds, fait avec l'axe des x un angle dont la tangente P/Q . La tangente de l'inclinaison par rapport au plan (xy) est égale à

$$\frac{(P^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \quad (7.142)$$

Si maintenant, les P , Q et R sont variables, la relation 7.141 existe toujours, avec la différence que le plan n'est plus fixe mais représente le plan dans lequel le corps se meut à l'instant où il décrit un espace infiniment petit. La position du plan changera d'un instant à l'autre à cause de la variabilité des quantités P/R et Q/R .

LAGRANGE nomme alors ω l'angle de la ligne des nœuds avec l'axe des abscisses x , et θ la tangente de l'inclinaison du plan de l'orbite avec celui des coordonnées x et y ; on aura donc :

$$\theta \sin \omega = \frac{P}{R} \quad \theta \cos \omega = \frac{Q}{R} \quad (7.143)$$

LAGRANGE pose 7.144

$$S = \frac{P}{R} \quad u = \frac{Q}{R} \quad (7.144)$$

Par cette transformation, il parvient à des équations plus simples que celles qu'il aurait obtenues pour θ et μ . Des équations 7.138 à 7.140, il obtient :

$$R \frac{dS}{dt} + \frac{dR}{dt} S = Yz - Zy \quad (7.145)$$

$$R \frac{du}{dt} + \frac{dR}{dt} u = Xz - Zx \quad (7.146)$$

avec S et u comme inconnues.

En substituant dans 7.145, 7.146 et en introduisant des coordonnées polaires : $x = r \cos q$, $y = r \sin q$, z devient :

$$Z = ru \sin q - rS \cos q \quad (7.147)$$

$$R = r^2 \frac{dq}{dt} \quad (7.148)$$

Pour évaluer X, Y, Z , LAGRANGE développe en série l'expression de l'inverse du cube des distances des différentes planètes T à Ti :

$$(r, r_i) + (r, r_i)_1 \cos(q - q_i) + (r, r_i)_2 \cos 2(q - q_i) + \dots \quad (7.149)$$

Dans une première approximation, suffisante pour les besoins de LAGRANGE, les orbites sont considérées comme étant circulaires et les mouvements moyens comme étant uniformes. Dans ce cas $r, r_1 \dots$ deviennent des constantes et $q = u^t, q_1 = u_1^t$, etc. avec $u, u_1, u_2 \dots$ également des constantes. En plus $R = ur^2, R_1 = u_1 r_1^2$, etc., sont également des constantes. Les masses des planètes sont T, T_1, T_2 , etc. LAGRANGE introduit alors les abréviations

$$\begin{aligned} (0, 1) &= \frac{T_1 r_1 (r, r_1)_1}{4ur} & (0, 2) &= \frac{T_2 r_2 (r, r_2)_1}{4ur} \\ (1, 0) &= \frac{Tr(r_1, r)_1}{4u_1 r_1} & (1, 2) &= \frac{T_2 r_2 (r_1, r_2)_1}{4u_1 r_1} \\ (2, 0) &= \frac{Tr(r_2, r)_1}{4u_2 r_2} & (2, 1) &= \frac{T_1 r_1 (r_2, r_1)_1}{4u_2 r_2} \end{aligned} \quad (7.150)$$

et ainsi de suite.

Si maintenant dans les équations 7.145 et 7.146 on néglige tous les termes trigonométriques et seuls ceux où les coefficients u et s sont des constantes sont retenus, puisque ce sont uniquement ceux-là qui contribuent aux variations séculaires, les autres provoquant seulement des oscillations à court terme, l'on obtient les équations

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ds}{dt} + (0, 1)(u - u_1) + (0, 2)(u - u_2) + \dots \\ 0 &= \frac{du}{dt} - (0, 1)(s - s_1) - (0, 2)(s - s_2) - \dots \\ 0 &= \frac{ds_1}{dt} + (1, 0)(u_1 - u) + (1, 2)(u_1 - u_2) + \dots \end{aligned} \quad (7.151)$$

LAGRANGE conclut : « C'est par l'intégration de ces équations qu'on pourra parvenir à une seule solution exacte du Problème qui concerne le mouvement des nœuds et la variation des inclinaisons des orbites de plusieurs planètes $T, T_1, T_2 \dots$, en vertu de leurs attractions mutuelles » [371].

Il s'agit donc d'intégrer les équations 7.151 et l'on voit aisément que ces équations sont remplies par les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
 S &= A \sin(at + \alpha) \\
 S_1 &= A_1 \sin(at + \alpha) \\
 S_2 &= A_2 \sin(at + \alpha) \\
 u &= A \cos(at + \alpha) \\
 u_1 &= A_1 \cos(at + \alpha) \\
 u_2 &= A_2 \cos(at + \alpha)
 \end{aligned} \tag{7.152}$$

où $a, \alpha, A, A_1, A_2 \dots$ sont des coefficients indéterminés. Le remplacement de 7.152 dans 7.151 donne :

$$\begin{aligned}
 0 &= aA + (0,1)(A - A_1) + (0,2)(A - A_2) + \dots \\
 0 &= aA_1 + (1,0)(A_1 - A) + (1,2)(A_1 - A_2) + \dots \\
 0 &= aA_2 + (2,0)(A_2 - A) + (2,1)(A_2 - A_1) + \dots
 \end{aligned} \tag{7.153}$$

Le nombre de ces équations est égal au nombre n des constantes $A, A_1, A_2 \dots$. Voilà pourquoi il est possible d'éliminer ces constantes et il reste une équation en a du n^e degré. LAGRANGE suppose d'abord que les racines de cette équation sont réelles et distinctes. Dans ce cas, les inégalités considérées sont périodiques. Or, si certaines de ces racines sont égales, les solutions contiennent des termes proportionnels à t , des «*arcs de cercle*». Au cas où des racines sont de forme imaginaire, les solutions contiennent des fonctions exponentielles de façon qu'elles ne sont valables que pour un court laps de temps. LAGRANGE conclut que tel n'est pas le cas dans le système du monde. Afin d'illustrer de quelque sorte cette affirmation, il consacre tout un chapitre aux équations séculaires des nœuds et des inclinaisons des orbites de Jupiter et de Saturne. Il constate que les deux planètes géantes s'affectent d'abord elles-mêmes puisque les coefficients $(0,1)$ et $(1,0)$ sont de loin plus importants que tous les autres de la forme $(0,m)$ et $(1,m)$. Voilà pourquoi le système des douze équations 7.151 peut être réduit à un système ne considérant que Jupiter et Saturne.

LAGRANGE trouve que les nœuds de Jupiter et Saturne oscillent avec une période de 51.150 ans autour du même point sur l'écliptique fixée pour une époque déterminée. Les inclinaisons des deux planètes varient avec la même période. LAGRANGE termine son mémoire en faisant les mêmes calculs pour Mars, la Terre et Venus, et en considérant Mercure à part, mais ne parvient pas à calculer les limites des mouvements des nœuds et des inclinaisons.

Dans les Mémoires de Berlin de 1781, LAGRANGE poursuit ses recherches qu'il avait commencées avec son essai sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et des inclinaisons des orbites [371] en publiant son mémoire sur la «*Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*» [364]. Dans

ce traité, LAGRANGE examine, à côté des inégalités séculaires des nœuds et des inclinaisons, les variations similaires des aphélies et des excentricités, pour montrer l'invariabilité des mouvements moyens.

LAGRANGE distingue les variations séculaires de celles appelées périodiques. Celles-ci ne dépendent que de la configuration des Planètes entre elles, elles sont les plus sensibles, et le calcul en a déjà été donné par différents auteurs ; les variations séculaires et qui paraissent aller toujours en augmentant sont les plus difficiles à déterminer tant par les observations que par la théorie. Les premières ne dérangent point l'orbite primitive de la Planète ; ce ne sont, pour ainsi dire, que des écarts passagers qu'elle fait dans sa course régulière, et il suffit d'appliquer ces variations au lieu de la Planète calculé par les tables ordinaires du mouvement elliptique. Il n'en est pas de même des variations séculaires. Ces dernières altèrent les éléments mêmes de l'orbite, c'est-à-dire la position et les dimensions de l'ellipse décrite par la Planète ; et quoique leur effet soit insensible dans un court espace de temps, il peut néanmoins devenir à la longue très considérable. [364]

Comme dans le mémoire de 1774, LAGRANGE désigne la position de la planète au moyen de coordonnées rectangulaires x, y, z qui ont pour origine le Soleil. Les forces exercées par le Soleil sont X, Y, Z suivant les coordonnées rectangulaires et ρ est la distance entre la planète et le Soleil. La force unitaire du Soleil est égale à g . LAGRANGE écrit alors les équations du mouvement :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{\rho^3} + X = 0 \quad (7.154)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{\rho^3} + Y = 0 \quad (7.155)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gz}{\rho^3} + Z = 0 \quad (7.156)$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du corps en vertu des forces $g/\rho^2, X, Y, Z$. Les équations peuvent être combinées, afin de donner les intégrales P, Q, R d'après la même méthode qu'il a déjà employée en 1774. LAGRANGE trouve la relation :

$$g\rho = Nx + My + Lz + P^2 + Q^2 + R^2 \quad (7.157)$$

qui est du second degré en x, y, z et représente une section conique puisque N, M, L, P, Q, R sont des constantes. Celle-ci peut être regardée comme étant invariable dans le laps de temps que la planète parcourt un élément de son orbite. En vue de trouver des relations géométriques entre les quantités L, M, N, P, Q, R et les éléments orbitaux généralement utilisés, LAGRANGE procède à certaines transformations. Puis il introduit les forces perturbatrices sur chaque planète. Il obtient les formules :

$$X = T_1 \left(\frac{x - x_1}{\sigma'^3} + \frac{x_1}{\rho_1^3} \right) + T_2 \left(\frac{x - x_2}{\sigma''^3} + \frac{x_2}{\rho_2^3} \right) + \dots \quad (7.158)$$

$$Y = T_1 \left(\frac{y - y_1}{\sigma'^3} + \frac{y_1}{\rho_1^3} \right) + T_2 \left(\frac{y - y_2}{\sigma''^3} + \frac{y_2}{\rho_2^3} \right) + \dots \quad (7.159)$$

$$Z = T_1 \left(\frac{z - z_1}{\sigma'^3} + \frac{z_1}{\rho_1^3} \right) + T_2 \left(\frac{z - z_2}{\sigma''^3} + \frac{z_2}{\rho_2^3} \right) + \dots \quad (7.160)$$

où σ' est la distance entre les planètes T et T_1 ; σ'' est la distance entre les planètes T et T_2 , etc.

En introduisant la fonction :

$$\Omega = T_1 \left(\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\sigma'} \right) + T_2 \left(\frac{xx_2 + yy_2 + zz_2}{\rho_2^3} - \frac{1}{\sigma''} \right) + \dots \quad (7.161)$$

on obtient facilement :

$$X = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \quad (7.162)$$

La fonction Ω est nommée «fonction perturbatrice». LAGRANGE pose encore :

$$\phi = \frac{\partial \Omega}{\partial x}x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}y + \frac{\partial \Omega}{\partial z}z \quad (7.163)$$

et :

$$(d\Omega) = \frac{\partial \Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z}dz \quad (7.164)$$

Il montre ensuite que :

$$dP = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}z - \frac{\partial \Omega}{\partial z}y \right) dt \quad (7.165)$$

$$dQ = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}z - \frac{\partial \Omega}{\partial z}x \right) dt \quad (7.166)$$

$$dR = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}y - \frac{\partial \Omega}{\partial y}x \right) dt \quad (7.167)$$

et :

$$dN = 2x(d\Omega) - \phi dx - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \rho d\rho \quad (7.168)$$

$$dM = 2y(d\Omega) - \phi dy - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \rho d\rho \quad (7.169)$$

$$dL = 2z(d\Omega) - \phi dz - \frac{\partial \Omega}{\partial z} \rho d\rho \quad (7.170)$$

Dans l'expression, $(d\Omega)$ est la dérivée $d\Omega$ par rapport aux coordonnées de la planète perturbée. En remplaçant les coordonnées x, y, z par des coordonnées polaires équivalentes où r désigne la projection du rayon vecteur sur l'écliptique et q la longitude, p la quantité de la longitude, dans le cas du problème keplerien, il arrive finalement à exprimer Ω par une série :

$$\Omega = A \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\lambda p + \mu p_1 + \nu p_2 + \dots) \quad (7.171)$$

où A dépend des éléments de l'orbite de la planète perturbante et où λ, μ, ν , etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs. $(d\Omega)$ est alors facilement calculable et prend la forme de :

$$(d\Omega) = \pm \lambda A \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\lambda p + \mu p_1 + \nu p_2 + \dots) \quad (7.172)$$

qui est la dérivée de 7.171 par rapport à p . Ce résultat montre que dans le degré d'approximation du premier degré, qui fait partie de l'hypothèse de départ, $(d\Omega)$ ne contient que des termes dépendant des fonctions trigonométriques et que tous les autres termes disparaissent dans la différentiation partielle par rapport à p . LAGRANGE conclut que'à la fois la distance moyenne g/Δ et le mouvement moyen longitudinal qui a la forme $\Delta^{\frac{3}{2}}/g$ ne subissent que des variations périodiques et qu'il n'existe pas des inégalités séculaires pour ces quantités, Δ étant une constante. Il ne reste donc plus qu'à examiner les parties non périodiques de dP, dQ, dM, dN .

En respectant l'ordre des grandeurs des quantités considérées et en introduisant les transformations :

$$\begin{aligned} P &= R\theta \sin \omega & L &= \lambda \sin \eta & M &= \lambda \cos \eta \sin \varphi \\ Q &= R\theta \cos \omega & N &= \lambda \cos \eta \cos \varphi \end{aligned} \quad (7.173)$$

avec θ : la tangente de l'angle d'inclinaison de l'orbite, λ : l'excentricité dans le cas où la masse du Soleil g est admise égale à l'unité. θ et λ ont des valeurs numériques très petites pour toutes les planètes du système solaire et LAGRANGE les qualifie comme étant : «*très petites du premier ordre*». En outre φ est la longitude de l'aphélie et η la latitude de cet aphélie déterminée par l'équation :

$$\tan \eta = \theta \sin(\varphi - \omega) \quad (7.174)$$

Avec l'ordre de grandeur des valeurs considérées, L s'avère être du second ordre comme étant le produit de deux petites grandeurs du premier ordre. En négligeant ces quantités du deuxième ordre, on aura :

$$\Pi = (R^2 + P^2 + Q^2)^{\frac{1}{2}} = R \left(1 + \frac{P^2}{R^2} + \frac{Q^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7.175)$$

et :

$$R = \Pi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \quad (7.176)$$

parce que :

$$\Delta = \frac{g^2 - \lambda^2}{\Pi^2} \quad (7.177)$$

En restant aux quantités du premier ordre, on obtient des deux dernières équations :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{\Pi^2} = \frac{1}{R^2} \\ d(\Delta) &= 0 \\ dR &= 0 \end{aligned} \quad (7.178)$$

Les expressions pour dP et dQ sont obtenues par des substitutions appropriées dans 7.165 à 7.167 et, tout comme dans le mémoire de 1774, LAGRANGE obtient :

$$0 = \frac{dS}{dt} + (0, 1)(\mu - \mu_1) + (0, 2)(\mu - \mu_2) + \dots \quad (7.179)$$

$$0 = \frac{d\mu}{dt} - (0, 1)(s - s_1) + (0, 2)(s - s_2) - \dots \quad (7.180)$$

avec $s = \frac{P}{R} = \theta \sin \omega$ et $\mu = \frac{Q}{R} = \theta \cos \omega$ et les symboles déjà introduits dans le premier mémoire lagrangien. Le système d'équations pour s et μ peut être étendu à tout le système planétaire.

Pour LAGRANGE : «*Il ne reste plus qu'à développer et à réduire d'une manière semblable les formules 7.168 et 7.169 pour dN et dM* » [364]. Il remplace par $r \cos q$, $r \sin q$, $r' \cos q'$, $r' \sin q'$... les x , y , x' , y' ce qui donnera une fonction de r , q , z , r' , q' , z' ... , et développe en série trigonométrique les q , q' ... et qui ont la longitude moyenne comme argument. Certaines simplifications peuvent être introduites qui dépendent du fait que les masses planétaires sont très petites vis à vis de celle du Soleil, ce qui permet de négliger tous les termes où ces masses entrent à une puissance supérieure à un. Finalement tous les termes dans les expressions finales, contenant des fonctions sinus et cosinus, sont négligés. LAGRANGE introduit encore les abréviations :

$$[0, 1] = T_1 \frac{(r^2 + r_1^2)(r, r_1)_1 - 3rr_1(r, r_1)}{2r^{\frac{1}{2}}} \quad (7.181)$$

$$[0, 2] = T_2 \frac{(r^2 + r_2^2)(r, r_2)_1 - 3rr_2(r, r_2)}{2r^{\frac{1}{2}}} \quad (7.182)$$

etc

Il arrive finalement aux équations de la forme :

$$0 = \frac{dM}{dt} - [(0,1) + (0,2) + \dots] N + [0,1]N_1 + [0,2]N_2 + \dots \quad (7.183)$$

$$0 = \frac{dN}{dt} - [(0,1) + (0,2) + \dots] M + [0,1]M_1 + [0,2]M_2 + \dots \quad (7.184)$$

et des équations semblables pour les cinq autres planètes du système solaire. Comme ces équations sont linéaires et du premier ordre, LAGRANGE montre que les solutions de ces équations sont de la forme :

$$M = A \sin(at + \alpha) + B \sin(bt + \beta) + C \sin(ct + \gamma) + \dots \quad (7.185)$$

$$N = A \cos(at + \alpha) + B \cos(bt + \beta) + C \cos(ct + \gamma) + \dots \quad (7.186)$$

etc

Il y a autant de termes du côté droit de chaque équation qu'il y a de planètes dans le système solaire. Les constantes, $a, b, c, \dots$ sont les racines d'une équation algébrique d'un degré égal au nombre des planètes et les $A, B, C, \dots, \alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes arbitraires à déterminer des valeurs initiales $t = 0$ du système.

La seconde partie du mémoire [364] vise à appliquer la théorie des inégalités séculaires à chacune des planètes. Au début de ce texte, LAGRANGE insère une «*profession de foi*» pour la théorie newtonienne de la gravitation quand il écrit à propos de la configuration de la théorie par les observations : «*Cependant l'accord qui s'est déjà trouvé dans les principaux phénomènes célestes, entre les observations et la Théorie fondée sur le système de la gravitation universelle, autorise à penser que le même accord aura lieu aussi dans les autres phénomènes moins sensibles, et à profiter par conséquent des secours que cette Théorie offre pour prédire les variations que les éléments des Planètes doivent éprouver à la longue, et qui empêche que les Tables actuelles, quelque exactes qu'on le suppose, ne puissent servir avec la même précision pour des temps fort éloignés.*» [364]

Le problème principal dans ces applications s'avère être les masses des différentes planètes. Pour celles possédant des satellites connus, LAGRANGE se réfère aux tables de HALLEY, tandis que pour les autres il applique l'idée eulerienne supposant que les densités varient proportionnellement à la racine carrée des mouvements moyens respectivement avec l'exposant $\frac{3}{4}$ des distances moyennes. Cette hypothèse n'est pas assez exacte, et les erreurs dans les calculs de LAGRANGE sont dues à l'estimation erronée des masses des planètes.

Afin de prévoir des corrections éventuelles sur les masses, LAGRANGE multiplie celles-ci avec un coefficient de la forme $m = 1 + \mu$, $m_1 = 1 + \mu_1$, etc. et propose de déterminer de combien ces nombres μ, μ_1 , etc. diffèrent de zéro en comparant les variations séculaires calculées avec celles obtenues par les astronomes. Cette procédure avait déjà été instaurée par EULER. Or LAGRANGE

n'arrive pas à tirer de cette méthode des résultats valables, vu que les valeurs observées sont trop discordantes et il propose que les masses introduites par lui soient maintenues avant que des résultats plus précis soient disponibles.

LAGRANGE revient, comme il l'avait déjà fait en 1774 [371], à une séparation du grand système d'équations différentielles englobant les six planètes alors connues. Il considère d'un côté l'action mutuelle et simultanée de Mars, la Terre, Venus et Mercure, de l'autre côté le système de Jupiter et Saturne. En ce qui concerne le premier système, LAGRANGE a des doutes : quoiqu'on puisse avoir des expressions générales et directes des quatre éléments, il serait fort difficile et peut être même impossible, de déterminer exactement leurs valeurs moyennes, leurs maxima et minima et les périodes de leurs variations.

LAGRANGE réussit à faire ce calcul pour le système Jupiter Saturne. Il tire la conclusion : *«que les excentricités et les inclinaisons des orbites de Saturne et de Jupiter doivent demeurer toujours très petites, et que leurs variations ne consistent que dans des espèces d'oscillations par lesquelles ces éléments deviennent alternativement plus grands et plus petits que leurs valeurs moyennes, mais sans s'en écarter jamais que de quantités très petites. On voit aussi par nos formules que les coefficients de t sous les signes de sinus et cosinus sont nécessairement toujours réels, quelques valeurs qu'on donne aux masses des deux Planètes, parce qu'en augmentant ou diminuant ces masses, on ne fait qu'augmenter ou diminuer proportionnellement les coefficients marqués par des crochets ronds ou carrés, sans en changer les signes. D'où il s'ensuit que le système de Saturne et de Jupiter, en tant qu'on le regarde comme indépendant des autres Planètes, ce qui est toujours permis, comme nous l'avons montré plus haut, est de lui-même dans un état stable et permanent, du moins en faisant abstraction de l'action de toute cause étrangère, comme serait celle d'une Comète, ou d'un milieu résistant dans lequel les Planètes nageaient.»* [364]

Pour ce qui est des quatre autres Planètes : Mars, la Terre, Venus et Mercure, les variations séculaires des éléments dépendent de deux systèmes de huit équations simultanées du premier ordre. LAGRANGE résout ces systèmes en utilisant les mêmes méthodes employées pour le système Jupiter-Saturne, mais à la place d'une équation algébrique du second ordre en vue d'obtenir la constante a , il a maintenant à faire à une équation algébrique du quatrième ordre dont les racines sont réelles et de valeurs différentes. Il existe donc ici aussi des limites supérieures pour les valeurs des excentricités et les inclinaisons, même si LAGRANGE ne parvient pas à traiter le problème dans toute sa généralité.

A la fin de son mémoire, LAGRANGE résume ses résultats : *«Cette constance des distances moyennes, et celle des moyens mouvements qui en est la suite, sont le résultat le plus intéressant de notre analyse, et le point le plus remarquable du système du monde. Les Planètes, en vertu de leur attraction mutuelle, changent insensiblement la forme et la position de leurs orbites, mais sans sortir de certaines limites ; leurs grands axes seuls demeurent inaltérables ; du moins la Théorie de la gravitation n'y montre que des altérations périodiques et dépendantes des positions respectives des Planètes, et n'en indique aucune du genre des séculaires, soit constamment croissantes, soit simplement périodiques, mais*

d'une période très longue et indépendante de la situation des Planètes, comme celles que la même théorie donne dans les autres éléments de l'orbite, et que nous venons de déterminer» [364]

Nous avons vu, tout au long de ce chapitre, qu'à la fois, LAGRANGE et LAPLACE travaillèrent sur le même sujet des inégalités séculaires et créaient même pendant un certain temps une situation de concurrence, tout en se référant constamment aux écrits de l'autre. Si LAGRANGE dans son mémoire [364] est parvenu à une exposition générale de la théorie, représentant l'état de la science jusqu'au milieu du XIX^e siècle, il nous faut encore commenter une pièce de LAPLACE parue dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris en 1772 intitulée : «*Recherches sur le calcul intégral et sur le système du Monde*» [365]. Cette pièce, partant des résultats que LAGRANGE a obtenus en [371], parvient à des solutions similaires à celles que LAGRANGE a obtenues en [364], mais porte la griffe de LAPLACE, plus pratique et moins incliné vers des formulations mathématiques trop élégantes.

Le mémoire en question de LAPLACE expose, tout comme sa pièce de 1773 [366], d'abord sa méthode de résolution des équations différentielles pour l'appliquer ensuite à la théorie des planètes. Il estime la partie la plus délicate de celle-ci comme étant la détermination des inégalités séculaires qui malgré les recherches des premiers géomètres du XVIII^e siècle laisse beaucoup à désirer encore. LAPLACE fait alors l'éloge des travaux de son collègue et concurrent : «*M. de LAGRANGE est le premier qui ait envisagé cette matière sous son véritable point de vue, dans sa belle pièce «Sur les inégalités des satellites de Jupiter» et dans sa «Théorie de Jupiter et de Saturne» ; la méthode qu'il a employée pour cela est un chef d'œuvre d'analyse, et l'excellent Mémoire qu'il vient de donner : «Sur les variations du mouvement des nœuds des planètes et de l'inclinaison de leurs orbites» renferme la théorie la plus générale et la plus simple de ces variations ; mais toutes les autres inégalités séculaires, et surtout celle du moyen mouvement et de la moyenne distance n'avaient point encore été déterminées avec l'exactitude et la généralité qu'on peut désirer au moins jusqu'au moment où je donnai, sur cet objet, mes recherches, dans lesquelles j'ai prouvé que les moyens mouvements des planètes et leurs moyennes distances au Soleil sont invariables*» [365]. LAPLACE annonce alors son programme qui prévoit, à la suite de LAGRANGE, d'appliquer sa méthode à toutes les inégalités tant périodiques que séculaires et il est confiant dans l'efficacité et l'exactitude de ses résultats.

Il se réfère dans ses développements largement à son texte antérieur [366] mais introduit certains raffinements visant à une plus grande exactitude. Ainsi le plan r , φ n'est plus identique avec celui du mouvement non perturbé, mais légèrement incliné par rapport à celui-ci, l'inclinaison étant définie par la tangente de l'angle $\alpha\gamma$. LAPLACE ressent la nécessité d'introduire cette nouvelle variable puisque même pas le plan de l'écliptique n'est fixe. Il obtient alors les trois équations suivantes, exactes jusqu'à l'ordre α^2 :

$$\begin{aligned}\varphi = & A + \theta + nt - 2\alpha e \sin(nt + \theta) + \frac{5}{4}\alpha^2 e^2 \sin 2(nt + \theta) \\ & - \frac{1}{4}\alpha^2 \gamma^2 \sin 2(nt + \bar{\omega})\end{aligned}\quad (7.187)$$

$$\begin{aligned}r = & a \left[1 + \frac{\alpha^2 e^2}{2} - \frac{\alpha^2 \gamma^2}{4} + \alpha e \cos(nt + \theta) - \frac{\alpha^2 e^2}{2} \cos 2(nt + \theta) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\alpha^2 \gamma^2 \cos 2(nt + \bar{\omega}) \right]\end{aligned}\quad (7.188)$$

$$S = \alpha \gamma \sin(nt + \bar{\omega}) + \dots \quad (7.189)$$

Dans ces expressions A représente la longitude de l'aphélie, θ est la distance de la planète à l'aphélie au temps $t = 0$, $\bar{\omega}$ est la distance de la planète à son nœud au temps $t = 0$. Les constantes A , e , θ , a , n , γ , $\bar{\omega}$ sont au nombre de 7 quoique la solution des trois équations différentielles du second ordre soit complètement déterminée avec six constantes. LAPLACE constate que la relation :

$$n^2 = \frac{S + P}{a^3} \quad (7.190)$$

liant les masses du Soleil et de la planète, crée une relation entre n et a de façon qu'en réalité il n'y a que six constantes librement déterminables.

Les expressions 7.187 à 7.189 correspondent aux équations 7.115 et 7.116 présentées plus haut.

LAPLACE introduit alors les forces perturbatrices de la même manière que dans [366]. Les équations différentielles du mouvement de la planète non perturbée sont dérivées par rapport à δ , puis les termes proportionnels à $\delta m'$ sont ajoutés aux équations du mouvement. Il trouve trois équations en $\delta\varphi$, δr et δs qu'il résout par une méthode itérative utilisée déjà dans son premier mémoire, et trouve les mêmes relations. LAPLACE montre que sa méthode est applicable pour un nombre n de planètes et elle est similaire à celle de LAGRANGE décrite plus haut. Il conclut qu'«*il nous resterait présentement à appliquer la théorie précédente aux différentes planètes ; mais la longueur déjà trop grande de ce Mémoire m'oblige de renvoyer ces applications à un autre temps ; je me bornerai donc ici à déterminer les inégalités séculaires de Jupiter et de Saturne et, parmi ces inégalités, je ne considérerai que celles du mouvement des aphélies et des excentricités.*» [365]

Malgré sa quasi-promesse, LAPLACE ne s'attaquera plus au problème des inégalités séculaires pendant les années soixante-dix et ce n'est que dans le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126] qu'il reprendra le problème dans toute sa généralité.

-VII-

LA PROBLÉMATIQUE très complexe, tant des inégalités séculaires que périodiques, occupa, comme nous l'avons vu, la majeure partie des investigations théoriques sur la mécanique céleste jusqu'au début du XIX^e siècle.

Celles-ci aboutirent à la formulation de la variation des constantes arbitraires. A la fois, LAGRANGE et LAPLACE ont élaboré cette théorie, et au XIX^e siècle, le flambeau fut repris par POISSON [372] dont le premier mémoire sur la question fut lu à l'Académie en 1809.

LAGRANGE mit la méthode en place par le biais de plusieurs mémoires qui se recourent en grande partie et que nous n'allons pas commenter dans les détails. Nous préférons nous pencher sur la description de cette méthode que LAGRANGE donne dans la deuxième édition de sa «*Mécanique Analytique*» [356] et qui décrit cette approche dans toute sa généralité et montre l'application à tous les problèmes de la mécanique.

LAGRANGE pense «*que ce sont les observations elles-mêmes qui ont fait connaître la solution du problème des mouvements des planètes, fondée sur la variation des éléments de leurs orbites elliptiques : puisque les irrégularités qu'elles firent découvrir dans ces mouvements étaient assez petites pour que les astronomes, qui voulaient en tenir compte, dussent, en admettre toujours le mouvement elliptique comme étant le véritable, et supposer seulement que les éléments éprouvaient de très légères variations ; ce fut en effet la marche suivie par NEWTON dans sa théorie de la Lune. Cette méthode, qui, considérée analytiquement, revient à substituer, à trois équations différentielles du second ordre, un nombre double d'équations du premier ordre, ne serait presque d'aucune utilité, si la solution rigoureuse était possible ; mais elle est très avantageuse dans le cas contraire, et lorsque les forces perturbatrices sont très petites ; car elle permet de conserver la forme elliptique des orbites, de supposer même l'ellipse invariable pendant un temps infiniment petit, et de faire une suite d'approximations ordonnées suivant les puissances des forces perturbatrices ; enfin elle ramène immédiatement aux quadratures les valeurs déterminées par la première approximation*» [117]. Avec cette définition, nous nous trouvons devant une explication concise de la théorie des perturbations qui est la conséquence directe de la théorie de la gravitation newtonienne.

LAGRANGE établit au chapitre II § II de la section VII de la «*Mécanique Analytique*» [356] une proposition relative aux constantes arbitraires qui proviennent de l'intégration des équations du mouvement elliptique. Il introduit les abréviations :

$$\frac{dx}{dt} = x' \quad \frac{dy}{dt} = y' \quad \frac{dz}{dt} = z' \quad (7.191)$$

pour les coordonnées rectangulaires : x, y, z suivant lesquelles il décompose les forces perturbatrices X, Y, Z . Chacun des éléments du mouvement ellip-

tique, tel que a , aura une variation da , calculée en augmentant x' , y' , z' des quantités infiniment petites Xdt , Ydt , Zdt , ce qui donne :

$$da = \left(\frac{da}{dx'} X + \frac{da}{dy'} Y + \frac{da}{dz'} Z \right) dt \quad (7.192)$$

De pareilles équations existent pour tous les éléments de l'orbite. Il serait maintenant possible d'ajouter les forces perturbatrices X , Y , Z aux termes $R \frac{dx}{dx}$, $R \frac{dx}{dy}$, et $R \frac{dx}{dz}$ où R est la force avec laquelle le corps m est attiré vers un centre fixe.

$$V = \int R dr = \int \frac{\mu dr}{r^2} = -\frac{\mu}{r} \quad (7.193)$$

On pourra maintenant regarder les équations précédentes entre les nouvelles variables : a , b , et c , comme des transformées des équations en x , y , z , ce qui est possible seulement si la solution rigoureuse est impossible et que les forces perturbatrices sont très petites. Dans ce cas, cette méthode fournit un moyen d'approximation que LAGRANGE a développé dans toute sa généralité.

En effet, en regardant les coordonnées x , y , z comme des fonctions du temps et des éléments a , b , c , ... devenues variables, on obtient par différenciation :

$$dx = \frac{dx}{dt} dt + \frac{dx}{da} da + \frac{dx}{db} db + \frac{dx}{dc} dc + \dots \quad (7.194)$$

Il est facile alors de prouver que la partie qui contient les variations da , db , dc , ... devient nulle par la substitution de la valeur de da et des valeurs semblables de db , dc ... Finalement LAGRANGE obtient les équations identiques :

$$0 = \frac{dx}{da} \frac{da}{dx'} + \frac{dx}{db} \frac{db}{dx'} + \frac{dx}{dc} \frac{dc}{dx'} + \dots \quad (7.195)$$

$$0 = \frac{dx}{da} \frac{da}{dy'} + \frac{dx}{db} \frac{db}{dy'} + \frac{dx}{dc} \frac{dc}{dy'} + \dots \quad (7.196)$$

$$0 = \frac{dx}{da} \frac{da}{dz'} + \frac{dx}{db} \frac{db}{dz'} + \frac{dx}{dc} \frac{dc}{dz'} + \dots \quad (7.197)$$

En tenant compte de ces identités, on obtient simplement :

$$dx = \frac{dx}{dt} dt \quad dy = \frac{dy}{dt} dt \quad dz = \frac{dz}{dt} dt \quad (7.198)$$

comme si les constantes a , b , c , ... ne variaient point. Si, dans le cas où les forces perturbatrices viennent des attractions d'autres corps fixes ou mobiles et que ces attractions sont proportionnelles à des fonctions des distances, ou peut désigner V par $-\Omega$, qui représente la somme des intégrales de chaque force multipliée par l'élément de sa distance au centre d'attraction et qui est une fonction de x , y , z , les forces X , Y , Z sont de la forme :

$$X = \frac{d\Omega}{dx} \quad Y = \frac{d\Omega}{dy} \quad Z = \frac{d\Omega}{dz} \quad (7.199)$$

LAGRANGE cherche alors à exprimer les variations des éléments a, b, c en employant au lieu des différences partielles de Ω relatives à x, y, z ses différences partielles relatives à $a, b, c, \dots$, en substituant des valeurs de x, y, z en t et a, b, c . C'est cette considération qui a fait naître la nouvelle théorie de la variation des constantes arbitraires. LAGRANGE, après quelques transformations analytiques, parvient à des expressions pour $\frac{d\Omega}{da}, \frac{d\Omega}{db} \dots$, aux formules suivantes :

$$\frac{d\Omega}{da} dt = [a, b]db + [a, c]dc + [a, e]de + [a, f]df + [a, g]dg \quad (7.200)$$

$$\frac{d\Omega}{db} dt = [b, a]da + [b, c]dc + [b, e]de + [b, f]df + [b, g]dg \quad (7.201)$$

Les coefficients entre les crochets nommés «*crochets de LAGRANGE*» sont, par leur nature, indépendants du temps ; la valeur de ces symboles est nulle lorsque les deux lettres sont les mêmes, et elle change seulement de signe quand on y change l'ordre de ces lettres, de sorte qu'on a $[a, a] = 0$, $[b, a] = -[a, b]$,
...

Ainsi les expressions générales des différentielles partielles de la fonction Ω par rapport à chacun des six éléments du mouvement elliptique, multipliées par l'élément du temps, sont données par la somme des différentielles des cinq autres éléments, multipliées par des coefficients indépendants du temps, qui sont égaux et de signe contraire pour les éléments correspondants ; de manière que si l'on représente par l le coefficient de db dans la valeur de $\frac{d\Omega}{da} dt$, $-l$ sera le coefficient de da dans la valeur de $\frac{d\Omega}{db} dt$, et ainsi de suite. Une conséquence qui résulte des formules 7.200 et 7.201, c'est que la variation de la fonction Ω , en tant qu'elle dépend de celle de tous les éléments $a, b, c, \dots$, du corps troublé, doit être nulle. En effet, dans la différentielle complète de Ω par rapport aux éléments de m , si l'on substitue les valeurs de $\frac{d\Omega}{da}, \dots$, tous les termes se détruisent mutuellement. Ce résultat remarquable tient au fait que l'on peut supposer, que l'orbite reste constante pendant l'instant dt et qu'elle ne varie que d'un instant à l'autre.

Les formules 7.200 et 7.201 donnent les valeurs des différentielles de Ω en fonction des variations des éléments, tandis que le problème à résoudre est inverse, puisqu'il consiste à déterminer les variations de chaque élément en fonction des forces perturbatrices ; mais comme il est prévisible que le calcul des coefficients de chaque terme en fera disparaître un grand nombre, et qu'il suffira ensuite d'une simple élimination entre les équations définitives pour obtenir les variations de chaque élément en particulier, on peut se servir des formules dont il s'agit pour la détermination cherchée, et cette marche, quoiqu'un peu indirecte, est la plus simple pour le calcul. Comme ces formules sont au nombre de six et contiennent chacune les variations de cinq éléments, le nombre total

des coefficients à déterminer est théoriquement de trente, mais, vu les relations antimétriques, il suffit d'en connaître la moitié. Et de ces quinze coefficients restants, il y en a qui sont nulles.

Le développement du problème inverse, c'est-à-dire la mise en équation des dérivées des éléments de l'orbite en fonction des forces externes, est long, mais pas compliqué. Après avoir exprimé les dérivées de Ω par rapport aux six paramètres de détermination de l'orbite, LAGRANGE parvient aux valeurs définitives des variations des six éléments, à savoir :

$$da = \frac{2}{an} \frac{d\Omega}{di} dt \quad (7.202)$$

$$dM = n - \frac{2}{an} \frac{d\Omega}{da} dt - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{d\Omega}{de} dt \frac{d\Omega}{d\omega} dt \quad (7.203)$$

$$de = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne} \left[1 - \sqrt{1-e^2} \frac{d\Omega}{di} + \frac{d\Omega}{d\omega} \right] dt \quad (7.204)$$

$$d\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne} \frac{d\Omega}{de} dt - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i di} \frac{d\Omega}{di} dt \quad (7.205)$$

$$d\Omega_L = \frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{d\Omega}{di} dt \quad (7.206)$$

$$di = -\frac{1}{a^2n\sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{d\Omega}{d\Omega_L} dt \quad (7.207)$$

Dans ces formules, a désigne le demi-grand axe ; i l'inclinaison de l'orbite par rapport à l'écliptique, e l'excentricité de l'orbite, Ω_L l'argument du nœud ascendant, ω est l'angle entre le rayon vecteur et la direction du nœud ascendant, M étant l'anomalie moyenne.

LAGRANGE résume le résultat obtenu en écrivant que «*par ces formules, on peut donc avoir l'effet des forces perturbatrices sur le mouvement d'une planète, en rendant variables les quantités qui, sans ces forces seraient constantes ; mais quoiqu'on puisse, de cette manière, déterminer toutes les inégalités dues aux perturbations, c'est surtout pour les inégalités qu'on nomme séculaires, que les formules que nous venons de donner sont utiles, parce que ces inégalités étant indépendantes des périodes relatives aux mouvements des planètes, affectent essentiellement leurs éléments et y produisent des variations ou croissantes avec le temps, ou périodiques mais avec des périodes propres et d'une longue durée*» [356]. Et LAGRANGE indique dans la suite du texte la méthode qu'il préconise : «*Pour déterminer les variations séculaires, il n'y aura qu'à substituer pour Ω la partie non périodique de cette fonction, c'est-à-dire le premier terme du développement $d\Omega$ en séries de sinus ou de cosinus d'angles dépendants des moyens mouvements de la planète troublée et des planètes perturbatrices. Car Ω n'étant fonction que des coordonnées elliptiques de ces planètes, lesquelles peuvent toujours, du moins tant que les excentricités et les inclinaisons sont peu considérables, se réduire en séries du sinus et cosinus d'angles proportionnels aux anomalies et aux longitudes moyennes, on pourra aussi développer la*

fonction Ω dans une série du même genre, et le premier terme, sans sinus et cosinus, sera le seul qui puisse donner des équations séculaires.» [356]

Si donc on se confine seulement à la première puissance des masses perturbatrices, la partie séculaire de Ω ne dépend que des grands axes, des excentricités, et des angles ω , ω' mais nullement de l'angle M , quel que soit l'ordre auquel on s'arrête par rapport aux excentricités et à l'inclinaison. En ne considérant que les inégalités séculaires, on obtient des équations 7.202 à 7.207 :

$$da = 0 \quad (7.208)$$

$$de = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne} \frac{d(\Omega)}{d\omega} dt \quad (7.209)$$

$$d\omega = \frac{\sqrt{1-e^2}}{a^2ne} \frac{d(\Omega)}{de} dt \quad (7.210)$$

L'équation 7.208 prouve que le grand axe de l'orbite troublée reste constant, ou que ses variations ne sont que périodiques, tant qu'on n'a égard qu'à la première puissance des masses. On voit subsidiairement que le moyen mouvement : $\int n dt$ est constant aussi, entre les mêmes limites car sa variation se réduit à 0.

Les équations 7.209 et 7.210 forment un système indépendant analogue à celui qui est relatif à l'inclinaison et aux nœuds, question traitée dans les détails plus haut. Si, dans le système 7.209 7.210, on substitue pour (Ω) sa valeur déterminée plus haut, et qu'on se borne à la première puissance de l'excentricité réduisant :

$$\sqrt{1-e^2} \cong 1 \quad (7.211)$$

on trouve :

$$de \cong \frac{m'}{a^2n} (a, a')_2 e' \sin(\omega - \omega') dt \quad (7.212)$$

$$d\omega \cong \frac{m'}{a^2n} \left[(a, a')_1 + (a, a')_2 \frac{e'}{e} \cos(\omega - \omega') \right] dt \quad (7.213)$$

Si, en plus, l'on suppose que l'inclinaison i soit rapportée au plan de l'orbite de m' , à un instant quelconque, de sorte que i soit égale à l'inclinaison I de m' , on aura $\frac{d(\Omega)}{d\Omega_L} = 0$, $\frac{d(\Omega)}{di} = -2m[a, a'] \sin \gamma$ et les équations 7.206 et 7.207 donnent finalement :

$$\begin{aligned} di &= 0 \\ d\Omega_L &= -\frac{2m'}{a^2n} [a, a'] dt \end{aligned} \quad (7.214)$$

ce qui prouve que l'inclinaison mutuelle des orbites de m et m' est constante relativement aux inégalités séculaires ainsi que la ligne des nœuds des deux

orbites a sur le plan de l'orbite de m' , un mouvement rétrograde dont la vitesse est constante. Donc, quoique les inclinaisons des orbites de m et m' sur un plan fixe soient variables, leur inclinaison mutuelle est constante. Ce fait jouera une importance dans la théorie de Jupiter et Saturne que nous allons commenter dans le prochain chapitre.

Si l'on se limite à la première puissance des masses, on doit, dans les valeurs de e , e' , ω , ω' et Ω où m' est déjà incorporé dans le facteur commun, regarder e , e' , ω , ω' et Ω comme étant des constantes, ce qui donne, en intégrant des expressions de la forme :

$$e = kt + \text{cte} \quad \omega = lt + \text{cte} \quad i = gt + \text{cte} \quad (7.215)$$

les constantes d'intégration désignent les éléments elliptiques, et les coefficients représentent les variations séculaires, regardées comme proportionnelles au temps. Ces valeurs suffisamment exactes pour un intervalle peu considérable, ne le seraient pas pour plusieurs siècles ; mais on peut, par le procédé des substitutions successives, obtenir un plus grand degré d'approximation. En effet, si l'on remet au lieu des éléments ces premières valeurs dans les coefficients des équations différentielles, et qu'on intègre de nouveau, le terme proportionnel au temps, multiplié par dt , mènera à des intégrales contenant le carré du temps. Une nouvelle substitution mènerait à des termes contenant le cube du temps et ainsi de suite. Ces termes deviennent très vite si petits qu'ils sont insensibles dans le cas des planètes et les expressions 7.215 s'avèrent suffisants pour les besoins de l'astronomie.

Or, comme elles croissent constamment avec le temps, on pourrait craindre que les variations séculaires deviennent si considérables au bout de plusieurs siècles qu'elles changeraient l'aspect du système planétaire. Or LAPLACE, dans son «*Traité de Mécanique céleste*» [126] que nous allons examiner dans la suite, a montré que tel ne peut être le cas et que le système planétaire est stable au moins pour une très longue période.

En principe, il est possible d'utiliser les équations différentielles 7.202 à 7.207 pour le calcul numérique des variations des éléments. Mais l'intérêt des astronomes était beaucoup plus porté sur les possibilités que fournit ce système en vue de déterminer la forme et les limites des variations séculaires que pour fixer leurs valeurs. En effet, ce calcul exige préalablement la connaissance des masses des différents corps, qu'on ne pouvait obtenir au XVIII^e et XIX^e siècles que pour les planètes accompagnées de satellites. En pratique, les astronomes ont bien procédé à un calcul approximatif au moyen du système 7.202 à 7.207 au premier ordre.

Ils calculaient séparément l'action de chaque corps sur les éléments du corps troublé et additionnaient les résultats partiels pour former l'effet total, mais en y ajoutant les produits respectifs de chaque effet partiel multiplié par un coefficient indéterminé. Cette approche permettait de corriger immédiatement les résultats trouvés en fonction de nouvelles données sur les corps en question.

-VIII-

APRÈS AVOIR décrit les approches analytiques de la théorie des perturbations, nous présenterons dans ce chapitre, les deux applications majeures de cette théorie, à savoir la grande inégalité de Jupiter et de Saturne dont l'explication fut donnée dans plusieurs mémoires de LAPLACE, ainsi que l'accélération séculaire de la Lune expliquée dans plusieurs pièces dues à la fois à LAGRANGE et à LAPLACE.

En effet, LAPLACE écrivit cinq mémoires entre novembre 1785 et avril 1788 sur le système planétaire et sa stabilité, dont un des plus importants est dans notre contexte le «*Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*» [373], le premier de la série qui culminait avec le long mémoire sur la «*Théorie de Jupiter et Saturne*» [367] de 1788. Dans la suite, ces deux textes seront présentés et commentés.

LAPLACE introduisit cette série de mémoires en expliquant la distinction que les astronomes font entre les inégalités périodiques et séculaires. Nous avons vu que les inégalités périodiques dépendent des positions des planètes sur leurs orbites et se compensent dans quelques années. Elles sont en fait des oscillations autour d'un point fixe qui est le centre attractif. «*Les autres altèrent les éléments des orbites par des nuances presque insensibles à chaque révolution des planètes ; mais ces altérations, en s'accumulant sans cesse, finissent par changer entièrement la nature et la position des orbites ; comme la suite des siècles les rend très remarquables*». [373]

LAPLACE identifie comme inégalités les plus intéressantes, celles qui peuvent altérer les moyens mouvements des planètes et donc aussi, par la troisième loi de KEPLER, la distance moyenne au Soleil. LAPLACE se concentre alors à son principal point d'intérêt en écrivant : «*La plupart des astronomes ont admis une équation séculaire proportionnelle aux carrés des temps dans les moyens mouvements de Jupiter et de Saturne*» [373]. Il est cependant impossible de ne pas reconnaître des variations très sensibles dans les révolutions de ces deux planètes et LAPLACE avoue avoir pensé d'abord que l'action des comètes en était la cause, mais il se ravisa en considérant de plus près les masses de ces corps célestes.

Il trouve un guide dans le mémoire de LAGRANGE de 1783 : «*Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes*» [374] qui posait la question que si même dans un temps infini, les forces perturbatrices des autres planètes, assujetties à des variations dans les éléments de leurs orbites, pouvaient toutes ensemble altérer les mouvements moyens et modifier ainsi la troisième loi de KEPLER. Quoique LAGRANGE étendit ses investigations en incluant les carrés des excentricités, il trouva une équation séculaire, mais tellement petite qu'elle était négligeable pour des périodes de temps finies. La question d'expliquer ce phénomène par des expressions possédant une périodicité extrêmement longue ne se posait pas mais plutôt comment cette situation était à expliquer dans le cadre de la théorie de la gravitation.

LAPLACE chercha une réponse à cette question en considérant une propriété générale des planètes entre elles, qui est, si l'on n'a égard qu'aux quantités qui ont de très longues périodes, la somme des masses de chaque planète, divisées respectivement par les grands axes de leurs orbites, reste toujours à très peu près constante, d'où il suit que les carrés des moyens mouvements étant réciproques aux cubes de ces axes, si le mouvement de Saturne se ralentit par l'action de Jupiter, celui de Jupiter doit s'accélérer par l'action de Saturne, ce qui est conforme à ce que l'on observe. Et LAPLACE de continuer : «*De plus, en supposant avec M. de LAGRANGE, que la masse du Soleil étant l'unité, celle de Jupiter est 1/1067,195 et celle de Saturne est 1/3358,40, on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très peu près, comme 7 à 3 ; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de 9°16', celle de Jupiter doit être de 3°58', ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de HALLEY. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvements de Jupiter et de Saturne sont un effet de leur action mutuelle*» [374]. Or, comme il avait déjà été établi auparavant par LAGRANGE et LAPLACE que la gravitation ne peut produire ni inégalité périodique, ni inégalité séculaire qui serait indépendante de la position relative des planètes. LAPLACE pense donc qu'une telle inégalité considérable de ce genre existe bien, dont la période est fort longue et d'où résultent ces variations. Il était connu depuis longtemps déjà que les moyens mouvements des deux planètes sont pratiquement commensurables. Cinq fois le mouvement de Saturne est à très peu près égal à deux fois celui de Jupiter. LAPLACE vit immédiatement comment exploiter ce fait. «... j'ai conclu que les termes qui, dans les équations différentielles du mouvement de ces planètes, ont pour argument cinq fois la longitude moyenne de Saturne, moins deux fois celle de Jupiter, pouvaient devenir sensibles par les intégrations, quoique multipliés par les cubes et les produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites» [374].

LAPLACE prit donc ces inégalités comme la cause probable des variations observées dans les mouvements de Jupiter et de Saturne et entreprit «*le calcul long et pénible*» [374] nécessaire à démontrer cette relation. Les expressions pour Saturne confirmaient une grande équation d'environ 47' dont la période est à peu près de huit cent soixante-dix sept ans, et dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne, moins deux fois celui de Jupiter. Dans la théorie de Jupiter, il existe une équation de signe contraire d'environ 20' et dont la période est la même. Le rapport est environ de 3 : 7. Dans son grand mémoire sur la même question [367], LAPLACE corrige légèrement les valeurs trouvées, nous allons y revenir.

LAPLACE nomme nt le moyen mouvement sidéral de Jupiter depuis 1700, $n't$ celui de Saturne, il trouve, en n'ayant égard qu'aux inégalités précédentes, la longitude de Jupiter comptée de l'équinoxe de 1700 :

$$nt + \varepsilon + 20' \sin(5n't - 2nt + 49^\circ 8' 40'') \quad (7.216)$$

tandis que pour Saturne, elle est :

$$n't + \varepsilon' - 46'50'' \sin(5n't - 2nt + 49^\circ 8'40'') \quad (7.217)$$

ε et ε' étant deux constantes qui dépendent de la longitude des deux planètes au commencement de 1700. LAPLACE remarque que «*Les coefficients numériques de ces valeurs cessent d'avoir lieu après un temps considérable, à cause de la variabilité des éléments des orbites; mais ils peuvent servir sans erreur sensible depuis Tycho jusqu'à nous, ce qui suffit pour la comparaison des observations modernes.*» [374] Et LAPLACE de conclure . «*Si l'on compare les formules précédentes aux observations, on trouve entre les unes et les autres un accord très satisfaisant, et qui fournit une nouvelle preuve de l'admirable théorie de la pesanteur universelle*» [374]

LAPLACE fait état encore d'une autre inégalité dans la longitude de Jupiter et de Saturne coïncidant avec les termes dus au mouvement elliptique, si l'on avait exactement :

$$5n' = 2n \quad (7.218)$$

Ces termes sont pour Jupiter :

$$2'39'' \sin(3nt - 5n't - 41^\circ 56') + 58'' \sin(5n't - nt - 34^\circ 31'33'') \quad (7.219)$$

et pour Saturne :

$$-13'16'' \sin(2nt - 4n't - 2^\circ 27'4'') - 2'40'' \sin(6n't - 2nt - 60^\circ 30'33'') \quad (7.220)$$

Il les considère comme le résultat de variations dans les excentricités des orbites et dans la position des apsides et dont la période est de 876 ans. D'après LAPLACE, l'existence de ces inégalités explique pourquoi au XVII^e siècle il y a eu un accroissement de l'équation du centre de Jupiter et une diminution de celle de Saturne et que leurs aphélies ont paru plus grands qu'ils n'ont dû l'être en vertu des seules inégalités séculaires.

LAPLACE annonce la parution d'un mémoire contenant la nouvelle théorie des deux planètes et qui sera la pièce [367]. «*Il résulte de cette théorie que toutes les oppositions anciennes et modernes de Jupiter et de Saturne peuvent être représentées avec la précision dont elles sont susceptibles, au moyen des inégalités précédentes auxquelles il faut, par conséquent, attribuer les dérangements singuliers observés dans le mouvement de Saturne et dont on ignorait les lois et la cause. Il aurait fallu plusieurs siècles d'observations suivies pour déterminer empiriquement ces inégalités, à cause de la longueur de leur période; ainsi sur ce point, la théorie de la pesanteur a devancé l'observation*» [374].

LAPLACE démontre des inégalités semblables à celles découvertes pour Jupiter et Saturne dans le cas des satellites de Jupiter : «*Les observations nous apprennent que le moyen mouvement du premier satellite de Jupiter est environ deux fois plus grand que celui du second qui, lui-même, est à peu près*

le double de celui du troisième satellite, et la théorie de la pesanteur universelle fait voir que ces rapports sont à la source des principales inégalités de ces astres. Il suit de là que la différence des moyens mouvements du premier et du second satellite est égale à deux fois la différence des moyens mouvements du second et du troisième ; mais ce rapport est incomparablement plus exact que les précédents, et les moyens mouvements des Tables en approchent tellement qu'il faut un très long intervalle pour que la petite quantité dont elles s'en éloignent puisse devenir sensible. De là naissent plusieurs phénomènes constants dans la configuration des trois premiers satellites, telle est, entre autres, l'impossibilité de les voir s'éclipser à la fois, d'ici un grand nombre de siècles, ... on trouve que cela ne peut arriver qu'après 1'317'900 ans» [373].

LAPLACE conclut à la fin du premier paragraphe de cette étude : «que l'action mutuelle des satellites de Jupiter ne produit dans leurs mouvements que des inégalités périodiques ; et nous pouvons généralement en conclure que, si l'on n'a égard qu'aux lois de la gravitation universelle, les moyennes distances des corps célestes aux foyers de leurs forces principales sont immuables. Il n'en est pas ainsi des autres éléments de leurs orbites : on sait que leurs excentricités, leurs inclinaisons, les positions de leurs nœuds et leurs aphélies varient sans cesse ; et il existe des méthodes fort simples pour déterminer ces variations, en supposant les orbites peu excentriques et peu inclinées les unes aux autres. Mais les excentricités et les inclinaisons sont-elles renfermées constamment dans d'étroites limites ? C'est un point important du système du monde qui reste encore à éclaircir, et dont la discussion est la seule chose que laisse maintenant à désirer la théorie des inégalités séculaires» [373]. LAPLACE pose ici pour la première fois la question de la stabilité du système solaire qu'il traitera dans le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126]. Mais ici déjà, il songe à extrapoler sa théorie du système jovien à tout le système solaire.

Les calculations comparant la théorie de l'interdépendance à long terme des inégalités de Jupiter et de Saturne furent traitées par LAPLACE dans la «*Théorie de Jupiter et de Saturne*» [367], mémoire publié en deux parties dans les «*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*» en 1788. Dans l'introduction à ce très long mémoire, LAPLACE annonce sa détermination à expliquer les variations des accélérations des moyens mouvements des deux planètes à l'aide de la théorie de la gravitation universelle, but qu'EULER n'avait pas atteint dans sa pièce sur le même sujet. [317]. Il écrit : «Jusqu'à présent la théorie de la pesanteur universelle n'a pu rendre raison de ces phénomènes ; on ne voit même rien dans les résultats analytiques auxquels les géomètres sont parvenus sur ce sujet qui puisse conduire à les expliquer. Je me propose ici de faire voir que, loin d'être une exception au principe de la pesanteur, ils en sont une suite nécessaire, et qu'ils présentent une nouvelle confirmation de ce principe admirable.» [367]. LAPLACE, dans l'introduction à son mémoire, fait la différence avec les approches de ses prédécesseurs : «Ce qui distingue principalement cette théorie de celles qui l'ont précédée est la considération des inégalités dépendantes des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Les géomètres n'avaient eu égard, dans ces recherches qu'aux pre-

mières puissances de ces quantités ; mais j'ai reconnu que cette approximation est insuffisante dans la théorie de Jupiter et de Saturne, et que leurs principales inégalités sont données par les approximations suivantes, qu'il faut étendre jusqu'aux quatrième puissances des excentricités. Les moyens mouvements de ces deux planètes sont tels que cinq fois celui de Saturne est à fort peu près égal à deux fois celui de Jupiter, et ce rapport produit dans les éléments de leurs orbites des variations considérables dont les périodes embrassent plus de neuf siècles et qui sont la source des grands dérangements observés par les astronomes» [367]. Par une coïncidence heureuse, la très longue période de ces inégalités simplifia leur détermination. Elles devenaient détectables dans la théorie comme l'effet des petits diviseurs.

Les développements mathématiques dans ce mémoire ne présentent rien de nouveau car la théorie mathématique du problème des trois corps avait pris sa forme définitive vers le milieu du XVIII^e siècle. En outre, LAPLACE avait donné une présentation détaillée déjà dans son mémoire de 1784 [373].

En désignant par :

$$\lambda = \frac{1}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.221)$$

les équations du mouvement par la masse m représentant Jupiter, deviennent :

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} + \frac{m'x'}{r'^3} - m' \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad (7.222)$$

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} + \frac{m'y'}{r'^3} - m' \frac{\partial \lambda}{\partial y} \quad (7.223)$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{(1+m)z}{r^3} + \frac{m'z'}{r'^3} - m' \frac{\partial \lambda}{\partial z} \quad (7.224)$$

La considération du mouvement de Saturne autour du Soleil donnera trois équations analogues, avec m' la masse de Saturne.

LAPLACE procède alors à l'établissement des intégrales de la force vive et des moments cinétiques qu'il combine algébriquement de différentes manières. Il introduit la fonction perturbatrice R avec :

$$R = \frac{r\sqrt{1-s'^2}}{r'^2} \cos(\nu' - \nu) - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\sqrt{1-s'^2} \cos(\nu' - \nu) + r'^2}} \quad (7.225)$$

le plan fixe de l'orbite primitive de m possédant les coordonnées x et y , ν l'angle formé par le rayon r et par l'axe fixe des x , ν' l'angle que la projection de r' sur le plan fixe fait avec l'axe des x et s' le sinus de la latitude héliocentrique de m' au-dessus de ce plan.

LAPLACE écrit aussi :

$$x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} + z \frac{\partial R}{\partial z} = r \frac{\partial R}{\partial r} \quad (7.226)$$

et il obtient pour les perturbations du rayon vecteur et de l'angle ν les expressions suivantes :

$$\frac{\partial r}{a} = \frac{\left(\begin{array}{l} +2 \cos \nu \int ndtr \sin \nu \int dR + \cos \nu \int ndtr^2 \sin \nu \frac{\partial R}{\partial r} \\ -2 \sin \nu \int ndtr \cos \nu \int dR - \sin \nu \int ndtr^2 \cos \nu \frac{\partial R}{\partial r} \end{array} \right)}{[1 - e^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.227)$$

$$\delta \nu = [1 - e^2]^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2rd\delta r + \delta r dr}{a^2 n dt} + 3a \int ndt \int dR + 2a \int ndtr \frac{\partial R}{\partial r} \right\} \quad (7.228)$$

LAPLACE arrive aux mêmes équations quinze ans plus tard dans le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126]. Il souligne que les expressions 7.227 et 7.228 donnent les perturbations dans une forme finie, exempte de dérivations, ce qui est particulièrement intéressante pour la détermination des perturbations des comètes, comme celles-ci ne peuvent être calculées que par des quadratures.

Dans le cas des planètes, les excentricités et les inclinaisons des orbites sont très petites, ce qui rend possible le développement de la fonction R en série semi-convergente en partant de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + \frac{n^2 a^3}{r^3} r\delta r + 2 \int dR + r \frac{\partial R}{\partial r} \quad (7.229)$$

décrivant la perturbation du rayon vecteur. Toutes les possibilités résulteront des multiples manières de développer la fonction perturbatrice, et LAPLACE extrait d'abord les perturbations dépendant de puissances et de produits de l'excentricité et de l'inclinaison, de dimensions plus grandes que deux. Dans ce développement, LAPLACE utilise $(nt + \varepsilon)$ pour représenter la longitude moyenne de m , mesurée à partir de l'axe x ; $(n't + \varepsilon')$ pour la longitude moyenne de m' ; $\bar{\omega}$ est la longitude de l'aphélie de m , et $\bar{\omega}'$ celle de m' . En supposant la nature elliptique des orbites, r , ν , r' , ν' sont donnés par les formules suivantes dans le cas du premier ordre des excentricités :

$$r = a [1 + e \cos(nt + \varepsilon - \bar{\omega})] \quad (7.230)$$

$$\nu = nt + \varepsilon - 2e \sin(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) \quad (7.231)$$

$$r' = a' [1 + e' \cos(n't + \varepsilon' - \bar{\omega}')] \quad (7.232)$$

$$\nu' = n't + \varepsilon' - 2e' \sin(n't + \varepsilon' - \bar{\omega}') \quad (7.233)$$

LAPLACE, en vue de la dérivation des inégalités séculaires, pose :

$$h = e \sin \bar{\omega} \quad k = e \cos \bar{\omega} \quad (7.234)$$

$$h' = e' \sin \bar{\omega}' \quad k' = e' \cos \bar{\omega}' \quad (7.235)$$

Après plusieurs transformations algébriques, LAPLACE parvient à un développement en série de TAYLOR pour R :

$$\begin{aligned}
 R = & S + a[h \sin(nt + \varepsilon) + k \cos(nt + \varepsilon)] \frac{\partial R}{\partial r} \\
 & + a'[h' \sin(n't + \varepsilon') + k' \cos(n't + \varepsilon')] \frac{\partial R}{\partial r'} \\
 & + [2h \cos(nt + \varepsilon) - 2k \sin(nt + \varepsilon)] \frac{\partial R}{\partial \nu} \\
 & + [2h' \cos(n't + \varepsilon') - 2k' \sin(n't + \varepsilon')] \frac{\partial R}{\partial \nu'} \quad (7.236)
 \end{aligned}$$

où r à été remplacé par a , r' par a' , ν par $nt + \varepsilon$ et ν' par $n't + \varepsilon'$; l'expression S représente ce que R devient si ces substitutions sont faites de sorte que l'on a :

$$S = \frac{a}{a'^2} \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2aa' \cos(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + a'^2}} \quad (7.237)$$

Cette fonction peut être développée dans une suite ordonnée par rapport aux cosinus de l'angle $(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$ et de ses multiples et l'on obtient :

$$S = \frac{1}{2} \sum A^{(i)} \cos i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) \quad (7.238)$$

avec (i) variant de $-\infty$ à $+\infty$, $A^{(-i)}$ étant égal à $A^{(i)}$.

En tenant compte de la nature de R , on peut écrire :

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = a \frac{\partial R}{\partial a} \quad (7.239)$$

de plus, cette quantité étant une fonction homogène en r et r' de la dimension -1 , on a :

$$r \frac{\partial R}{\partial r} + r' \frac{\partial R}{\partial r'} = -R \quad (7.240)$$

De plus, on obtient :

$$r \frac{\partial R}{\partial r} = a \frac{\partial R}{\partial a} \quad (7.241)$$

et puisque R est fonction de $\nu' - \nu$

$$\frac{\partial R}{\partial \nu'} = - \frac{\partial R}{\partial \nu} \quad (7.242)$$

l'expression 7.241 provient du changement de r en a et r' en a' , ν dans $nt + \varepsilon$ et ν' dans $n't + \varepsilon'$

et en modifiant 7.242 en :

$$\frac{\partial R}{\partial \nu} = \frac{1}{n - n'} \frac{\partial S}{\partial t} \quad (7.243)$$

on obtient pour R l'équation suivante qui est exacte pour la première puissance des excentricités :

$$\begin{aligned} R = & S + a \frac{\partial S}{\partial a} [h \sin(nt + \varepsilon) + e \cos(nt + \varepsilon)] \\ & - \left(S + a \frac{\partial S}{\partial a} \right) [h' \sin(n't + \varepsilon) + l' \cos(n't + \varepsilon')] \\ & + \frac{1}{n - n'} \frac{\partial S}{\partial t} \\ & \cdot [h \cos(nt + \varepsilon) - l \sin(nt + \varepsilon) - h' \cos(n't + \varepsilon') + l' \sin(n't + \varepsilon')] \end{aligned} \quad (7.244)$$

Afin de trouver les inégalités, indépendantes des excentricités, LAPLACE utilise les équations 7.229 et 7.228 tout en remplaçant R par S , r par a , δr par $a\mu$ et $\delta \nu$ par V . L'opérateur d , appliqué à R , signifie une différentiation par rapport à $nt + \varepsilon$, comme l'orbite non perturbée est assimilée à un cercle. L'intégrale de R se calcule avec t comme variable. Les équations 7.229 et 7.228 prennent alors la forme, avec la séparation :

$$\frac{\delta r}{a} = \mu + \mu_1 \quad \delta \nu = V + V_1 \quad (7.245)$$

μ et V étant les parties de $\frac{\delta r}{a}$ et $\delta \nu$ indépendantes des excentricités des orbites, et μ_1 et V_1 étant les parties de ces mêmes quantités qui en dépendent :

$$0 = \frac{d^2 \mu}{dt^2} + n^2 \mu + 2n^2 g + \frac{n^2 a^2}{2} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \frac{n^2}{2} \sum \left(a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2naA^{(i)}}{n - n'} \right) \cos W \quad (7.246)$$

$$\begin{aligned} V = & 3gnt + a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} nt + \frac{2d\mu}{ndt} - \sum \frac{3n^2}{2i(n - n')^2} a A^{(i)} \sin W \\ & - \sum \frac{na^2}{i(n - n')} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} \sin W \end{aligned} \quad (7.247)$$

g est une constante arbitraire ajoutée à l'intégrale $a \int dR$. Pour déterminer cette constante, LAPLACE suppose que nt représente le moyen mouvement sidéral de m . Dans ce cas, le terme proportionnel au temps de l'expression V doit disparaître et cette condition donne

$$g = -\frac{1}{3}a^2 \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} \quad (7.248)$$

La solution de l'équation différentielle de u donne :

$$u = \frac{a^2}{6} \frac{\partial A^{(0)}}{\partial a} + \sum \frac{\frac{n^2 a^2}{2} \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{n^3 a A^{(i)}}{n-n'}}{i^2(n-n')^2 - n^2} \cos W \quad (7.249)$$

Une fois u trouvé, il est simple de calculer $\frac{du}{dt}$ et de substituer cette valeur dans l'expression de V :

$$V = \sum \left[\frac{n^2}{2i(n-n')^2} a A^{(i)} + \frac{n^3 a^2 \frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} + \frac{2n^4 a A^{(i)}}{n-n'}}{i(n-n') [i^2(n-n')^2 - n^2]} \right] \sin W \quad (7.250)$$

W , dans toutes ces expressions, remplace : $i(nt't - nt + \varepsilon' - \varepsilon)$. La détermination des seconds termes de 7.245 est plus longue et plus complexe. LAPLACE, après de longs calculs, obtient :

$$\begin{aligned} u_1 = & f \sin(nt + \varepsilon) + f' \cos(nt + \varepsilon) \\ & + \frac{1}{2}(hB + h'C)nt \cos(nt + \varepsilon) - \frac{1}{2}(kB + k'C)nt \sin(nt + \varepsilon) \\ & + \sum n^2 \left\{ \frac{hD^{(i)} + h'E^{(i)}}{[n - i(n-n')]^2 - n^2} \sin(W + nt + \varepsilon) \right. \\ & \left. + \frac{kD^{(i)} + k'E^{(i)}}{[n - i(n-n')]^2 - n^2} \cos(W + nt + \varepsilon) \right\} \quad (7.251) \end{aligned}$$

f et f' sont deux constantes arbitraires, B et C sont des constantes dépendantes de $A^{(0)}$, $A^{(1)}$ et de leurs dérivées par rapport à a , $D^{(i)}$ et $E^{(i)}$ représentent des séries dépendant de i et aussi de a , n et n' , ainsi que des $A^{(i)}$ et de leurs dérivées par rapport à a . Les sommes $\sum$ s'étendent à toutes les valeurs de i sauf $i = 0$

Pour V_1 , LAPLACE obtient :

$$\begin{aligned} V_1 = & -(hB + h'C)nt \sin(nt + \varepsilon) - (kB + k'C)nt \cos(nt + \varepsilon) \\ & + n \sum \left\{ \frac{kF^{(j)} + k'G^{(j)}}{n - i(n-n')} \sin(W + nt + \varepsilon) - \frac{hF^{(j)} + h'G^{(j)}}{n - i(n-n')} \cos(W + nt + \varepsilon) \right\} \quad (7.252) \end{aligned}$$

Ici $F^{(j)}$ et $G^{(j)}$ sont de nouvelles séries de constantes dépendant de i mais aussi de n , n' et $A^{(j)}$ et les dérivées par rapport à a . Les constantes f et f' ont été déterminées de façon que V_1 contient les fonctions de sinus et cosinus de $nt + \varepsilon$ seulement où elles sont multipliées par l'angle nt . En conséquence, les

deux premiers termes de 7.252 peuvent être reformulés comme des variations séculaires des excentricités et des longitudes des aphélies des planètes perturbées et perturbatrices et que e et ϖ sont à comprendre comme valeurs initiales au temps $t = 0$.

LAPLACE groupe alors les résultats qu'il a trouvés. Il nomme (r) et (ν) les parties du rayon vecteur r et de la longitude ν qui dépendent du mouvement elliptique, pour (s) la partie de la latitude s que l'on trouve en supposant que la planète m se meut sur le plan de son orbite primitive et il écrit :

$$r = (r) + m'a(\mu + \mu_1) \quad (7.253)$$

$$\nu = (\nu) + m'(V + V_1) \quad (7.254)$$

$$s = (s) + m'\delta s \quad (7.255)$$

« Ces expressions renferment toute la théorie des planètes, lorsqu'on néglige les carrés et les produits des masses perturbatrices, ainsi que les carrés et les produits des excentricités et des inclinaisons des orbites, ce qui est presque toujours permis ; elles ont d'ailleurs l'avantage d'être sous une forme très simple qui laisse facilement apercevoir la loi de leurs différents termes. » [367]

LAPLACE explique alors le pourquoi d'un schéma qu'il a découvert derrière les différents termes. « Les approximations dans lesquelles on aurait égard aux carrés et aux puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites introduiraient de nouveaux termes qui dépendraient de nouveaux arguments ; elles reproduiraient encore les arguments que donnent les approximations précédentes, mais avec des coefficients de plus en plus petits, suivant cette loi : si l'on nomme quantités du premier ordre les excentricités et les inclinaisons des orbites, quantités du second ordre leurs carrés et leurs produits deux à deux, et ainsi de suite, un argument qui, dans les approximations successives, se trouve pour la première fois parmi les quantités de l'ordre de r , ne sera reproduit que par les quantités des ordres $r + 2$, $r + 4$, ... »

Il suit de là que les coefficients des termes de la forme :

$$t \frac{\sin}{\cos} (nt + \varepsilon) \quad (7.256)$$

qui entrent dans les expressions de r , ν et s sont approchés jusqu'aux quantités du troisième ordre, c'est-à-dire que l'approximation dans laquelle on aurait égard aux carrés et aux produits des excentricités et des inclinaisons des orbites ne changerait point leurs valeurs. On voit ainsi qu'ils ont toute la précision que l'on peut désirer, et ce qu'il est d'autant plus essentiel d'observer, que de ces coefficients dépendent les variations séculaires des orbites.

Les différents termes des expressions de r , ν , et s sont compris dans la forme :

$$K \frac{\sin}{\cos} [i(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + rnt + r\varepsilon] \quad (7.257)$$

i étant un nombre entier positif ou négatif ou zéro et r étant un nombre entier positif ou zéro ; K est une fonction des excentricités et des inclinaisons des orbites, de l'ordre de r . On peut juger par là de quel ordre est un terme qui dépend d'un angle donné : pour savoir, par exemple, dans la théorie de Jupiter et de Saturne, de quel ordre est le terme qui dépend de l'angle $5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon$, on mettra cet angle sous cette forme :

$$5(n't - nt + \varepsilon' - \varepsilon) + 3nt + 3\varepsilon \quad (7.258)$$

et, comme alors $r = 3$, il en résulte que le terme dont il s'agit dépend des cubes et des produits de trois dimensions des excentricités et des inclinaisons des orbites [367]. Afin de réduire les résultats analytiques obtenus jusque là, LAPLACE détermine les valeurs numériques des quantités $A^{(i)}$ et de leurs dérivées. A cette fin, il considère le développement en série de :

$$(1 - 2\alpha \cos \theta + \alpha^2)^{-q} = \frac{1}{2}b_q^{(0)} + b_q^{(1)} \cos \theta + b_q^{(2)} \cos 2\theta + \dots \quad (7.259)$$

déjà examiné dans son mémoire [366] tout en s'appuyant sur des résultats de LAGRANGE. Finalement LAPLACE arrive aux formules :

$$A^{(i)} = -\frac{b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{a'} \quad i \neq 1 \quad (7.260)$$

$$A^{(i)} = \frac{a}{a'^2} - \frac{1}{a'}b_{\frac{1}{2}}^{(i)} \quad \text{pour } i = 1 \quad (7.261)$$

Les dérivées deviennent :

$$\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} = -\frac{1}{a'^2} \frac{\partial b_{\frac{1}{2}}^{(i)}}{\partial \alpha} \quad , i \neq 1 \quad (7.262)$$

$$\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a} = \frac{1}{a'^2} \left(1 - \frac{\partial b^{(i)}}{\partial \alpha} \right) \quad , i = 1 \quad (7.263)$$

Des formules similaires peuvent être obtenues pour des dérivées d'un ordre plus élevé, et il est dorénavant possible de calculer la valeur numérique de la fonction perturbatrice R pour le cas où seulement l'excentricité est prise en compte au premier degré.

LAPLACE développe alors sa théorie des inégalités séculaires, en suivant LAGRANGE de très près [364]. Il rappelle encore une fois que l'intégration des équations du mouvement peut introduire des « arcs de cercle » qui doivent à la longue altérer de manière sensible les éléments de l'orbite si l'on ne parvient pas à les réduire en les identifiant à des approximations : « ... ils ne sont que le développement en séries de fonctions périodiques qui croissent avec beaucoup de lenteur ». [367]

LAPLACE donne l'expression de la longitude ν de la planète m en ne conservant que la longitude moyenne et les termes multipliés par les sinus et les cos de $nt + \varepsilon$, dans la forme :

$$\begin{aligned}\nu = & \quad nt + \varepsilon - 2l \sin(nt + \varepsilon) + 2h \cos(nt + \varepsilon) \\ & - m'(hB + h'C)nt \sin(nt + \varepsilon) \\ & - m'(lB + l'C)nt \cos(nt + \varepsilon)\end{aligned}\quad (7.264)$$

Il considère alors les «*arcs de cercle*» dans cette expression comme résultant du développement de l et de h en séries, et il parvient à exprimer les variations de l et de h sous forme d'une équation différentielle du premier ordre, et de donner les expressions des variations de l'excentricité et des aphélies sous forme d'une première approximation périodique :

$$\delta e = [0, 1] i e' \sin(\bar{\omega}' - \bar{\omega}) \quad (7.265)$$

$$\delta \bar{\omega} = i \left\{ (0, 1) - [0, 1] \frac{e'}{e} \cos(\bar{\omega}' - \omega) \right\} \quad (7.266)$$

LAPLACE estime que ces expressions sont exactes pour une période de deux ou trois siècles avant et après l'époque correspondant à $i = 0$.

La matière innovatrice de tout le mémoire [367] est donnée dans le sous-chapitre : «*Des perturbations de Jupiter et de Saturne qui dépendent des carrés et des puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites*». LAPLACE constate d'abord que : «*Les rapports des moyens mouvements de Jupiter et de Saturne rendent les approximations précédentes insuffisantes et forcent de les étendre aux carrés et aux puissances supérieures des excentricités et des inclinaisons des orbites. Il se rencontre dans cette théorie des inégalités dépendantes de ces puissances et qui, par les intégrations, acquièrent de grands diviseurs et deviennent par là très sensibles*». [367]

LAPLACE propose une méthode abrégée en vue de calculer ces inégalités. Il part des équations 7.227 et 7.228 et il suppose que dR renferme un terme constant m , le sinus d'un angle proportionnel au temps et croissant avec une grande lenteur, de sorte que, en exprimant cet angle par $\alpha t + l$, α soit un très petit coefficient ; l'intégrale double : $\int n dt \int dR$ contiendra alors ou bien un terme proportionnel au carré du temps, ou bien un terme dépendant de l'angle $\alpha t + \beta$ et qui est divisible par α^2 . LAPLACE montre que la première possibilité est un cas particulier de la seconde dans le cas où α devient égal à 0. Il examine tous les cas où α est très petit ou égal à zéro et revoit les expressions pour δr et $\delta \nu$ sous ce point de vue.

Il identifie dans l'expression 7.227 deux intégrales doubles qui répondent à ses critères. Après plusieurs transformations, LAPLACE arrive aux expressions suivantes :

$$\int ndtr \cos \nu \int dR = \frac{3}{2}ae \int ndtdR \quad (7.267)$$

$$\int ndtr \sin \nu \int dR = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ae} \frac{1}{2} \left(r^2 \int dR - \int r^2 dR \right) \quad (7.268)$$

Et, en se confinant aux termes ayant α^2 pour diviseur dans l'expression 7.227, celle-ci devient :

$$\frac{\delta r}{a} = -\frac{3ae \sin \nu}{\sqrt{1-e^2}} \int ndt \int dR \quad (7.269)$$

Si l'on substitue, au lieu de $\frac{ae \sin \nu}{\sqrt{1-e^2}}$, sa valeur $-\frac{dr}{ndt}$, on obtient :

$$\frac{\delta r}{a} = \frac{3dr}{ndt} \int ndt \int dR \quad (7.270)$$

et le rayon vecteur de la planète devient :

$$(r) + \left(\frac{dr}{ndt} \right) 3am' \int ndt \int dR \quad (7.271)$$

(r) et $\left(\frac{dr}{ndt} \right)$ étant les expressions de r et $\frac{dr}{ndt}$ relatives au moment non perturbé. «Ainsi pour avoir égard, dans l'expression du rayon vecteur, à la partie des perturbations qui est divisée par α^2 , il suffit d'augmenter de la quantité $3am' \int ndt \int dR$ la longitude moyenne $nt + \varepsilon$ de l'expression du rayon vecteur dans l'hypothèse elliptique» [367]

Un développement analogue est obtenu pour la longitude ν sous la forme :

$$\nu = (\nu) + \left(\frac{d\nu}{ndt} \right) 3am' \int ndt \int dR \quad (7.272)$$

Comme avant (ν) et $\left(\frac{d\nu}{ndt} \right)$ sont les valeurs correspondant au cas non perturbé.

Le terme constant de l'expression de $\left(\frac{d\nu}{ndt} \right)$ développée en série de cosinus de l'angle $nt + \varepsilon - \bar{\omega}$ et de ses multiples est égal à 1. Voilà pourquoi l'expression de la longitude contient le terme $3am' \int ndt \int dR$. Si l'on supposait que dR contenait un terme constant de la forme $kndt$, il s'ensuivrait que ν posséderait un terme séculaire égal à $\frac{3}{2}am'kn^2t^2$. Or, lorsque les orbites sont peu excentriques et peu inclinées les unes sur les autres, R peut toujours se réduire dans une suite infinie de sinus et de cosinus d'angles croissant proportionnellement au temps. On peut la représenter de manière générale par les termes

$$k \left(\frac{\sin}{\cos} \right) (int + i'n't' + A) \quad (7.273)$$

i et i' étant des nombres entiers positifs ou négatifs, ou zéro. La différentielle de ce terme, prise uniquement par rapport au moyen mouvement nt de la planète m donnera dR sous la forme :

$$\pm ikndt \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} (int + i'n't' + A) \quad (7.274)$$

Celle-ci est constante uniquement au cas où $in + i'n' = 0$, à savoir si les mouvements moyens de m et m' sont commensurables entre eux. LAPLACE peut alors se référer à LAGRANGE [374] qui avait déjà constaté qu'une telle commensurabilité n'existe pas dans le système solaire qui serait due à leur interaction mutuelle.

LAPLACE revient alors au cas où α est très petit, c'est-à-dire où les moyens mouvements de deux planètes, sans être exactement commensurables, approchent cependant beaucoup de l'être. Il conclut que dans ce cas, ils doit exister des inégalités d'une longue période qui, si elles ne sont pas connues, pourraient donner lieu à penser que les mouvements de ces planètes sont assujettis à des équations séculaires. LAPLACE applique ce résultat aux planètes Jupiter et Saturne dont les mouvements moyens sont tels que cinq fois celui de Saturne est, à fort peu près, égal à deux fois celui de Jupiter «*ce qui produit deux grandes inégalités dont la période est d'environ neuf cent dix-neuf ans, et qui, n'ayant pas été connues jusqu'à ce moment, ont fait croire aux astronomes que le mouvement de Jupiter s'accélérait et que celui de Saturne se ralentissait de siècle en siècle*». [367]

Afin de déterminer analytiquement cette inégalité, dans laquelle $(5n' - 2n)^2$ apparaît comme diviseur, LAPLACE suppose que la part de R dépendant de l'angle $(5n' - 2n)t$ peut être exprimée par :

$$k \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - k' \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \quad (7.275)$$

En ne tenant en compte que cette partie de R et en la dérivant uniquement par nt , il obtient :

$$dR = -2kndt \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) - 2k'ndt \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \quad (7.276)$$

d'où l'on peut obtenir :

$$3am' \int ndt \int dR = -6am' \int \int n^2 dt^2 \\ \cdot \left[k \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) + k' \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \quad (7.277)$$

Les valeurs k et k' sont fonction des cubes respectivement de produits cubiques des excentricités et des inclinaisons des orbites. Elles dépendent aussi des positions des nœuds et des aphélies, et tous ces éléments sont sujets à des variations séculaires de l'ordre de grandeur de 10^4 à 10^5 années. Et afin de tenir

compte de cette variation séculaire, LAPLACE introduit les premières dérivées par rapport au temps dans l'intégrale de l'expression

$$3am' \int n dt \int dR \quad (7.278)$$

et il obtient :

$$\begin{aligned} \frac{6am'n^2}{(5n' - 2n)^2} \cdot & \left[\left(k' - 2 \frac{\left(\frac{\partial k}{\partial t} \right)}{5n' - 2n} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \left(k + 2 \frac{\left(\frac{\partial k'}{\partial t} \right)}{5n' - 2n} \right) \cos(5n't - 2n + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (7.279)$$

Afin de vérifier ce résultat, il suffit de dériver 7.279 à deux reprises par rapport au temps t en considérant k et k' comme fonctions du temps mais en ignorant les dérivées égales ou supérieures au deuxième ordre. L'intégrale 7.279 est la correction de la longitude moyenne $nt + \varepsilon$ et du rayon vecteur r obtenus pour le mouvement elliptique.

La quantité correspondante pour l'inégalité de m' , c'est-à-dire Saturne, est obtenue de la même façon et s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{15a'mn'^2}{(5n' - 2n)^2} \cdots & \left[\left(k' - 2 \frac{\left(\frac{\partial k}{\partial t} \right)}{5n' - 2n} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right. \\ & \left. + \left(k + 2 \frac{\left(\frac{\partial k}{\partial t} \right)}{5n' - 2n} \right) \cos(5n't - 2n + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (7.280)$$

LAPLACE fait remarquer que la grande inégalité de Saturne a le signe contraire à celle de Jupiter de façon que si l'une des planètes diminue de vitesse, l'autre accélère et le rapport des vitesses est de $2n^2am'$ à $5n'^2a'm$, qui est approximativement de 3 à 7.

Il reste ensuite à déterminer les valeurs numériques de k et k' , un processus si long que LAPLACE omet les détails aussi bien dans le mémoire que nous discutons que dans le « *Traité de Mécanique Céleste* » [126]. Il s'agit d'abord de développer la fonction perturbatrice R en série en tenant compte des troisièmes dérivées des quatre variables, r, r', ν, ν' ainsi que de l'angle mesurant les inclinaisons différentes des deux orbites. LAPLACE part avec l'expression générale de R et trouve, après des considérations trigonométriques, que les seuls termes à retenir pour le développement en série avec l'argument $(\gamma n't - int + \gamma \varepsilon' - i\varepsilon)$ sont :

$$-\frac{1}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu'_1 - \nu) + r'^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(rr' \frac{\gamma^2}{4}\right) \cos(\nu' + \nu - 2\Pi)}{[r^2 - 2rr' \cos(\nu'_1 - \nu) + r'^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (7.281)$$

ν'_1 est la longitude de Saturne, comptée sur son orbite et Π la distance du nœud de Saturne à la ligne fixe d'où l'on compte les ν .

À travers plusieurs développements en série et en s'appuyant sur des égalités trigonométriques, LAPLACE arrive aux expressions suivantes pour k et k' :

$$\begin{aligned} k = & M^{(0)} e'^3 \sin 3\bar{\omega}' + M^{(1)} e'^2 e \sin(2\bar{\omega}' + \omega) \\ & + M^{(2)} e' e^2 \sin(\bar{\omega}' + 2\bar{\omega}) + M^{(3)} e^3 \sin 3\bar{\omega} \\ & + M^{(4)} e' \gamma^2 \sin(2\Pi + \bar{\omega}') + M^{(5)} e \gamma^2 \sin(2\Pi + \bar{\omega}) \end{aligned} \quad (7.282)$$

$$\begin{aligned} k' = & -M^{(0)} e'^3 \cos 3\bar{\omega}' - M^{(1)} e'^2 e \cos(2\bar{\omega}' + \omega) \\ & - M^{(2)} e' e^2 \cos(\bar{\omega}' + 2\bar{\omega}) - M^{(3)} e^3 \cos 3\bar{\omega} \\ & - M^{(4)} e' \gamma^2 \cos(2\Pi + \bar{\omega}') - M^{(5)} e \gamma^2 \cos(2\Pi + \bar{\omega}) \end{aligned} \quad (7.283)$$

Les dérivées de k et k' peuvent être calculées en tenant compte des variations séculaires de e , $\bar{\omega}$, e' , $\bar{\omega}'$ et de γ . Ce terme étant la tangente de l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur celle de Jupiter, LAPLACE développe les expressions $M^{(i)}$ en fonction des valeurs $b_{\frac{1}{2}}^{(i)}$ introduits déjà plus tôt par lui-même et par LAGRANGE et qui sont fonction de α .

À côté de la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, dont les expressions sont données par 7.279 et 7.280, LAPLACE indique encore quatre autres inégalités, à savoir dans la longitude de Jupiter :

$$+2'39'' \sin(3nt - 5n't - 41^\circ 56') \quad (7.284)$$

et :

$$+58'' \sin(5n't - nt - 34^\circ 31'33'') \quad (7.285)$$

La longitude de Saturne subit les perturbations :

$$-13'16'' \sin(2nt - 4n't - 2^\circ 27'4'') \quad (7.286)$$

et :

$$-2'40'' \sin(6n't - 2nt - 60^\circ 30'16'') \quad (7.287)$$

La réflexion qui a mis LAPLACE sur la trace de ces inégalités est la prise en compte du fait hypothétique que $2n$ serait exactement égal à $5n'$. Dans ce cas, la variable de l'argument prendrait la valeur de nt dans le cas de Jupiter et de $n't$ pour Saturne, et l'inégalité constituerait une contribution à l'équation du centre. LAPLACE montre que ces inégalités proviennent de variations

dans les éléments des orbites elliptiques et il détermine les coefficients de ces inégalités à différentes époques pour trouver ainsi la loi de leurs variations. Toute la partie restante du mémoire [367] est consacrée à la détermination des valeurs numériques pour les orbites des deux planètes. LAPLACE concentre son intérêt d'abord sur Saturne et procède à une correction des tables de HALLEY. Pour Jupiter, il examine les tables publiées par VARGENTIN et trouve que pour l'époque où elles ont paru, elles représentaient assez bien les observations, mais elles souffrent du fait que les grandes inégalités qui altèrent le moyen mouvement de cette planète, son excentricité et la position de son aphélie étaient inconnues à l'auteur.

LAPLACE fixe l'époque à laquelle il rapporte ses calculs au milieu du XVIII^e siècle ou le commencement de 1750 à Paris, temps moyen. Il obtient une table des positions de Saturne qu'il contrôla en les comparant à 24 observations entre 1591 et 1785. Afin de compenser l'inexactitude relative de ces observations, LAPLACE écrivit 24 équations de condition pour le mouvement de Saturne que l'on peut considérer comme un premier exemple d'une régression linéaire multiple. La solution de ce système donna à LAPLACE les valeurs ε' , ω' et e' de l'orbite de Saturne permettant de construire les tables avec comme seule base la théorie de la gravitation. La seconde partie du mémoire [367] s'ouvre sur la constatation que la théorie de Saturne contient encore trois autres petites inégalités dont la somme était plus petite qu'une seconde d'arc. Dans le restant du texte, LAPLACE applique ses méthodes analytiques à Jupiter et compare les calculs aux observations.

Tous ces calculs «*pénibles*» n'auraient pu être faits sans Jean-Baptiste DELAMBRE, jeune astronome et assistant de LALANDE, professeur au Collège de France. Il se porta volontaire pour reprendre tout le corpus des dates et calculs de LAPLACE. Le résultat fut ses «*Tables de Jupiter et de Saturne*» [375] présentées à l'Académie en avril 1789. Trois années plus tard, LALANDE les incorpora dans son «*Astronomie*» [376], l'œuvre de référence pour l'astronomie pratique.

Le mémoire laplacien sur la «*Théorie de Jupiter et de Saturne*» [367] marque un tournant dans la mécanique céleste. Non seulement LAPLACE montra que les anomalies dans les mouvements de Jupiter et de Saturne étaient explicables par la loi de la gravitation newtonienne mais il ouvrit le chemin vers une amélioration qualitative de l'analyse en incorporant les perturbations supérieures au premier degré. Cette ouverture mena très vite à une application des nouvelles méthodes aux autres planètes du système solaire, par les astronomes européens. Ce développement n'aurait pourtant pu se faire sans les travaux d'EULER qui le premier avait misé sur l'application exclusive de la loi de la gravitation newtonienne en vue d'expliquer la totalité des perturbations des planètes et satellites du système solaire.

Mais il restait encore la Lune, le dernier membre de la famille solaire qui posait des problèmes quant à l'application de la loi de la gravitation universelle. HALLEY avait découvert une accélération du mouvement moyen de notre satellite et depuis lors, les astronomes appliquèrent une correction aux tables de la longitude moyenne proportionnelle au carré du temps. Une explication

du phénomène n'existait pas et l'on se contentait d'hypothèses ad hoc comme la résistance de l'éther ou l'action des comètes.

L'Académie Royale des Sciences avait mis un prix en 1774 pour trouver une explication au phénomène et il fut décerné à LAGRANGE pour son mémoire : «*Sur l'équation séculaire de la Lune*» [377]. Celui-ci est antérieur de 18 années au Mémoire sur le même sujet que l'auteur présenta à l'Académie de Berlin [378]. LAGRANGE dit d'abord que la question est double : Dans la première partie «*on demande par quel moyen on peut s'assurer qu'il ne résultera aucune erreur sensible des quantités qu'on aura négligées dans le calcul des mouvements de la Lune*» [378]. Dans la seconde partie de la question, il est demandé : «*si, en ayant égard non seulement à l'action du Soleil et de la Terre sur la Lune, mais encore, s'il est nécessaire de prêter l'attention à l'action des autres planètes sur ce satellite, et même à la figure non sphérique de la Lune et de la Terre, on peut expliquer, par la seule Théorie de la gravitation, pourquoi la Lune paraît avoir une équation séculaire, sans que la Terre en ait une sensible*». [378]

La question est donc posée dans toute sa généralité mais LAGRANGE ne donne pas de réponse décisive dans son mémoire.

Après une introduction sur l'historique de la question remontant jusqu'à NEWTON, LAGRANGE se limite expressément à la seconde partie de la question formulée par lui tout en précisant que l'incapacité de la théorie de la gravitation en vue d'expliquer le phénomène est un des derniers points douteux de celle-ci.

LAGRANGE, sur les traces de CLAIRAUT et de D'ALEMBERT, part du système, presque classique déjà, des équations différentielles pour le rayon vecteur x dans l'orbite et l'angle φ parcouru pendant le temps t , sans tenir compte de l'inclinaison de celle-ci. En introduisant $\frac{1}{x} = u$, ψ la force dirigée vers le centre des rayons vecteurs, Π la force perpendiculaire à r , il obtient :

$$0 = \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{M}{k^2} - \Omega \quad (7.288)$$

$$\Omega = \frac{\phi x^2 + \frac{\Pi x dx}{d\varphi} - \frac{2M}{k^2} \int \Pi x^3 d\varphi}{k^2 + 2 \int \Pi x^3 d\varphi} \quad (7.289)$$

$$\psi = \frac{M}{x^2} + \phi \quad (7.290)$$

où ϕ est la force perturbatrice.

LAGRANGE applique ces formules d'abord en supposant que la Lune se meut dans l'écliptique. Il obtient après quelques déductions les forces perturbatrices de l'action du Soleil sur la Lune.

– dans la direction du rayon

$$-\frac{S}{2\sigma^3}(1 + 3 \cos 2\eta)x - \frac{S}{4\sigma^4} \left(\frac{9 \cos \eta}{2} + 15 \cos 3\eta \right) x^2 \quad (7.291)$$

– dans la direction perpendiculaire au rayon :

$$-\frac{3S}{2\sigma^3}x \sin 2\eta - \frac{S}{8\sigma^4}(3 \sin \eta + 15 \sin 3\eta)x^2 \quad (7.292)$$

avec S la masse du Soleil, η l'élongation de la Lune au Soleil, σ le rayon vecteur de l'orbite du Soleil.

A ces forces, LAGRANGE ajoute celles provenant de l'attraction de la Terre en tenant compte de la non-sphéricité de sa forme. Celle-ci l'amène à de longues considérations sur l'attraction de corps non sphériques et leurs propriétés inertielles. Finalement, LAGRANGE obtient les expressions suivantes pour les forces dues à l'action d'une Terre non sphérique sur la Lune :

– en direction du rayon :

$$-\frac{3}{2} \frac{B + C \cos 2z}{x^4} - \frac{2D \sin z + E \sin 3z}{x^4} \quad (7.293)$$

– en direction perpendiculaire au rayon :

$$\frac{C \sin 2z}{x^4} - \frac{D \cos z + 3E \cos 3z}{2x^4} \quad (7.294)$$

Les coefficients B, C, D, E dépendent de la géométrie du sphéroïde terrestre et z est la longitude de la Lune comptée depuis l'équinoxe. LAGRANGE introduit les termes 7.291 à 7.294 dans les équations 7.288 à 7.290 et il les arrange afin d'isoler les expressions pouvant donner lieu à des termes séculaires. Auparavant, il transforme encore une fois l'équation 7.288 par un changement de variable :

$$\frac{1}{x} = u = \frac{1 + e \cos s + \nu}{l} \quad (7.295)$$

où ν est une quantité très petite, l la distance moyenne de la Lune et e l'excentricité de son orbite.

Après examen de tous les termes de Ω , LAGRANGE trouve l'expression suivante, étant une partie de $\frac{\Pi}{u^3}$, seule capable de donner des termes séculaires :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{9\varepsilon^2}{8\nu^2} \left(-\frac{2P}{4q^2-n^2} + \frac{5eV}{(2q-p)^2-n^2} \right) + \frac{CL}{2(4\bar{\omega}^2-n^2)} \right] \sin 2\alpha \\ & + \left[\frac{3\varepsilon \left(1 + \frac{3\varepsilon^2}{4} \right)}{8\nu^2\lambda} \left(\frac{5Q}{q^2-n^2} - \frac{15eX}{(q-p)^2-n^2} \right) - \frac{D}{2} \left(\frac{M}{\bar{\omega}^2-n^2} + \frac{eT}{2(\bar{\omega}-p)^2-n^2} \right) \right] \cos \alpha \\ & + \left(\frac{15\varepsilon^3}{16\nu^2\lambda} \frac{5R}{2(9q^2-n^2)} - \frac{3E}{2} \frac{N}{9\bar{\omega}^2-n^2} \right) \cos 3\alpha \end{aligned} \quad (7.296)$$

avec ε l'excentricité, λ la distance moyenne du Soleil ; $C, L, P, Q, V, M, T, R, E, N$ étant des fonctions algébriques ; ν le rapport du mouvement moyen de la Lune à celui du Soleil, $\bar{\omega}$ et q étant des quantités observationnelles.

LAGRANGE va donc examiner les équations du mouvement avec les termes 7.296 comme forces perturbatrices en vue de comparer les solutions qu'il va obtenir avec les observations.

Après des calculs longs, mais non trop compliqués, LAGRANGE arrive à une conclusion plutôt décevante : «*que l'équation séculaire de la Lune telle que*

les Tables de Mayer la donnent, ne peut être l'effet de la non-sphéricité de la Terre, ni celle de la Lune, ni de l'action des autres planètes sur la Lune, et par conséquent ne saurait être expliquée par le secours de la gravitation seule» [378]. Et LAGRANGE d'évoquer quelque autre cause comme la résistance de l'éther ou même de nier la réalité de cette inégalité parce qu'elle est appuyée sur des observations très anciennes pour lesquelles il est difficile de se faire une opinion sur leur exactitude.

LAPLACE jugeait comme un scandale que précisément la Lune se montrerait réticente à une explication de son accélération séculaire, et après plusieurs tentatives infructueuses, croit résoudre le problème dans son mémoire : «*Sur l'équation séculaire de la Lune*» [379] de 1788, le dernier dans la série de ses mémoires sur le mouvement planétaire. Comme il le déclara plus tard, il fut amené à sa solution pour la Lune par l'application de la théorie développée dans son mémoire sur Jupiter et Saturne.

LAPLACE demande d'abord quelle est la cause du phénomène : «*La gravitation universelle, qui nous a fait connaître si exactement les nombreuses inégalités de la Lune, rend-elle également raison de son équation séculaire ? Ces questions sont d'autant plus intéressantes à résoudre que, si l'on y parvient, on aura la loi des variations séculaires du mouvement de la Lune, qui nous est encore inconnue, car on sent bien que l'hypothèse d'une accélération proportionnelle aux temps, admise par les astronomes n'est approchée et ne doit point s'étendre à un temps illimité*» [379]

LAPLACE constate d'abord l'échec d'une explication de cette accélération séculaire par l'action du Soleil et des planètes sur la Lune ou par les figures non sphériques de ce satellite et de la Terre qui tous sont incapables de justifier l'altération du moyen mouvement de la Lune. Mais il est persuadé qu'une explication par la théorie de la pesanteur doit exister. Il écrit que : «*l'on ne peut voir sans regret l'équation séculaire de la Lune se refuser à cette théorie et faire seule exception à une loi générale et si simple dont la découverte, par la grandeur et la variété des objets qu'elle embrasse, fait tant d'honneur à l'esprit humain*» [379]

LAPLACE donne alors une explication basée sur la théorie newtonienne : «*L'équation séculaire de la Lune est due à l'action du Soleil sur ce satellite, combiné avec la variation de l'excentricité de l'orbite terrestre. Pour se former de cette cause, la plus juste idée que l'on puisse avoir sans le secours de l'Analyse, il faut observer que l'action du Soleil tend à diminuer la pesanteur de la Lune vers la Terre, et par conséquent à dilater son orbite, ce qui entraîne un ralentissement dans la vitesse angulaire. Quand le Soleil est périégée, son action devenue plus puissante agrandit l'orbite lunaire, mais cette orbite se contracte lorsque le Soleil étant vers son apogée, agit moins fortement sur la Lune. De là naît, dans le mouvement de ce satellite, l'équation annuelle dont la loi est exactement la même que celle de l'équation du centre du Soleil, à la différence près du signe, de sorte que l'une de ces équations diminue quand l'autre augmente*». [379]

LAPLACE explique ensuite que : «*l'action du Soleil sur la Lune varie encore*

par des nuances insensibles relatives aux altérations que l'orbite de la Terre éprouve de la part des planètes. On sait que l'attraction de ces corps change à la longue les éléments de l'ellipse que la Terre décrit autour du Soleil. Son grand axe est toujours le même, mais son excentricité, son inclinaison sur un plan fixe, la position de ses nœuds et son aphélie varient sans cesse. Or la force moyenne du Soleil, pour dilater l'orbe de la Lune, dépend du carré de l'excentricité de l'orbite terrestre ; elle augmente et diminue avec cette excentricité : il doit donc en résulter, dans le mouvement de la Lune, des variations contraires, analogues à l'équation annuelle, mais dont les périodes, incomparablement plus longues, embrassent un grand nombre de siècles. Maintenant que l'excentricité de l'orbite terrestre diminue, ces inégalités accélèrent le mouvement de la Lune ; elles le ralentiront quand cette excentricité, parvenue à son minimum, cessera de diminuer pour commencer à croître.» [379]

LAPLACE mentionne encore des équations séculaires dans le mouvement des nœuds et de l'apogée de la Lune avant de venir à l'influence de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique, dans laquelle il pense détecter des inégalités semblables à celles que produit la diminution de l'excentricité de l'orbite terrestre. Or, il trouve que l'orbite lunaire est ramenée sans cesse, par l'action du Soleil, à la même inclinaison sur celle de la Terre de sorte que ces variations ont le même ordre de grandeur que l'action du Soleil. LAPLACE conclut que : «*L'inégalité séculaire du mouvement de la Lune est périodique, mais il lui faut des millions d'années pour se rétablir.*» [379]

La période de cette inégalité lunaire est la plus grande que LAPLACE ait jamais déterminée, s'élevant à des millions d'années. Or, les calculs sont exacts et LAPLACE assure ses lecteurs que cette accélération séculaire sera renversée un jour grâce à la force gravitationnelle et que donc la Lune se retirera de la Terre et ne tombera donc jamais sur celle-ci. LAPLACE s'attaquera au même problème encore dans d'autres mémoires en 1798 et 1799 [380, 381] mais ce ne fut qu'au milieu du XIX^e siècle qu'une explication satisfaisante en tous les points pût être donnée, elle aussi basée sur la théorie de la gravitation.

La partie analytique du mémoire utilise les mêmes équations que celles mises au point par LAPLACE dans son mémoire sur Jupiter et Saturne [367] et il est donc inutile de les répéter dans le contexte de la Lune. LAPLACE termine son mémoire en recherchant des formules de correction et il donne pour l'accélération séculaire la valeur :

$$+11'', 135i^2 + 0'', 04398i^3 \quad (7.297)$$

avec i la valeur en 1700. Il donne également des formules analogues pour le moyen mouvement des nœuds et met en même temps en garde contre la validité de ces formules de correction qui ne sont pas applicables que pour un temps limité.

Le passage le plus important de tout le mémoire est donné juste avant la partie analytique et relate les convictions de LAPLACE concernant la stabilité du système solaire. Il est si important, non seulement pour les travaux laplaciens,

mais résume en quelque sorte l'acquis de la mécanique céleste classique : « J'ai donné dans un autre Ouvrage la théorie des équations séculaires de Jupiter et de Saturne, et j'ai prouvé qu'elles dépendent de deux grandes inégalités jusqu'à présent inconnues, et dont la période est d'environ neuf cent dix-huit ans. Si l'on réunit ces recherches à celles dont je présente ici les résultats, on aura une théorie complète de toutes les équations séculaires observées par les astronomes dans les mouvements célestes. J'ose espérer que l'on verra avec plaisir ces phénomènes, qui semblaient inexplicables par la loi de la pesanteur, ramenés à cette loi dont ils fournissent une confirmation nouvelle et frappante. Maintenant que leur cause est connue, l'uniformité des moyens mouvements de rotation et de révolution des corps célestes, et la constance de leurs distances moyennes aux foyers des forces principales qui les animent, deviennent des vérités d'observation et de théorie. J'ai fait voir ailleurs que, quelles que soient les masses des planètes et des satellites, par cela seul que tous ces corps tournent dans le même sens et dans des orbites peu excentriques et peu inclinés les uns aux autres, leurs inégalités séculaires sont périodiques. Ainsi le système du monde ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une très petite quantité. Il jouit, en vertu de sa constitution et de la loi de la pesanteur, d'une stabilité qui ne peut être détruite que par des causes étrangères ; et nous sommes certains que leur action est insensible depuis les observations les plus anciennes jusqu'à nos jours. Cette stabilité du système du monde, qui en assure la durée, est un des phénomènes les plus dignes d'attention, en ce qu'il nous montre dans le ciel, pour maintenir l'ordre de l'univers, les mêmes vues que la nature a si admirablement suivies sur la Terre pour conserver les individus et perpétuer les espèces. » [379]

-IX-

SI LAPLACE est le savant qui symbolise le mieux le retour à la « science normale » au sens de KUHN, c'est qu'il n'était pas l'homme d'une « révolution » spectaculaire, mais il a surtout contribué à perfectionner le cadre théorique de la théorie newtonienne. En effet, nous avons vu que la loi de la gravitation était, au courant du XVIII^e siècle, loin encore d'être admise de façon générale, ou de pouvoir expliquer l'ensemble des phénomènes dans le système solaire de manière rigoureuse. Si la gravitation a cessé d'être considérée comme mystérieuse, pour devenir au courant du XIX^e siècle une « cause » ne demandant pas davantage d'explications métaphysiques, ce fait est dû principalement à LAPLACE et à deux de ses œuvres : « *Le Traité de Mécanique céleste* » [126] et « *L'exposition du Système du Monde* » [359].

Ce dernier traité, initialement prévu comme somme des résultats qu'il avait obtenus en mécanique céleste, apparut d'abord en 1796 en pleine période révolutionnaire où beaucoup d'étudiants avaient quitté l'Ecole Normale et n'avaient

donc pas l'occasion d'écouter les cours de LAPLACE sur les sujets mathématiques et mécaniques qu'il avait annoncés. «*Sans aucun appareil de formules mathématiques, mais aussi sans développements dithyrambiques trop faciles et rebattus en cette matière, LAPLACE s'est proposé de faire comprendre à tout le monde l'histoire passionnante du ciel, et de montrer comment le principe de la pesanteur universelle suffit à rendre compte des phénomènes les plus délicats que l'observation révèle dans le mouvement des astres : il y a réussi merveilleusement et il serait superflu de chercher d'autres formules de louanges. Il a suivi ainsi à travers les âges le développement de l'astronomie, et cette partie de l'ouvrage n'est pas la moins intéressante ; suivant l'expression d'ARAGO, c'est le génie se faisant l'appréciateur impartial du génie*» [382]. LAPLACE n'épargne rien à ses lecteurs, si ce n'est les mathématiques et cela seulement en ce qui concerne les calculs et les formules, mais non le vocabulaire et le raisonnement. Ainsi, il définit de façon verbale les fonctions trigonométriques, les éléments des orbites, les dérivées et les intégrales. L'ouvrage n'est pas une tentative de vulgarisation mais est adressé à ses collègues scientifiques et reprend même des parties entières de ses mémoires de mécanique céleste. LAPLACE ne perdit jamais l'intérêt à son texte et il l'amenda constamment. Ainsi, il y eut cinq éditions de son vivant.

Le LIVRE I présente d'abord les phénomènes que tout observateur attentif peut voir dans le ciel pendant une nuit claire. Il parle de la forme ellipsoïdale de la Terre et de la variation de la gravitation en résultante. Tout le contenu de ce premier livre montre que LAPLACE n'est pas seulement un calculateur infatigable mais aussi un savant tourné vers les problèmes épistémologiques, trait que nous rencontrons aussi dans les livres suivants de «*L'exposition du Système du Monde*». Ainsi le LIVRE II donne une exposition des mouvements réels des planètes, des satellites et des comètes, et évalue l'étendue du système solaire. L'exposé de LAPLACE est si clair et si concis qu'il pourrait servir aussi aujourd'hui encore comme introduction à la mécanique céleste ; c'est un manuel des connaissances cosmologiques à la fin du XVIII^e siècle.

Dans le LIVRE III, LAPLACE fait une présentation complète de la mécanique rationnelle telle qu'elle existait à la fin du XVIII^e siècle, tout en se concentrant sur les problèmes hydrostatiques et astronomiques. LAPLACE, tout comme son prédécesseur D'ALEMBERT, avait des difficultés avec la définition de la notion de force et il assigne à «*la force d'un corps*» de préférence le moment cinétique : mv au lieu de $\frac{mdv}{dt}$, concept désigné par lui comme étant la «*force accélératrice*».

Le LIVRE IV résume les travaux de LAPLACE sur la mécanique de la gravitation. Il reprend en grande partie les introductions explicatives de ses différents mémoires. Les sujets sont les perturbations planétaires et surtout la grande inégalité de Jupiter et de Saturne, la forme du globe terrestre, l'attraction mutuelle des sphéroïdes, les anneaux de Saturne, la précession des équinoxes et la théorie de la Lune. LAPLACE énumère tous ces phénomènes en témoignage pour justifier la théorie de la gravitation.

C'est seulement dans le LIVRE V que LAPLACE expose des sujets non encore publiés avant. Les cinq premiers chapitres traitent de l'histoire de l'astronomie,

texte qui a trouvé un écho plutôt mitigé auprès de ses contemporains et fut largement dépassé par LALANDE et son «*Astronomie*» [376]. Le sixième et dernier chapitre contient l'hypothèse cosmologique de LAPLACE qui a contribué largement à sa célébrité de savant. En effet, elle est pure vision et non pas un résultat d'observation ou de calcul. L'hypothèse laplacienne est limitée au système solaire et il est presque certain qu'il ne connaissait pas l'écrit de KANT de 1758 [383] sur un sujet même plus vaste : les nébuleuses.

LAPLACE part du fait que les révolutions des planètes autour du Soleil se font toutes dans le même sens ; les révolutions des satellites se font également dans ce même sens et à peu près dans le même plan que le plan équatorial de leur planète mère ; en plus, tous ces corps tournent à peu près dans le plan de leur mouvement de révolution. Si donc les éléments du système solaire semblent être arbitraires au premier moment, on se rend vite compte que tel ne peut pas être le cas et que sa constitution ne peut pas être l'effet du hasard.

Quelle que soit la nature de la cause du système solaire, puisqu'elle a produit et dirigé les mouvements des planètes, aussi loin qu'elles soient du Soleil, il faut qu'elle ait été un fluide d'une immense étendue. Pour avoir produit des mouvements presque circulaires, tous de même sens, autour du Soleil, et quasiment dans le plan de son équation, il faut que ce fluide ait environné cet astre comme une atmosphère. LAPLACE part donc de l'idée d'un proto-Soleil dont l'atmosphère, en vertu d'une chaleur excessive, s'étendait jusqu'aux confins du système actuel. Il ne s'occupe que de la façon dont les planètes ont pu naître aux dépens de l'atmosphère qui entoure le noyau central de la nébuleuse [12]. Suivent alors des explications comment les molécules dans l'anneau primitif ont évolué pour former par après planètes et satellites.

À côté de sa description hypothétique de la formulation du système solaire, LAPLACE parle des nébuleuses qui venaient d'être découvertes par HERSCHEL et son télescope géant, mais cette idée était spéculative au second degré en vue de visualiser en quelque sorte l'infinitude de l'univers au-delà du système solaire. En effet, il semblait probable de voir dans ces objets des ensembles d'étoiles analogues au système solaire. Néanmoins, LAPLACE restait bien en deçà de la généralité de l'idée kantienne des univers-îles.

C'est finalement aussi dans la première édition de «*L'exposition du Système du Monde*» [359] que LAPLACE énonce l'idée d'une étoile tellement massive, que les forces gravitationnelles empêchaient même les rayons de lumière de s'évader. Même si, dans les éditions ultérieures, LAPLACE avait supprimé cette idée, il est devenu par elle un ancêtre au concept du «*trou noir*».

Le «*Traité de Mécanique Céleste*» [126] paru entre 1799 et 1805 est un ouvrage composite. Il a l'aspect d'un manuel, d'une collection de mémoires scientifiques, mais aussi d'un almanach et contient à la fois des résultats théoriques et pratiques. D'un point de vue méthodologique, il réduit toute l'astronomie à des problèmes de mécanique rationnelle qui tous peuvent être résolus par l'hypothèse de la loi de la gravitation newtonienne.

Le préambule dans le premier tome est fort court. LAPLACE se propose : «*de présenter sous un même point de vue les théories éparses dans un grand*

nombre d'ouvrages, et dont l'ensemble, embrassant tous les lois de la gravitation universelle sur l'équilibre et sur les mouvements des corps solides et fluides qui composent le système solaire et les systèmes semblables répandus dans l'immensité des cieux, forment la mécanique céleste. L'astronomie, considérée de la manière la plus générale, est un grand problème de mécanique, dont les éléments des mouvements célestes sont les arbitraires ; sa solution dépend à la fois de l'exactitude des observations et de la perfection de l'analyse, et il importe d'en bannir tout empirisme et de la réduire à n'emprunter de l'observation que les données indispensables» [126]

Les deux premiers volumes publiés en l'an VII contiennent une exposition mathématique des lois de la statique et de la dynamique, spécialement arrangée en vue de la formulation de problèmes astronomiques. Ils sont partagés en cinq livres dont deux forment le premier volume et trois le deuxième. Si dans sa pratique antérieure, LAPLACE avait introduit chaque mémoire par la dérivation des équations du mouvement spécialement adaptées au problème particulier qu'il comptait résoudre, dans le «*Traité*» qu'il arrange les mêmes matières de façon systématique. L'exposé lui-même est canonique : d'abord les lois de la statique puis celles de la dynamique du point matériel, puis des corps solides et enfin celles des fluides. LAPLACE adopte l'approche de D'ALEMBERT en dérivant les lois de la dynamique à partir des conditions d'équilibre. Deux développements sont plus spécifiquement laplaciens : ainsi il introduit le concept du plan invariant défini par le centre du Soleil et le vecteur formant la somme des vecteurs des moments cinétiques perpendiculaire à ce plan. Il crée ainsi un référentiel fixe auquel toutes les orbites des corps célestes peuvent être réduites. Un autre développement plutôt inattendu est la discussion des lois du mouvement d'un système de corps sous l'hypothèse d'une loi générale, liant la force à la vitesse. LAPLACE identifie la loi la plus simple pouvant servir comme principe de base de la dynamique si la force est admise directement proportionnelle à la vitesse. Dans ce cas, le principe d'inertie et la loi des aires sont préservés. LAPLACE, avec cette digression, se meut sur les pas d'ARISTOTE, de KEPLER et même de NEWTON qui a considéré ce cas dans le LIVRE II des «*PRINCIPIA*». Le LIVRE II : «*De la loi de la pesanteur universelle et du mouvement des centres de la gravité des corps célestes*» pourrait être considéré comme un manuel introductif à la partie théorique de l'astronomie. Les lois du mouvement sont appliquées en vue de dériver la loi de la gravitation et de calculer les déplacements des corps célestes. LAPLACE introduit au courant du texte de plus en plus ses propres méthodes. Ainsi au chapitre 6, il introduit sa théorie des perturbations des coordonnées et des éléments orbitaux, qu'il avait publiée en 1776 dans son premier mémoire sur la gravitation [366]. D'autres résultats de ses recherches, tels que la relation Jupiter-Saturne, sont repris afin d'illustrer sa méthode de calcul des inégalités périodiques qui apparaissent dans les orbites elliptiques et pour montrer qu'il est possible, dans un premier temps, de négliger les carrés des forces perturbatrices.

Le tome II poursuit et complète l'analyse mathématique des sujets que LAPLACE avait énumérés déjà dans son «*Exposition du Système du Monde*».

Ayant traité déjà le mouvement translatatoire des corps célestes dans le LIVRE II, LAPLACE s'attaque dans le LIVRE III au problème de la figure des corps célestes. Dans le LIVRE IV, il traite des oscillations de la mer et de l'atmosphère dues à l'action du Soleil et de la Lune sur ces deux masses fluides. Le LIVRE V est consacré aux mouvements des corps célestes, autour de leurs propres centres de gravité. LAPLACE justifie son exposé par les liaisons résultant de ces mouvements avec les figures de ces corps et les oscillations des fluides qui les recouvrent. Le livre contient deux chapitres dont le premier traite des mouvements de la Terre, autour de son centre de gravité ; le deuxième a pour sujet les mouvements de la Lune. Les trois livres ne renferment rien de nouveau qui n'était déjà traité dans ses écrits antérieurs, ou dans ceux d'autres géomètres. Ainsi le LIVRE V expose la théorie générale de la précession et de la nutation d'après les recherches de D'ALEMBERT et d'EULER, tout en les complétant sur plusieurs points importants tels que la prise en compte de la fluidité de la mer et la possibilité des déplacements des pôles à la surface du sphéroïde terrestre menant éventuellement à des altérations du mouvement de rotation de la Terre et à des variations de la longueur du jour moyen. Pour le mouvement de la Lune autour de son axe, LAPLACE perfectionne la théorie de LAGRANGE [341] *«en déterminant l'influence des grandes inégalités séculaires des mouvements de la Lune sur les phénomènes de sa libration et concluant que l'attraction de la Terre rend invisible à jamais l'hémisphère opposé à celui que nous présente le sphéroïde lunaire»* [382]

La seconde partie du *«Traité»* fut prête en 1802 et fut présentée à l'Institut en décembre de cette année. Trois années du consulat napoléonien étaient passées depuis la publication de la première partie et LAPLACE rend hommage au premier consul dans une note introductive. Dans la préface, il rappelle encore une fois les buts de son entreprise : *«C'est principalement dans les applications de l'analyse au système du monde, que se manifeste la puissance de ce merveilleux instrument sans lequel il eût été impossible de pénétrer un mécanisme aussi compliqué dans ses effets, qu'il est simple dans sa cause. Le Géomètre embrasse maintenant de ses formules, l'ensemble du système planétaire et de ses variations successives ; il remonte par la pensée, aux divers états qu'il a subis dans les temps les plus reculés, et redescend à tous ceux que les temps à venir développeront aux observateurs. Il voit ce sublime spectacle dont la période embrasse des millions d'années, se renouveler en peu de siècles, dans le système des satellites de Jupiter par la promptitude de leurs révolutions, et produire de singuliers phénomènes entrevus par les Astronomes, mais trop composés ou trop lents pour qu'ils en aient pu déterminer les lois. La théorie de la pesanteur devenue par tant d'applications, un moyen de découvertes aussi certain que l'observation elle-même, lui a fait connaître plusieurs inégalités nouvelles, et prédire le retour de la comète de 1759 dont l'action de Jupiter et de Saturne rend les révolutions très inégales. Par ce moyen, il a su tirer des observations comme d'une mine féconde, un grand nombre d'éléments importants et délicats qui sans l'analyse, y resteraient éternellement cachés. Telles sont les valeurs respectives des masses du Soleil, des planètes et des satellites, déterminées par*

les révolutions de ces différents corps et par le développement de leurs inégalités périodiques et séculaires ... » [126]

Le volume III est voué à la théorie des planètes dans le LIVRE VI et à la théorie de la Lune, sujet du LIVRE VII. Dans le LIVRE VI, on trouve d'abord la détermination analytique des inégalités dépendantes du second ordre des excentricités et des inclinaisons basées sur les méthodes que LAPLACE avait développées dans son grand mémoire sur Jupiter et Saturne [367], puis le calcul abrégé des inégalités dépendantes d'ordres supérieurs de ces mêmes quantités et du carré de la force perturbatrice. LAPLACE discute ensuite les perturbations dues à l'ellipticité du Soleil, à l'action des satellites et même des étoiles. Fort des formules analytiques, tenant compte de ces approximations, LAPLACE fit calculer par son assistant BOUVARD les expressions numériques pour chaque planète. Les chapitres successifs du LIVRE VI détaillent ces formules pour les rayons vecteurs, ainsi que pour les mouvements en longitude et en latitude. LAPLACE vise ici, tout comme dans le LIVRE VIII, les besoins pratiques des navigateurs et des astronomes observateurs, en vue de la constitution d'un almanach astronomique. BOUVARD prit ainsi en charge un travail énorme qui ne se limitait pas seulement à l'exécution des calculs numériques, mais incluait aussi la comparaison avec les résultats observationnels et l'élimination des différences éventuelles entre calcul et observation. LAPLACE se montra convaincu que dans ces formules, les erreurs étaient si minimes qu'elles ne pouvaient pas fausser les tables à compiler suivant ses formules.

Le LIVRE VII est consacré à la Théorie de la Lune. LAPLACE y applique ses méthodes rodées déjà pour les mouvements des planètes [379] et montre que toutes les inégalités du mouvement lunaire, telle que la variation, l'évection et l'équation annuelle peuvent être expliquées à travers la loi de la gravitation universelle. Puis il déduit de cette loi les aspects plus subtils dans ce mouvement, en y incorporant les phénomènes de la parallaxe du Soleil et de la Lune et la forme sphéroïdale du globe terrestre. Il appliqua les résultats de son mémoire [381] qu'il avait publié seulement quelques semaines avant la première partie du «*Traité*». Entre-temps, l'astronome autrichien J.-T. BURG avait trouvé encore une nouvelle égalité périodique dans le mouvement de la ligne des nœuds de la Lune d'une durée de dix-sept à dix-neuf ans et LAPLACE incorpora son expertise que l'Institut lui avait demandée, dans le texte du LIVRE VII. Cet épisode montre que le «*Traité*» était à la fois une source d'inspiration pour la recherche, et aussi une mine de renseignements pour toute sorte d'informations pratiques. LAPLACE exploita le résultat de BURG et constata une relation entre celui-ci et l'aplatissement du globe terrestre en trouvant une valeur de la constante exprimant cet aplatissement qui est plus près de celle trouvée par les méthodes géodésiques.

Le volume IV fut présenté à l'Institut en 1805, donc plus de deux années plus tard que le volume précédent. Il traite de la théorie des satellites des planètes extérieurs et de celle des comètes. Le LIVRE VIII est presque exclusivement voué à la théorie des satellites de Jupiter et est basé sur une révision des mémoires de LAPLACE écrits au début des années 1790 [384]. Si dans ce texte,

LAPLACE avait déjà donné les masses des quatre satellites par rapport à celle de Jupiter, il détaille dans le «*Traité*» les inégalités des trois satellites intérieurs et compare certains comportements de ceux-ci avec le mouvement de la Lune. Le LIVRE VIII se termine avec deux courts chapitres sur les satellites de Saturne et d'Uranus.

Les LIVRES IX et X sont entièrement nouveaux. Dans le premier, consacré à la «*Théorie des Comètes*», LAPLACE expose d'abord une méthode pour calculer les perturbations des éléments des comètes, fondée sur l'emploi des quadratures mécaniques, dont il donne les règles, mais aussi sur celui des quadratures analytiques pour la partie supérieure de l'orbite. Les formules sont préparées pour une utilisation numérique directe. Un second chapitre explique les perturbations dans l'orbite des comètes lorsque celles-ci s'approchent très près d'une planète. En effet, si une comète entre dans la «*sphère d'activité*» de la planète, son orbite devient une section conique avec la planète comme foyer. Si la planète sort ultérieurement de cette zone d'influence, le Soleil reprend son rôle ordinaire de centre principal d'attraction, mais l'orbite de la comète a été profondément modifiée par cette rencontre. Plusieurs astronomes ont pu vérifier la théorie laplacienne à l'aide de la comète de LEXELL aperçue en 1770 et devenue invisible après une approche de Jupiter en 1767 et 1779.

Le LIVRE X, intitulé : «*Sur divers points relatifs au système du monde*», traite d'abord la théorie des réfractions astronomiques et contient beaucoup de données nouvelles. En même temps, ce livre témoigne d'un déplacement des intérêts scientifiques de LAPLACE vers des questions de physique. Il analyse d'abord les effets de la réfraction atmosphérique sur l'exactitude des observations astronomiques et se base sur une théorie corpusculaire de la lumière. LAPLACE déduit d'abord l'équation différentielle du mouvement de la lumière en admettant que les corps transparents exercent sur celle-ci des actions qui ne sont sensibles qu'à de très petites distances. En vue d'intégrer cette équation, il faut connaître l'indice de réfraction de l'air à une température et une pression données ainsi que la loi de la variation de ces deux variables. LAPLACE engagea GAY-LUSSAC pour déterminer cette loi qui lui donna de très bons résultats dans la mesure des hauteurs des montagnes à l'aide d'un baromètre et dont il indiqua une formule très simple.

Dans le chapitre suivant, LAPLACE traite de la chute des corps qui tombent d'une grande hauteur, en tenant compte du mouvement de rotation de la Terre et de la résistance de l'air ; il envisage aussi le cas plus général du mouvement quelconque d'un point pesant.

Enfin, il revient sur le cas dans lequel le mouvement d'un système de corps qui s'attirent peut être exactement déterminé et il reprend la théorie des équations séculaires dues à la résistance d'un fluide éthéré répandu autour du Soleil. LAPLACE montre que ce fluide ne peut être généré par celui-ci. En effet, le Soleil, comme source de l'éther, devrait perdre de la masse ce qu'il ne fait pas, vu que cette perte de masse devrait dilater les orbites des planètes, un phénomène qui ne fut constaté depuis le temps où l'homme fait des observations astronomiques. Le LIVRE X se termine par un supplément aux théories de Jupiter, de

Saturne et de la Lune. En 1806, LAPLACE publie un autre supplément : «*Sur l'action capillaire*».

Dans le cinquième et dernier volume du «*Traité*», LAPLACE remplit d'abord l'engagement qu'il a pris dès le début, d'écrire l'histoire des travaux des géomètres sur la mécanique céleste. De plus, il fait y rentrer ses nouvelles recherches et il parle de la figure de la rotation de la Terre, de l'attraction et de la répulsion des sphères, des oscillations des fluides qui recouvrent les planètes, du mouvement des corps célestes autour de leur centre de gravité, du mouvement des planètes et des comètes ainsi que du mouvement des satellites.

Contrairement à ce que l'on pourrait attendre, le «*Traité de Mécanique Céleste*» ne contient pas d'exposé explicite sur la stabilité du système solaire bien qu'il en parle dans l'«*Exposition du Système du Monde*». Pour LAPLACE, les développements qu'il fit dans la théorie des inégalités des planètes, et plus spécialement du couple Jupiter Saturne, sont convaincants. La loi de la gravitation newtonienne, suffisante pour expliquer tous les phénomènes astronomiques connus à la fin du XVIII^e siècle et prouvant qu'en réalité les perturbations séculaires sont inexistantes, convainc LAPLACE que le système solaire est stable. LAPLACE n'a plus besoin comme NEWTON d'un «*grand horloger*» pour remettre le système à l'heure de temps en temps. LAPLACE, grand maître de la «*science normale*» en menant à bien son projet immense avec la rédaction du «*Traité de Mécanique Céleste*» fit triompher définitivement NEWTON et sa loi de la gravitation universelle.

Bibliographie

- [1] NEWTON (Isaac) : *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, par feu Madame la Marquise du Chastellet, deux volumes, reproduction en fac-similé de l'édition de Paris, Desaint & Saillant, 1759, Éditions Jacques Gabay, Paris 1990.
- [2] HAZARD (Paul) : *La crise de la conscience européenne*, deux volumes, Gallimard Idées, Paris 1968.
- [3] DESCARTES (René) : *Discours de la méthode* dans *Œuvres complètes*, Volume VI, publiées par Ch. Adam et P. Tannery, Édition du Jubilé, Vrin, Paris 1996.
- [4] DIJKSTERHUIS (Eduard Jan) : *Die Mechanisierung des Weltbildes*, fac-simile de J. M. Meulenhoff, 1950, Springer 1983.
- [5] KOYRÉ (Alexandre) : *Du monde clos à l'univers infini*, Gallimard Idées, 1973.
- [6] KOYRÉ (Alexandre) : *Etudes galiléennes*, Hermann, Paris 1980.
- [7] DE CUSA (Nicolas) : *De la docte ignorance*, traduit pas L. Moulinier, introduction par Abel Ray, Librairie Félix Alcan, Paris 1930.
- [8] GALILEI (Galileo) : IL SAGGIATORE, appresso Giacomo Mascardi, Roma 1623, Le opere di Galileo Galilei, edizione nazionale, Firenze 1890–1909.
- [9] COPERNIC (Nicolas) : *Des révolutions des orbes célestes*, Traduction avec introduction et notes par A. Koyré, Librairie Félix Alcan, Paris 1934.
- [10] PTOLÉMÉE (Claude) : *Almageste ; Composition mathématique*, traduite par M. Halma et suivie de notes de M. Delambre, Paris 1813, réimpression Hermann, Paris 1927.
- [11] TATON (René) : *La science antique et médiévale, des origines à 1450*, PUF, Paris 1994.
- [12] VERDET (Jean-Pierre) : *Une histoire de l'astronomie*, Éditions du Seuil. Paris 1990.
- [13] COPERNIC (Nicolas) : *Introductions à l'Astronomie de Copernic : Commentariolus, par N. Copernic, et La Narratio prima par Rheticus*. A. Blanchard, Paris 1975.

- [14] DUHEM (Pierre) : *ΣΩΖΕΙΝ ΤΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ : Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée*. Vrin Reprise, Paris 1982.
- [15] KOYRÉ (Alexandre) : *La révolution astronomique : Copernic, Kepler, Borelli*. Hermann, Paris 1974.
- [16] ROBERTS (V.) : *The Solar and Lunar Theory of Ibn ash Shatir*. Isis, Vol. XLVII, 1957.
- [17] BRAHE (Tycho) : *De nova stella dans Tychonis Brahe Dani Opera omnia* edidit John Louis Emil Dreyer, Hauniae, Gyldendal 1913–1929.
- [18] KEPLER (Johann) : *Astronomia nova argumentum singulorum capitulum*, dans *Gesammelte Werke, Band 3*, édité par Walther von Dyck et Max Caspar, C. H. Beck, München 1938–1959.
- [19] TANNERY (Paul) : *Galilée et les principes de la dynamique* dans *Mémoires scientifiques tome VI, Sciences modernes : Le siècle de Fermat et de Descartes*, Gauthier–Villars, Paris 1926, fac-similé éditions Jacques Gabay, Paris 1996.
- [20] GALILÉE (Galileo) : *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, Éditions du Seuil, Paris 1992.
- [21] CLAVELIN (Maurice) : *La philosophie naturelle de Galilée*, Librairie A. Colin, Paris 1968.
- [22] GEYMONAT (Ludovico) : *Galilée*. Éditions Complexe, Paris 1983.
- [23] GALILÉE (Galileo) : *Lettera di Galileo a Antonio de Medici, 7 gennaio 1610, in Oeuvre complètes de Galilée*. Le opere di Galileo Galilei. Volume X. Edizione nazionale, Firenze 1900.
- [24] GALILÉE (Galileo) : *Le messenger des étoiles*. traduit du latin, présenté et annoté par Fernand Hallyn. Éditions du Seuil, Paris 1992.
- [25] *Galilée aspects de sa vie et de son œuvre : Galilée et les taches solaires*, par Maurice Clavelin, Pierre Costabel, Bernard Dame, etc., PUF, Paris 1968.
- [26] GALILÉE (Galileo) : *Istoria e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti*, in Roma appresso Giacomo Mascardi, MDCXIII, *Le opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, Ed. Favaro, Firenze 1890–1909.
- [27] KEPLER (Johann) : *Mysterium cosmographicum de stellanova*, dans *Gesammelte Werke, Band 1*, édité par Walther von Dyck et Max Caspar, C. H. Beck, München 1938–1959.
- [28] GALILÉE (Galileo) : *Dialogues et lettres choisies*; traduction de Paul–Henri Michel. Hermann, Paris 1966.
- [29] GALILÉE (Galileo) : *Schriften, Briefe Dokumente*, Herausgegeben von Anna Mudry, übersetzt von Monika Köster, C. H. Beck, München 1987.
- [30] KEPLER (Johann) : *Harmonice mundi* dans *Gesammelte Werke, Band VI*, édité par Walther von Dyck et Max Caspar, C. H. Beck, München 1938–1959.

-
- [31] BREWSTER (David) : *Memoirs of the Life, Writings and Discoveries of Sir Isaac Newton*. 2 volumes, T. Constable, Edinburgh 1855.
 - [32] DE MORGAN (A.) : *Essays on the Life and Work of Newton*. éd. by Ph. E. B. Jourdain, Chicago 1914.
 - [33] MORE (L.-T.) : *Isaac Newton : A Biography*, New-York 1934.
 - [34] SULLIVAN (J. W. N.) : *Isaac Newton, 1642–1727... Memoir of the author*, by Charles Singer, Macmillan, London 1938.
 - [35] WESTFALL (Richard S.) : *Never at Rest : A Biography of Isaac Newton*. Cambridge University Press, Cambridge 1980 .
 - [36] SCHNEIDER (I.) : *Isaac Newton*. C. H. Beck, München 1988.
 - [37] AUFRAY (J.-P.) : *Newton ou le triomphe de l'alchimie*. Le Pommier, Fayard, 2000.
 - [38] WICKERT (I.) : *Isaac Newton : Ansichten eines universalen Geistes*. Piper, München 1983.
 - [39] VERLET (Loup) : *La malle de Newton*. Bibliothèque des sciences humaines, Gallimard, 1993.
 - [40] NEWTON (Isaac), Add MS 3968 41 f. 85.
 - [41] NEWTON (Isaac) : *Unpublished scientific papers of Isaac Newton : a selection from the Porthmouth collection in the University Library, Cambridge*, MS 3975, p. 13, chosen, edited and translated by Alfred Rupert Hall and Marie Boa Hall, Cambridge University Press, London 1978.
 - [42] MUNBY (A. N. L.), *The Distribution of the First Edition of Newton's Principia, The Keynes Collection of the Works of Sir Isaac Newton at King's College, Cambridge. Notes and Records of the Royal Society*, London 1952.
 - [43] HALLE (J.) : *Schaffner Collection*. University of Chicago Library, MS 1075.
 - [44] NEWTON (Isaac) : *De la gravitation suivi de du mouvement des corps*, présentés par François de Gandt, traduit du latin par Marie-Françoise Biarnais, Éditions Galiimard, 1995.
 - [45] HUYGENS (Christiaan) : *Œuvres complètes, Horlogium oscillatorium*, 22 volumes, Martinus Nijhoff, Société hollandaise des sciences, La Haye 1888–1950.
 - [46] NEWTON (Isaac) : *Optics, or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflections and Colours of Light*, traduit de l'anglais par Jean-Paul Marat 1787, réimpression Christian Bourgeois Éditeur, Paris 1989.
 - [47] HOOK (Robert) : *Micrographia or some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses with observations and inquiries thereupon*, printed for James Allestry, London 1667.
 - [48] DESCARTES (René) : *Discours de la Méthode avec les annexes*. Édition Adam Tannery, vol. VI, Librairie Vrin, 1964–1974.
 - [49] NEWTON (Isaac) : *Porthmouth Papers*, Cambridge University Library. MS 3996 f. 122.

- [50] OLDENBURG (Henry) : *The Correspondence of Henry Oldenburg*, edited and translated by Alfred Rupert Hall and Marie Boas-Hall, The University of Wisconsin Press, Madison, Milwaukee, London 1965–1986.
- [51] BACON (Francis) : *Novum Organum, The works of Francis Bacon*, Longmans, London 1874–1879.
- [52] NEWTON (Isaac) : *The correspondence of Isaac Newton*, éd. H.–W. Turnbull, J.–F. Scott, Alfred Rupert Hall, L. Tilling, Cambridge University Press, 1955–1977.
- [53] NEWTON (Isaac) : *Newtons Abhandlung über die Quadratur der Kurven*, aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 164, reprint Harri Deutsch, 1996.
- [54] NEWTON (Isaac) : *La méthode des fluxions et des suites infinies*, traduit par M. de Buffon. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris 1994.
- [55] HALL (Alfred Rupert) : *Philosophers at War*. Cambridge University Press, 1980.
- [56] PAPPUS D'ALEXANDRIE, *La collection mathématique*; traduit du grec avec une introduction et notes par Paul Ver Eecke. Albert Blanchard, Paris 1982.
- [57] NEWTON (Isaac) : *The mathematical papers of Isaac Newton*. 8 volumes, edited by Derek Thomas Whiteside with the assistance in publication of Michael Antony Hoskin, Cambridge University Press, Cambridge 1967–1981.
- [58] NEWTON (Isaac) : *Écrits sur la religion*. traduit de l'anglais, présentation et notes de Jean-François Baillon, Collection Tel, Gallimard, Paris 1996.
- [59] NEWTON (Isaac) : *Observations upon the Prophecies of Daniel and the Apocalypse of St. John*, in two parts, edited by J. Roberts, Horsley, London 1733.
- [60] NEWTON (Isaac) : *The Yahuda Manuscripts*, Var. 1, 4, folio 67, Jewish National and University Library Jerusalem.
- [61] BOYLE (Robert) : *The Origin of Forms and Qualities (according to the corpuscular philosophy), illustrated by considerations and experiments, the second edition, augmented by a discourse of subordinate forms*, edited by H. Hall, R. Davis, Oxford 1666.
- [62] NEWTON (Isaac) : *Keynes Collection*, King's College MS 62.
- [63] PHILALETES (Irenæus) : *Secrets reveal'd of An Open Entrance to the Shut Palace of the King*. W. Godbid, London 1669.
- [64] ARISTOTE : *Physique*. Les Belles Lettres, Paris 1936.
- [65] DUMONT (J.–P.) : *Deux hypothèses concernant l'interprétation stoïcienne de l'art tinctorial*, dans : *Alchimie et philosophie à la Renaissance*. Librairie J. Vrin, Paris 1993.

-
- [66] OLYMPIODORE, *Sur l'action de Zosime, et sur le dire de Hermès et des philosophes*, dans *Alchimie, art histoire et mythes*, S.E.H.A. Paris et Arché Milan, 1995.
- [67] NEWTON (Isaac) : *Dibner Collection*, Smithonian Institution Library, Washington MS 16, folio 25.
- [68] DE DUILLIER (Fatio) : *De la cause de la pesanteur : Mémoire de Nicolas Fatio de Duillier*, présenté à la Royal Society le 26 février 1690, reconstitué et publié avec une introduction par Bernard Gagnebin, reprinted from : *Notes and Records of the Royal Society*, vol. VI, 1749.
- [69] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie*, übersetzt von Artur Buchenau, mit Einleitungen und Anmerkungen, hrsg. von Ernst Cassirer, Philosophische Bibliothek 496, Verlag Felix Meiner, Hamburg 1996.
- [70] DOBBS (Betty Jo Teeter) : *The Janus Faces of Genius : the role of alchemy in Newton's thought*. Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [71] NEWTON (Isaac) : *Waste Book*, U.L.C. MS Add 4004 fol 1. J.-W Herivel : Newton's discovery of the law of centrifugal force, *Jsis* 51 (1960).
- [72] KOYRÉ (Alexandre) : *Newton et Descartes*, in *Etudes Newtoniennes*, Paris 1968.
- [73] COHEN (J.-B.) : *The Principia, Universal Gravitation and the «Newtonian Style»*, in *Relation to the Newtonian Revolution in Science* in Z. Bechler : *Contemporary, Newtonian Research*. Reidel 1982.
- [74] NEWTON (Isaac) : *The Correspondence of Isaac Newton*, éd. H.W. Turnbull, J-F Scott Alfred Ruppert Hall L Tilling Cambridge University Press 1995-1977
- [75] KOYRÉ (Alexandre) : *Une lettre inédite de Robert Hooke à I. Newton*, in : *Etudes Newtoniennes*. Paris 1968.
- [76] WILSON (C.-A.) : *From Kepler's Laws, so-called to Universal Gravitation : Empirical Factors*, *Archive for History of exact Sciences*, Vol. 6, 1969/1970.
- [77] COHEN (J.-B.) : *Introduction to Newton's Principia*, Harvard University Press 1978, U.L.C. MS Add 3968 f. 101.
- [78] NEWTON (Isaac) : *De motu corporum in gyrum*, U.L.C. Add 3965 ff 55-62 publié in Herivel : *The Background of Newton's Principia* Oxford U.P. 1965.
- [79] DE GANDT (François) : *Commentaire du «Mouvement des corps» dans I. Newton : De la gravitation*, Gallimard 1995.
- [80] BRACKENRIDGE (J.-B.) : *The Key to Newton's Dynamics*, University of California Press 1995.
- [81] GALILEI (Galileo) : *Discours concernant deux sciences nouvelles*, Introduction, traduction, notes et index par M. Clavelui, PUF 1995, Nouvelle édition corrigée et augmentée.

- [82] HERIVEL (J.-W.) : *The Background to Newton's Principia. A Study of Newton's Dynamical, Researches in the Years 1664-1684*, Clarendon Press, Oxford 1965.
- [83] HALL (A.R. & M.B.) : *Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton*, Cambridge University Press 1962.
- [84] DESCARTES (René) : *Principes de la Philosophie*, Elsevier 1644. Edition Adam et Tannery, Paris 1891 à 1912.
- [85] COHEN (J.-B.) : *The Principia, Universal Gravitation and the «Newtonian Style»*, in *Relation to the Newtonian Revolution in Science* in Z. Bechler : *Contemporary Newtonian research*, Reidel Dordrecht 1982.
- [86] COHEN (J.-B.) : *Introduction to Newton's Principia*, Harvard University Press 1978.
- [87] HALLEY (Edmond) *Phil. Trans.* N° 186. 1687.
- [88] COHEN (J.-B.) : *Isaac Newton's papers & letters on natural philosophy and related documents*, Harvard University Press 1958.
- [89] NEWTON (Isaac) : *Philosophiae naturalis principia mathematica*, London 1687 ; réédité par WN Dawson & Sons Ltd London 1954.
- [90] NEWTON (Isaac) : *Philosophiae naturalis principia mathematica*, éd. A. Koyré et J.-B. Cohen. Harvard University Press 1972.
- [91] KOYRÉ (Alexandre) : *L'hypothèse et l'expérience chez Newton*, in : *Etudes Newtoniennes*. Gallimard 1968.
- [92] LOCKE (John) : in *Bibliothèque Universelle* vol. 8 Mars 1688.
- [93] *Journal des Sçavans*, Vol. 16. Paris, 1688.
- [94] COHEN (J.-B.) : *Newton's second law and the concept of force in the «PRINCIPIA»*, *The Texas Quaterly* vol. 10. 1967.
- [95] BAILY (F.) : *An account of the Rewd John Flamsteed, the first Astronomer Royal ...* , London 1835 Photo-reprint London. Dawsons of Pall Mall, 1966.
- [96] COHEN (J.-B.) : *Isaac Newton's Theory of the Moon's Motion*, (1702). Dawson 1975.
- [97] GREGORY (D.) : *Astronomiae Physicae et geometricae, Elementa Oxorriae : e theatro Sheldoniano*, 1702 *The elements of astronomy, physical and geometrical* 1715 London ; printed for J. Nicholson.
- [98] DU CHÂTELET (Emilie, Marquise), *Exposition abrégée du système du Monde*, attaché à la traduction des «PRINCIPIA», rééd. J. Gabay 1990.
- [99] EDLESTON (J.) : *Correspondence of Sir Isaac Newton and Professor Cotes*, ... , London, Cambridge 1850.
- [100] NICHOLS (J.) : *Literary Anecdotes*, 3. London 1817 ; 1857.
- [101] WESTFALL (R.-S.) : *Newton and the Fudge Factor*, *Science* Vol. 179 1973.

-
- [102] COLEPRESS (S.) : *Of some observations made by Mr Samuel Colepresse at and ngle Plymouth . . .* , Phil Transactions 3. 1668.
 - [103] STURRNY (S.) : *An Account of some observations, made this Present Year by Capt Samuel Sturrny in Hongroad within four metes of Bristol . . .* , Phil Trans. 3. 1668.
 - [104] WOLLENSCHLAGER (K.) : *Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli und Abraham De Moivre*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft Basel 1931-32.
 - [105] KOYRÉ (Alexandre) : *Cotes et Newton*, in Etudes Newtoniennes Gallimard 1968.
 - [106] *Journal des Sçavans*, mars 1715 pp 157-60.
 - [107] *Mémoire pour l'Histoire des Sciences et des Beaux Arts (de Trevoux)*, février 1718 pp 466-475.
 - [108] *Acta Eruditorum*, mars 1714.
 - [109] *Acta Eruditorum*, février 1726.
 - [110] BERCKELEY (G.) : *Œuvres*, sous la direction de G. Brykman 3 vol. Paris P.U.F. 1985-1992.
 - [111] MACH (E.) : *La Mécanique. Exposé historique et critique de son développement*, Paris Hermann 1904 rééd. J.Gabay.
 - [112] DESCARTES (René) : *Principes de Philosophie*, Œuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery. Vrin 1996.
 - [113] BARTHÉLEMY (G.) : *Newton, mécanicien du Cosmos*, Vrin 1992.
 - [114] BLAY (M.) : *Les «PRINCIPIA» de Newton*, P.U.F. 1995.
 - [115] PONCELET (J.-V.) : *Traité des propriétés projectives des figures*, Gauthier Villars Paris 1865.
 - [116] BERNOULLI (Jean) : *Œuvres*, Lausanne 1742.
 - [117] GAUTIER (A.) : *Essai historique sur le problème des trois corps*, Paris 1817.
 - [118] BLAY (M.) : *La naissance de la mécanique analytique*, P.U.F. Paris 1992.
 - [119] NEWTON (Isaac) : *La méthode des fluxions et les suites infinies*, Traduction de M. de Buffon Paris 1740, réimpression A. Blanchard 1994.
 - [120] VOLTAIRE : *Lettres philosophiques*, in : Melanges, Gallimard, Bibliothèque de la Pleiade 1961.
 - [121] CHANDRASEKHAR (S.) : *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press Oxford 1995.
 - [122] WESTFALL (R.-S.) : *Newton and the fudge Factor*, Science, Vol. 179, 1973.
 - [123] POPPER (Karl Raimund) : *Die Logik der Forschung*, 5e édition, J.C.B. Mohr (Paul Siebek) Tübingen 1973.
 - [124] TISSERAND (Félix) : *Traité de Mécanique céleste*, 4 tomes, Réimpression J. Gabay 1990.

- [125] *A catalogue of the Portsmouth Collection of Books and Papers written by or belonging to Sir Isaac Newton* Cambridge, University Press 1888.
- [126] LAPLACE (Pierre Simon) : *Traité de Mécanique Céleste*, Réimpression : Culture et Civilisation Bruxelles 1967.
- [127] EINSTEIN (Albert) : *Explication du périhélie de Mercure par la théorie de la relativité générale*, in Albert Einstein : Œuvres choisies, Seuil / CNRS 1993.
- [128] NEWCOMB (M.) : *The Elements of the four inner Planets and the fundamental constants of Astronomy*, Washington 1895.
- [129] ZÖLLNER : *Principien einer electrodynamischen Theorie der Materie*, Leipzig 1876.
- [130] RIEMANN (Bernhard) : *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*; édité par K. Hattendorf, Hannover 1876
- [131] SIMON (G.) : *Kepler astronome, astrologue*, Gallimard 1979.
- [132] GILBERT (W.) : *De Magnete*, Londres 1600, Réimpression. Basic Books 1958.
- [133] KEPLER (Johann) : *Gesammelte Werke*, tome 14, édité par W. von Dyck, Max Caspar et F. Hammer, München Beck, en cours depuis 1938.
- [134] KEPLER (Johann) : *Epitome astronomiae Copernicanae* *Gesammelte Werke*, tome 7, édité par W. von Dyck, Max Caspar et F. Hammer, München Beck, en cours depuis 1938.
- [135] STEPHENSON (B.) : *Kepler's physical astronomy*, Springer 1987.
- [136] KEPLER (Johann) : *Tabulae Rudolphinae Quibus Astronomicae Scientiae ... Restauratio continetur*, Ulm 1627 *Gesammelte Werke*, tome 10, édité par W. von Dyck, Max Caspar et F. Hammer, München Beck, en cours depuis 1938.
- [137] V. LANDSBERG (Ph.) : *Tabulae Coelestium motum perpetuae*, Middleburg 1632.
- [138] WILSON (C.-A.) : *The great inequality of Jupiter and Saturn : from Kepler to Laplace*, Archive for History of Exact Sciences Springer 1985.
- [139] GAYTHORPE (S.B.) : *Jeremiah Horrocks and his «New Theory of the Moon»*, Journal of the British Astronomical Association 67 (1957).
- [140] NEWTON (Isaac) : *De Mundi Systemate liber*, Isaaci Newtoni, J. Tonson, J. Osborn 8 T Longman, London 1728.
- [141] BOULLIAU (J.) : *Astronomia Philolaica*, Paris 1645.
- [142] GAYTHORPE (S.B.) : *On Horrock's Treatment of the Evection and the Equation of the Centre*, with a Note on the Elliptic Hypothesis of Albert Curtz and its Correction by Boulliau and Newton, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 1925 Vol. 85.
- [143] HORROCKS (J.) : *Opera Posthuma*, London 1672, 1673.

-
- [144] RIGAUD (S.-P.) : *Correspondence of Scientific Men*, Oxford 1841.
 - [145] WHITE SIDE (D.T.) : *Newton's Lunar Theory : From High Hope to Disenchantment*, *Vistas in Astronomy* Vol. 19 1976.
 - [146] WHISTON (W.) : *Praelectiones Astronomicae*, Cambridge 1707.
 - [147] *A New and most Accurate Theory of the Moon's Motion ; Whereby all her Irregularities may be solved and her Place truly calculated to two Minutes Written by That Incomparable Mathematician Mr Isaac Newton*, London. A Baldwin 1702.
 - [148] GUICCIARDINI (N.) : *Reading the «PRINCIPIA»*, Cambridge University Press 1999.
 - [149] GREENBERG (J.-L.) : *The problem of the Earth shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press 1995.
 - [150] NAUENBERG (M.) : *Newton's Portsmouth perturbation method for the three body problem and its application to lunar motion*, in R. Dalitz & M Nauenberg : *The Foundations of Newtonian Scholarship*, 1998 Singapore World Scientific.
 - [151] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Du Système du Monde dans les principes de la gravitation universelle*, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences - Année 1745*, Paris 1749.
 - [152] MAUPERTUIS (Pierre Louis Moreau de) : *Œuvres* 4 vol. 1768 II p. 284.
 - [153] MAUPERTUIS (Pierre Louis Moreau de) : *Discours sur la figure des astres*, in *Œuvres* I p.92.
 - [154] BRUNET (Pierre) : *L'introduction des théories de Newton en France au XVIII^e siècle*, Genève 1970.
 - [155] CONDORCET : *Eloge de Frénicle*
 - [156] COSTABEL (P.) : *Science positive et forme de la Terre au début du XVIII^e siècle*, in *La figure de la Terre du XVIII^e siècle à l'ère spatiale*, Gauthier Villars 1988.
 - [157] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Théorie de la Figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, David 1743.
 - [158] BRUNET (Pierre) : *La vie et l'oeuvre de Clairaut*, PUF 1952.
 - [159] MAUPERTUIS (Pierre Louis Moreau de) : *Sur les figures des corps célestes*, in *Mémoires de l'Académie des Sciences* 1734.
 - [160] ANDRIESSE (C.D.) : *Christiaan Huygens, Biographie*, Albin Michel 1998.
 - [161] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Tentamen de motuum coelestium causis*, 1689 Leibnizens mathematische Schriften VI Halle 1860.
 - [162] BLAY (M.), HALLEUX (R.) : *La Science classique Dictionnaire critique ; Article Leibniz*, Flammarion 1998.
 - [163] ROBINET (A.) : *Correspondance Leibniz-Clarke*, PUF Paris 1957.

- [164] KOYRÉ (Alexandre) : *Du Monde clos à l'univers infini*, Gallimard, Paris 1973.
- [165] VOLTAIRE : *Eléments de philosophie de Newton, mis à la portée de tout le monde*, Amsterdam, chez Jacques Desbordes. 1738.
- [166] PEMBERTON (H.) : *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy*, London 1728.
- [167] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini, avec plusieurs méthodes d'entirer la grandeur et la figure de la Terre*, 1733, Histoire de l'Académie Royale des Sciences Paris.
- [168] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Sur la mesure de la Terre par plusieurs arcs de méridien pris à différentes latitudes*, 1736, Histoire de l'Académie Royale des Sciences Paris.
- [169] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Théorie de la figure de la Terre tirée des principes de l'hydrostatique*, 1743 David, Paris.
- [170] BERTRAND (J.) : *Clairaut : Sa vie et ses travaux*, 1866, Journal des Savants pp. 117-138.
- [171] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *De l'orbite de la Lune dans les système M. Newton*, 1743, Histoire de l'Académie Royale des Sciences Paris.
- [172] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Du système du monde dans les principes de la gravitation universelle*, 1745, Histoire de l'Académie Royale des Sciences Paris.
- [173] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Théorie de la Lune déduite du seul principe de l'attraction réciproquement proportionnelle aux quarrés des distances*, Pièce qui a remporté le Prix de l'Académie Impériale des Sciences de St-Pétersbourg en MDCCL, Imprimerie de l'Académie Impériale des Sciences 1752.
- [174] SPEZIALI (P.) : *Une correspondance inédite entre Clairaut et Cramer*, Revue d'histoire des sciences juillet-septembre 1955.
- [175] GRIGORIAN (A.T.), JUSKEVIC (A.P.) : *Relations scientifiques russo-françaises ...* , 1968.
- [176] EULER (Leonhard) : *Novae et correctae Tabulae ad loca Luna computanda*, Œuvres d'Euler, E76.
- [177] LEMONNIER (P. Ch.) : *Sur le mouvement de Saturne et sur l'inégalité de ses révolutions périodiques qui dépendent de ses diverses configurations à l'égard de Jupiter*, Mémoires Paris (1746) 1751.
- [178] EULER (Leonhard) : *Méditationes in quaestionem ... Quibusnam observationibus mari, tam interdin quam noct ...* , Œuvres d'Euler E150.
- [179] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*

-
- [180] *Pièces qui ont remporté le prix de l'Académie royale des sciences en 1745 et 1747*, Paris 1750.
 - [181] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Mémoire sur les mouvements des corps célestes*, adressé à Messieurs les Auteurs du Journal des Sçavans.
 - [182] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Méthode générale pour déterminer les orbites et les mouvements de toutes les planètes eu ayant égard à leur action mutuelle*, Mémoires Paris (1745) 1749.
 - [183] WAFF (C.B.) : *Alexis Clairaut and his proposed modifications of Newtons inverse-square law of gravitation*, in : Avant, Avec, Après Copernic. Paris. Blanchard 1975.
 - [184] EULER (Leonhard) : *Lettre à Maupertuis du 2 décembre 1747 R. 1525*, L. Euler, Correspondance Birkhäuser 1986.
 - [185] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, sujet proposé pour le prix de l'année 1748 par l'Académie Royal des Sciences de Paris (E120) Paris, Martin, Coignard et Guerin 1749.
 - [186] EULER (Leonhard) : *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (1747) 1749.
 - [187] JACQUIER (P.P.) et LE SEUR : *P. V. de l'Académie*, 1747.
 - [188] COMTE DE BUFFON Jean Louis Leclerc : *Réflexions sur la loi de l'attraction et sur le mouvement des apsides*, Mem. Paris (1745) 1749.
 - [189] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Réflexions aux réflexions du M. de Buffon sur la loi de l'attraction et sur le mouvement des apsides*, Mem. Paris (1745), 1749.
 - [190] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Miscellaneous works and correspondance*, in J. Bradley, Oxford 1832.
 - [191] KEILL (J.) : *In qua Leges Attractionis aliaque Physices Principia Trahuntur*, Philosophical Transactions XXVI (May - June 1708).
 - [192] MAUPERTUIS (Pierre Louis Moreau de) : *Sur les lois de l'Attraction*, Mem. Paris 1732.
 - [193] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les carrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*, Mem. Paris (1748), 1752.
 - [194] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Avertissement de M. Clairaut au sujet des mémoires qu'il a donnés en 1747 et 1748 sur le système du Monde dans les principes de l'attraction*, Mem. Paris (1745), 1749.
 - [195] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Exposition abrégée de ce qui a été dit dans l'Académie sur le mouvement de l'apogée de la Lune et sur la loi de l'attraction*, PV 1749.
 - [196] WALMESBY (Ch.) : *Théorie du mouvement des apsides en général, et en particulier des apsides de l'orbite de la Lune*, Paris 1749 Procès verbaux de l'Académie Royale des Sciences.

- [197] *Lettre de d'Alembert à Cramer*, Bibliothèque de Genève MS suppl.384 f 187-190.
- [198] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Mémoire sur l'orbite apparente du Soleil*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1759.
- [199] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Théorie du mouvement des comètes*, Michel Lambert, Paris 1759.
- [200] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, L.E.O.O. II 25, Orell Fussli 1960.
- [201] WILSON (C.-A.) : *Perturbations and Solar Tables from Lacaille to Delambre : The Rapprochement of Observation and Theory*, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 22 1980.
- [202] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Essai sur les Eléments de Philosophie ou sur les Principes des Connaissances humaines*, Cité par E. Cassirer : La Philosophie des Lumières., G. Monfort. 1966.
- [203] CASSIRER (Ernst) : *La Philosophie des Lumières*, G. Monfort. 1966.
- [204] VOLTAIRE : *Traité de Métaphysique*, Mélanges, Gallimard La Pléiade. 152.
- [205] FONTENELLE : *Œuvres I*, Paris 1708.
- [206] CONDILLAC : *Traité des Systèmes*, in : Œuvres complètes Paris An VI-1798.
- [207] VOLTAIRE : *Le philosophe ignorant*, in Mélanges, Gallimard La Pléiade 152.
- [208] PATY (M.) : *D'Alembert*, Les belles Lettres, 1998.
- [209] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Premiers textes de Mécanique Céleste*, CNRS Editions 2002.
- [210] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Opuscles mathématiques.*, David, Paris 1761 à 1780.
- [211] DESCARTES (René) : *Œuvres et Lettres*, Bibliothèque de la Pléiade, 1953 Gallimard.
- [212] DENISOFF (E.) : *Descartes, premier théoricien de la physique mathématique*, Louvain, Paris 1970.
- [213] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Essai sur les éléments de philosophie ou sur les principes des connaissances humaines*, Réédition Fayard, Paris 1986.
- [214] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Discours préliminaire de l'Encyclopédie*, Vrin Reprise, Paris 1984.
- [215] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Traité de Dynamique*, texte établi à partir de la 2. édition 1758. Réimpression Vrin 2000, Gauthier Villard. 1921.
- [216] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Encyclopédie*, Article : éléments des sciences, tome V. 1755.

-
- [217] LE RU (V.) : *D'Alembert philosophe*, Libraire Vrin 1994.
 - [218] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Mémoire sur les principes de la mécanique*, Mémoire de l'Académie des Sciences Paris 1769.
 - [219] HANKINS (Th.L.) : *Jean d'Alembert ; Science and the Enlightenment*, Clarendon Press. Oxford 1970.
 - [220] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides pour servir de suite au Traité de Dynamique*, Paris 1744.
 - [221] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 6 janvier 1747*, in L. Euler : *Commercium Epistolicum*, Birkhauser 1980.
 - [222] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 24 mars 1747*, in L. Euler *Commercium Epistolicum*, Birkhauser 1980.
 - [223] EULER (Leonhard) : *Lettre à d'Alembert du 15 avril 1747*, in L. Euler *Commercium Epistolicum*, Birkhauser 1980.
 - [224] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Application de ma méthode pour déterminer les orbites des planètes à la recherche de l'orbite de la Lune*, Procès Verbaux de l'Académie 1748.
 - [225] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à G. Cramer du 25 décembre 1748*, Bibl. Genève Ms Suppl. 348 f° 179 à 180.
 - [226] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 20 juillet 1749*, in L. Euler *Commercium Epistolicum*, Birkhauser 1980.
 - [227] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la nutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien*, Paris 1749.
 - [228] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à G. Cramer du 21 septembre 1749*, Bibliothèque de Genève Ms Suppl 384 f° 187 à 190.
 - [229] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à G. Cramer du 12 février 1750*, Columbia University, Special Ms Coll. David Eugène Smith historical.
 - [230] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 22 février 1750*, in L. Euler *Commercium Epistolicum*, Birkhauser 1980.
 - [231] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, sujet proposé pour le prix de l'année 1748 par l'Académie Royale des Sciences de Paris (E120) Paris, Martin, Coignard et Guerin 1748.
 - [232] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 30 mars 1750*, in L. Euler *Commercium Epistolium*, Birkhauser 1980.
 - [233] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 4 janvier 1751*, in L. Euler *Commercium Epistolium*, Birkhauser 1980.
 - [234] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à G. Cramer du 18 octobre 1750*, Bibl. Genève, Ms Suppl., coll Coindet f° 39 à 42.
 - [235] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Recherches sur différents points importants du Système du Monde*, A Paris, chez David l'ainé MDCCLIV (1754).

- [236] HILL (G.W.) : *On certain lunar inequalities due to the action of Jupiter*, Astronomical Papers, t. III 1885.
- [237] HANSEN (P.A.) : *Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen*, Tome I, Leipzig 1862.
- [238] FORBES (E.G.) : *The Euler–Mayer Correspondence 1751-1755*, Macmillan London 1971.
- [239] CHANDLER (Ph.) : *Clairaut's Critique of Newtonian Attraction : Some Insights into his Philosophy of Science*, Annals of Science 32, 1975.
- [240] D'ARCY (P.) : *Réflexions sur la Théorie de la Lune, donnée par M. Clairaut et sur les observations de D.C. Walmsley concernant la même matière*, Académie de Paris PV 1749.
- [241] MACHIN (J.) : *The law of the moon's motion according to gravity*, in : I. Newton, The mathematical principles of natural philosophy, London 1729.
- [242] WILSON (C.-A.) : *The great inequality of Jupiter and Saturn : from Kepler to Laplace*, Archive for History of Exact Sciences 1985.
- [243] *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers, par une société de gens de lettres : Article Attraction*, Paris 1751 à 1772.
- [244] BRADLEY (J.) : *Extrait d'une lettre de M. Bradley ... sur un mouvement observé dans les étoiles fixes*, Philos. Trans XLV, London 1748.
- [245] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la Terre*, Œuvres E 171 O II 29.
- [246] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à L. Euler du 20 janvier 1748*, L. Euleri commercium Epistolicum Vol. 5, Birkhauser 1980.
- [247] EULER (Leonhard) : *Lettre à d'Alembert du 15 février 1748*, L. Euleri commercium Epistolicum Vol. 5, Birkhauser 1980.
- [248] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à Euler du 30 mars 1748*, L. Euleri commercium Epistolicum Vol. 5, Birkhauser 1980.
- [249] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à Euler du 17 juin 1748*, L. Euleri commercium Epistolicum Vol. 5, Birkhauser 1980.
- [250] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à G. Cramer du 16 juin 1748*, British Museum Ms Add 23899 f° 4 à 5 v.
- [251] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Lettre à Euler du 27 octobre 1748*, L. Euleri commercium Epistolicum Vol. 5, Birkhauser 1980.
- [252] HENRY (Ch.) : *Correspondance inédite de d'Alembert avec Cramer, Le Sage, Clairaut, Turgot, Castillon, Beguelin, etc*, Bulletino di bibliographia et di storia delle scienze matematiche et fisiche XVIII, 1885.
- [253] JEREMIAE HORROCCI LIVERPOLIENSIS : *Lunares Numeri, Ad novum Lunae Systema*, Opera Posthuma Landes 167.

-
- [254] FLAMSTEED (John) : *Epilogus*, Opera Posthuma 1673.
 - [255] LEMONNIER (P. Ch.) : *Institutiones astronomiques avec de nouvelles tables d'équation corrigées, et particulièrement les tables du Soleil, de la Lune et des satellites ...* , Paris 1746.
 - [256] HALLEY (Edmond) *Edmundi Halleii Astronomidum viveret*, Regie Tabulae Astronomicae. Accédent de Usu Tabularum Praecepta, ed. J. Bevis. Londoni 1749.
 - [257] EULER (Leonhard) : *Tabulae Astronomicae solis et lunae*, Opera Omnia : Sol et Luna I Bâle 1964.
 - [258] MAYER (T.) : *Noval tabulae motuum solis et lunae*, Commentarie Societatis Regiae Scientiarum Gottengensis 1753.
 - [259] MAYER (T.) : *Theoria Lunae juxta systema Newtonianum*, éd. N. Maskelyne printed by W. Richardson and S. Clark, Nourse, Mount and Page. London 1767.
 - [260] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Nova Methodus proportionnelle maximis et minimis item que tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi gemis*, Acta Eruditorum, Octobre 1684
 - [261] DE L'HOSPITAL (G.F.A.) : *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris Imprimerie Royale, 1696.
 - [262] FONTENELLE : *Oraison funèbre pour le Marquis de l'Hospital*, cité dans P. Mancosu : The metaphysics of the calculus : a foundational debate in the Paris Academy of Sciences 1700-1706, *Historia Mathematica* 16. 1989
 - [263] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Lettre à Huygens octobre 1693*, cité dans A. Heinekamps Christiaan Huygens vu par Leibniz in R. Tatou (éd) : Huygens et la France, Vrin Paris 1982
 - [264] NEWTON (Isaac) : *On the Quadrature of Curves 1704*, suppl. à Optics 1. édition
 - [265] WOLLENSCHLÄGER (K.) : *Der mathematische Briefwechsel zwischen Johann I Bernoulli and Abraham De Moivre*, Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft, Basel 43, Bâle 1902
 - [266] BERNOULLI (Jean) : *Extrait de la Réponse de Monsieur Bernoulli à Monsieur Herman datée de Bâle le 7 octobre 1710*, Mémoires de l'Académie des Sciences, 1710
 - [267] COTES (R.) : *Logometria*, Philosophical Transactions, 29. 1714
 - [268] KEILL (J.) : *Observationes ... de inverso problemate virium centripetarum*, Philosophical Transactions 29, 1714
 - [269] KEILL (J.) : *Défense du Chevalier Newton*, Journal littéraire 8, 1716
 - [270] EULER (Leonhard) : *Mechanica, Sive, Motus scientia analytice exposita*, Opera Omnia Series Secunda Vol. 1 et 2, Birkhäuser Basel

- [271] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *De linea isochrona in qua grave sive acceleratione descendit et de controversia cum Drr Abbate D.C.*, Acta Eruditorum, avril 1689
- [272] BERNOULLI (Jean) : *Johannis Bernoulli constructio facilis Curvae Recessus aliquabilia a puncto data, per Refectificationem Curvae Algebraicae*, Acta Eruditorum, octobre 1694
- [273] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Acta Eruditorum*, mai 1697
- [274] BERNOULLI (Jean) : *Johannis Bernoulli. Curvatura Radie in Diaphanis non Uniformibus ... sen radiorum unda constructa*, Acta Eruditorum mai 1697
- [275] LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm) : *Lettre à Jean Bernoulli du 16 juin 1696*, Acta Eruditorum, mai 1697
- [276] BERNOULLI (Jean) : *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1703 Opera omnia, Genève 1744
- [277] HERMANN (J.) : *Phoronomia sive de viribus et motibus corporum solidorum et fluidorum libri duo*, Amsterdam : Rod. xxx Gerh. Wetstenios 1716
- [278] VARIGNON (P.) : publiés par Michel Blay : *Quatre mémoires inédits de Pierre Varignon consacrés à la science du mouvement*, Archives internationales d'histoire des sciences. 1989
- [279] LOCKE (J.) : *Essay concerning Human Understanding*
- [280] GREMBERG (J.-L.) : *The Problem of the Earth Shape from Newton to Clairaut*, Cambridge University Press, 1995
- [281] KERTZ (W.) : *Geschichte der Geophysik*, Olms, Hildesheim 1999
- [282] HOFFMANN (J.-E.) : *Physikalische Blätter*, 14 (1958)
- [283] FELLMANN (E.-A.) : *Leonard Euler*, Rowohlt Monographie, Reinbek 1995
- [284] DEMIDOV (S.) : *Euler*, in : M. Blay ; R. Halleux : *La Science classique*, Dictionnaire critique, Fammarrion, Paris 1998
- [285] EULER (Leonhard) : *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis*, St-Petersbourg 1749. Eneström Verzeichniss 110, 111, Opera omnia II 18, 19
- [286] EULER (Leonhard) : *Methodus inveniendi Lineas Curvas ...*, Lausanne et Genève 1744
- [287] EULER (Leonhard) : *Elementa calculi variationum*, Opera omnia I, 25
- [288] EULER (Leonhard) : *Introductio in analysin infinitorum*, Opera omnia I, 8, 9
- [289] EULER (Leonhard) : *Institutiones calculi differentialis ...*, Opera omnia I, 10
- [290] EULER (Leonhard) : *Institutiones calculi integralis ...*, Opera omnia I, 11 à 13

-
- [291] EULER (Leonhard) : *Theoria motus lunae*, Opera omnia II, 23
 - [292] EULER (Leonhard) : *Theoria motus corporum*
 - [293] B. Robins : *New Principles of Gunnery*, London 1742
 - [294] EULER (Leonhard) : *Neue Grundsätze der Artillerie*, A. Hande Berlin 1745. Opera Omnia II 14
 - [295] SZABO (J.) : *Geschichte der mechanischen Prinzipien, Die Anfänge der äusseren Ballistik*, Birkhäuser Basel 1977
 - [296] EULER (Leonhard) : *Correspondance avec P.L.M. de Maupertuis et Frederic II*, Opera Omnia IV Vol. 6 Birkhäuser 1986
 - [297] EULER (Leonhard) : *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie*, St-Petersbourg 1768
 - [298] EULER (Leonhard) : *Réflexions sur l'espace et le temps*, Opera Omnia III. 2
 - [299] EULER (Leonhard) : *Vollständige Anleitung zu Algebra*, St-Petersbourg 1770, Opera Omnia I. 1
 - [300] EULER (Leonhard) : *Dioptricae*, Opera Omnia III. 9
 - [301] EULER (Leonhard) : *Theoria motium lunae*, Opera Omnia II. 22
 - [302] EULER (Leonhard) : *Théorie complète de la construction et de la manœuvre des vaisseaux*, Opera Omnia III
 - [303] TRUESDELL (C.) : *Essays in the History of Mechanics*, Springer 1968
 - [304] EULER (Leonhard) : *Recherches sur le mouvement des corps célestes en général*, Berlin 1747 ; Opera Omnia II. 25 Zurich 1960
 - [305] EULER (Leonhard) : *Découverte d'un nouveau principe de la mécanique*, Mémoires de l'Académie de Berlin tome 6, Opera Omnia II. 5
 - [306] EULER (Leonhard) : *Theoria motus corporum solidorum sen rigidorum*, Rostock et Greifswald 1765 Opera Omnia II. 3
 - [307] DUGAS (R.) : *A History of Mechanics*, Editions du Griffon Neuchâtel 1955
 - [308] EULER (Leonhard) : *Nova Methodus motum corporum rigidorum determinande*, Novae Commentarie Academiae Petropolitanae Tome 20 1775, Opera Omnia II. 9
 - [309] *L'Encyclopédie*, Paris 1751, Nouvelle édition par M. Groult Paris, Champion 1999
 - [310] COMTE (Auguste) : *Œuvres*, Anthropos Paris 1968
 - [311] KUHN (Thomas Samuel) : *La structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, Paris 1983
 - [312] MACHIN (J.) : *The laws of the Moon's motion*, in : *The mathematical principles of Natural Philosophy*, London 1729
 - [313] LEADBETTER : *Uranoscopia*, 1735

- [314] LEADBETTER : *A complete System of Astronomy*, 1738
- [315] LE SEUR & JACQUIER : *Commentaire sur les Principia de Newton*, Genève 1739-42
- [316] SCHANDLER (P.) : *Clairaut's Critique of Newtonian Attraction; Some Insights into his Philosophy of Science*, *Annals of Science* 32, 1975
- [317] EULER (Leonhard) : *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter*, *Opera Omnia* ser 2,25 L.E.O.O.
- [318] BOSCOVICH : *De inaequalitatibus quas Saturnus et Jupiter sibi mutuo videntur inducere praesertim circa tempus conjunctionis*, Rome 1756
- [319] BIGOURDON (G.) : *Lettres de Leonard Euler en partie inédites*, *Bulletin astronomique*, 35. 1918
- [320] EULER (Leonhard) : *Dissertatio de magnete*, *Opuscula varie argumenti*, t III. Berlin, 1751
- [321] FORBES (E.G.) : *The Euler-Mayer correspondence 1751-1755*, American Elsevier, 1977 New York
- [322] EULER (J.-A.) : *Mémoire dans lequel on examine si les planètes se meuvent dans un milieu dont la résistance produise quelque effet sensible sur leur mouvement*, Académie Royale des Sciences, 1771
- [323] EULER (Leonhard) : *De relaxatione motus planetarum*
- [324] LAPLACE (Pierre Simon) : *Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planètes qui en dépendent*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris 1776
- [325] *Correspondance de Leonard Euler*, *Opera omnia* IV Vol. 5, Birkhäuser 1980
- [326] STREET (Th.) : *Astronomia Carolina*, London 1661
- [327] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Recherches sur la comète des années 1531, 1607, 1682 et 1759*, St-Petersbourg 1762
- [328] FLAMSTEED (John) : *Historia Coelestis Britannica*, t III London 1725
- [329] EULER (Leonhard) : *De motu modorum lunae eiusque inclinationis ad eclipticam variatione*, *Opera Omnia* Ser 2. 23
- [330] BIGOURDAN (G.) : *Lettres de Leonard Euler, en partie inédites*, *Bulletin astronomique* 35 1918
- [331] EULER (Leonhard) : *Correspondance de L. Euler*, *Opera Omnia* Series quarta, Birkhäuser 1980
- [332] JUSKEVIC (A.-P.) , WINTER (E.) : *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel*, Leonard Eulers, Akademie Verlag Berlin 1976
- [333] TREDER (H.-J.) : *Elementare Kosmologie*, Akademie Verlag Berlin 1975
- [334] EULER (Leonhard) : *Investigatio perturbationum quibus planetarum motus of actionem eorum mutuam afficiuntur*, *Receuil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences*, t VIII 1756

-
- [335] EULER (Leonhard) : *De perturbatione motus Planetarum ab eorim Figura non sphaerica oriunda*, Opera Omnia Ser 2 25
 - [336] MACLAURIN (C.) : *A treatise of fluxions*, Edimburg 1742
 - [337] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Nova Tabularum lunarium Emendatio*, Paris 1756
 - [338] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Tables de la Lune calculées suivant la théorie de la gravitation universelle*, Paris 1754
 - [339] PETERSON (J.) : *Newton's Clock; chaos in the Solar System*, Freeman and Company New York 1993
 - [340] D'ALEMBERT (Jean Le Rond) : *Recherches sur la précession des équinoxes, et sur la mutation de l'axe de la Terre dans le système newtonien*, Paris 1749
 - [341] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Recherches sur la Libration de la Lune*, 1764 (Euvres VI
 - [342] WILSON (C.-A.) : *The great inequality of Jupiter and Saturn from Kepler to Laplace*, Archive for History of exact Sciences, Springer 1985
 - [343] EULER (Leonhard) : *De la variation de la latitude des étoiles fixes et de l'obliquité de l'écliptique*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 10 (1754)
 - [344] CASSINI (J.) : *Tables astronomiques*, Paris 1740
 - [345] CASSINI (J.) : *Elemens d'Astronomie*, Paris 1740
 - [346] KOPELEVICH (Y.-K.) : *The Petersburg Astronomy Contest in 1751*, Societ Astronomy 9 (1966)
 - [347] GRANT (R.) : *History of Physical Astronomy*, London 1852
 - [348] MAYER (T.) : *Abhandlung über die Umwälzung des Mondes und seine Axe / und die scheinbare Bewegung der Mondsflecken*, Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr 1748, Nürnberg 1750
 - [349] FORBES (E.G.) : *The Euler-Mayer Correspondence 1751-1755*, Macmillan London 1971
 - [350] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Essais sur le Problème des trois corps*, (Euvres complètes
 - [351] EULER (Leonhard) : *De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato*, Novi commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae t. IV, 1758.
 - [352] EULER (Leonhard) : *Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la Lune*, Mémoires de l'Académie de Paris 1772
 - [353] EULER (Leonhard) : *Investigatio perturbationum quibus planetarum motus ob actionem eorum mutuam afficiuntur*, Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie des Sciences t VIII 1756.

- [354] EULER (Leonhard) : *Nouvelles méthodes de déterminer les dérangements dans le mouvement des corps célestes causés par leur action mutuelle*, Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin 19. (1763).
- [355] POINCARÉ (Henri) : *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, I à III 1899, Albert Blanchard Paris 1987
- [356] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Mécanique Analytique*, Paris, Albert Blanchard, 1965.
- [357] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, tome VI, Paris, Goerg Olms Verlag 1973
- [358] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Essai sur le problème des trois corps*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret tome VI, Paris, Georg Olms Verlag 1973.
- [359] LAPLACE (Pierre Simon) : *Exposition du Système du Monde*, Paris 1796
- [360] EULER (Leonhard) : *Nouvelle manière de comparer les observations de la Lune avec la théorie*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin. 19 (1763), 1770.
- [361] CLAIRAUT (Alexis Claude) : *Mémoire sur la Comète de 1682.*, Journal des Sçavants, janvier 1759.
- [362] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Solution de différents problèmes de calcul intégral*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret tome I, Georges Olms Verlag, 1973.
- [363] BURKHARDT (H.) : *Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen und Integration der Differentialgleichungen der Mathematischen Physik*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung. Bd 10, 1908.
- [364] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret tome V Paris, Reprint Goerg Olms Verlag 1973.
- [365] LAPLACE (Pierre Simon) : *Recherches sur le calcul intégral et sur le système du Monde*, Œuvres complètes de Laplace, tome VIII, Paris 1841.
- [366] LAPLACE (Pierre Simon) : *Recherches sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires qui en dépendent*, Œuvres complètes de Laplace, tome VIII. Paris 1841.
- [367] LAPLACE (Pierre Simon) : *Théorie de Jupiter et de Saturne*, Œuvres complètes de Laplace, tome XI, Paris 1845.
- [368] BRUMBERG (V.-A.) : *Analytical Techniques of Celestial Mechanics*, Springer, 1995.
- [369] LAGRANGE (Joseph-Louis) : *Correspondance et mémoires divers*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, tome XIII, Paris, 1882.
- [370] LAPLACE (Pierre Simon) : *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes*, Œuvres complètes de Laplace, tome VIII, Paris, 1841.

-
- [371] LAGRANGE (Joseph–Louis) : *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des nœuds et de l'inclinaison des orbites des planètes*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, tome VI, Paris, Goerg Olms Verlag 1973.
 - [372] POISSON (D.) : *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique*, Journal de l'Ecole Polytechnique, XVe cahier 1809.
 - [373] LAPLACE (Pierre Simon) : *Mémoire sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, Œuvres complètes de Laplace, tome XI, Paris, 1845.
 - [374] LAGRANGE (Joseph–Louis) : *Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, tome V, Paris, Georg Olms Verlag 1973.
 - [375] DELAMBRE (J.-B.) : *Tables de Jupiter et de Saturne*, P.V. de l'Académie Royale des Sciences 108 fol 92-99. (1789).
 - [376] LALANDE (Joseph–Jérôme) : *Astronomie*, Paris 1. éd. 1764, 3e éd. 1792.
 - [377] LAGRANGE (Joseph–Louis) : *Sur l'équation séculaire de la Lune*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, tome VI, Paris, Goerg Olms Verlag, 1973.
 - [378] LAGRANGE (Joseph–Louis) : *Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune*, Œuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret. Tome V, Paris, Georg Olms Verlag, 1973.
 - [379] LAPLACE (Pierre Simon) : *Sur l'équation séculaire de la Lune*, Œuvres complètes de Laplace, tome XI, Paris, 1845.
 - [380] LAPLACE (Pierre Simon) : *Sur les équations séculaires des mouvements de l'apogée et des nœuds de l'orbite lunaire*, Œuvres complètes de Laplace, tome XIII, Paris, 1845.
 - [381] LAPLACE (Pierre Simon) : *Mémoire sur les équations séculaires des mouvements de la Lune de son apogée et de ses nœuds*, Œuvres complètes de Laplace, tome XII, Paris 1845.
 - [382] ANDOYER (H.) : *L'œuvre scientifique de Laplace*, Payot, Paris 1922.
 - [383] KANT (Immanuel) : *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels*, Akademie Ausgabe 1900 et suiv. Berlin.
 - [384] LAPLACE (Pierre Simon) : *Théorie des satellites de Jupiter*, Œuvres complètes de Laplace, tome XI, Paris 1845.